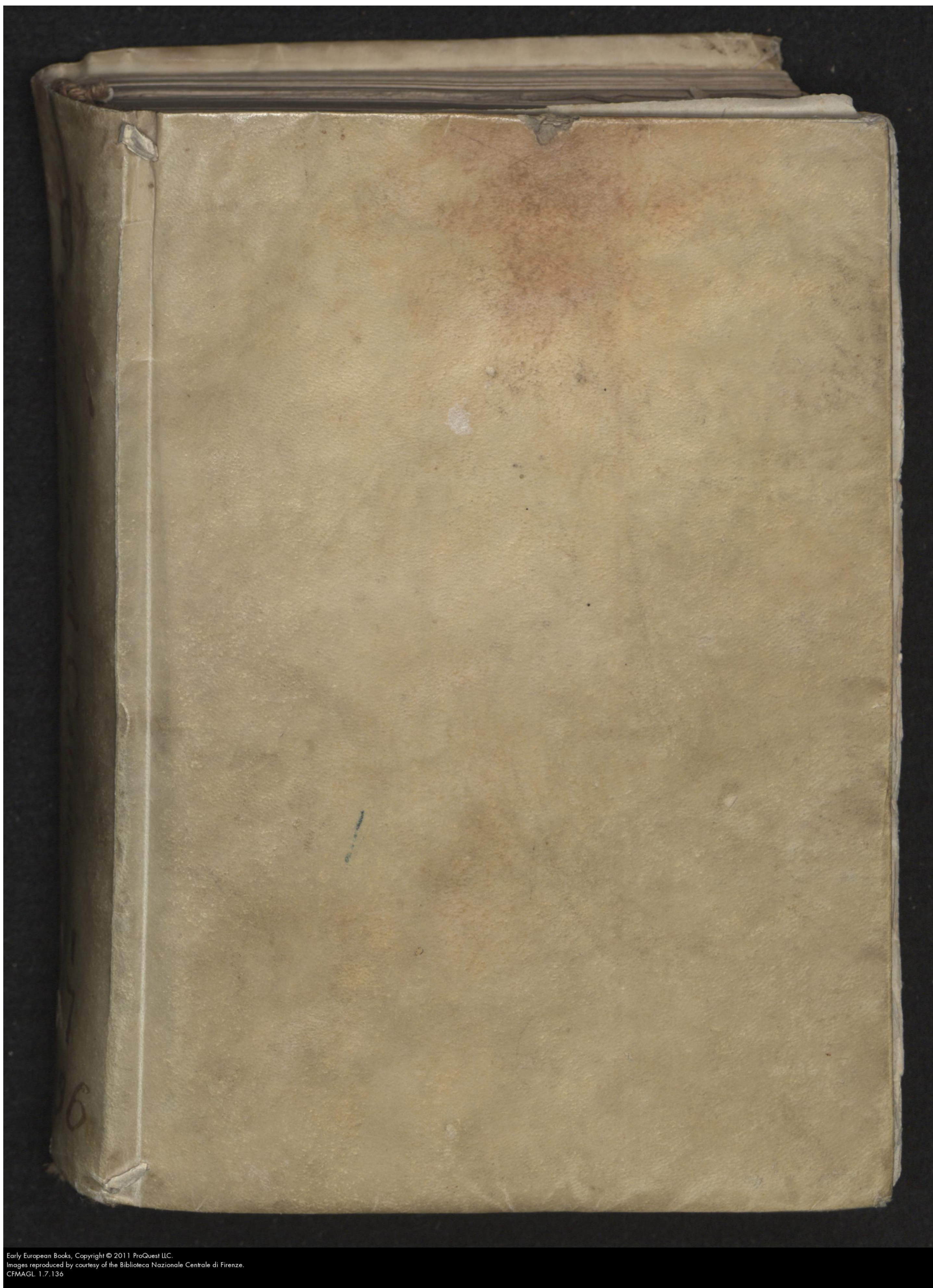
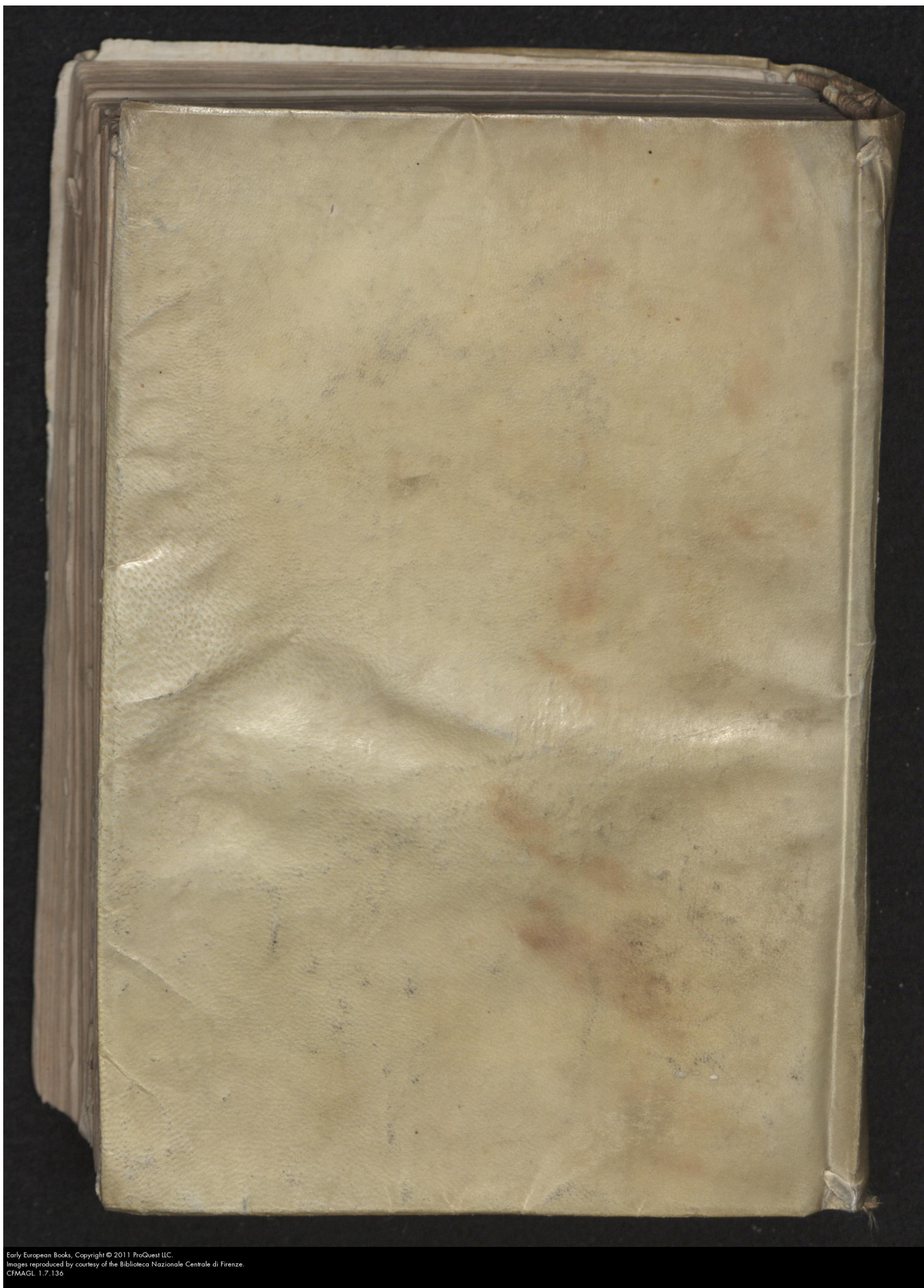



Geometria del Caualerio
S
1
7
136









EDIA

XI

CAVAL

GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.

AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore.

AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.

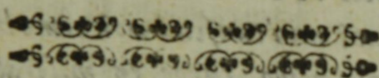




BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.



ILLVSTRISSIMO
AC REVERENDISS. D. D.
IOANNI CIAMPOLO,
Domino ſuo colendiſſimo.





Ar quidem erat, Illuſtriſs. Præſul, vt tot ex tui eximia, ac ſingulari, humanitate acceptis beneficijs, aliqua grati animi ſignificatione reſponderem. Miraberis fortè tamen, Ampliſs. Vir, me per hæc geometrica ſchemata (perinde ac literis hieroglyphicis Aegyptij animi ſenſa declarabant) nunc meam tibi gratitudinem quodammodo patefacere velle. Quid ni? nonne & Ariſtippo, cum ad Rhodienſium litus ap-

pulliſſet, hęc, vt hominum æſtimata veſtigia, incolarum indicare ſapientiam valuerunt? Quid ſi nunc mei gratitudinem, ac præſertim ſic me decernente, per eadem, vti meæ erga te debitæ ſeruitutis inſignia, tibi aperiendam eſſe dixerim? nihil enim eſt, quod malim, quam, vt cum Eloquentiæ parente loquar, & me tibi gratum eſſe, & videri: quapropter has, etſi rudes, geometricas ſpeculationes perennitati tuæ cenſui nuncupandas. Verum vt Perſius.

Quis leget hæc? min'tu iſtud ais? nemo hercule. nemo?
Vel duo, vel nemo: turpe, & miſerabile, quare?

Geometrica enim ſunt plurimis obſita difficultatibus, à quibus, licet ingenio ſaluberrimis, velut ab amaris quibuſdam pharmacis, ægræ hominum mentes nimium abhorrere ſolent. Atqui tu legas hæc, Præſtantiſs. Vir, qui mihi, vt quõdam Antimacho obſcurum Poema recitanti ſolus Plato, omnium inſtar eris. Tu, qui in omnium diſciplinarum genera ſummoperè exardeſcens, omnium, quod paucis datum eſt, encyclopediam es aſſecutus. Tu, qui optimè noſti quanti ipſa Geometria, quam diſertiſſimus Philo reli-

quarum principem, ac metropolim appellabat, optimarum artium studiosis sit habēda. Propterea enim illius ignaros è gymnasij foribus magnus ille Academiæ moderator arcebat: qui, cum de Problemate Delphico fuisset perquisitus, illicò neglectæ Geometriæ Græcos ab Apolline accusari respondit. Quinimmo Eudoxum, Architam, & Menechmum, reprehendebat, quod illius Problematis solutionem per instrumenta mechanica aggrederentur, hoc enim pacto aiebat Geometriæ bonum perdi, ac corrumpi, quippe quæ cognitionis tantum gratia quæritur. Is deniq; tot laudibus eandem decorauit, vt vel ipsum Deum semper Geometriam tractare asseruerit. Inter Geometrica quidem difficilioris hæc esse reor contemplationis, sed eò magis, quod ad eadem nunc mihi delecta via nullius adhuc, quod sciam, est attrita vestigio, hic enim inaudita, ni fallor, hucusq; ratione nouam Continuorum Arachnē indiuisibilibus, ceu filis, texentem Geometriam euasisse comperies. Hoc ergo licet exiguum, tamen vti nouum inuentum, tibi non minus in Mathematicis, quam in cæ-

teris disciplinis, eruditissimo Viro, & cui tantum debeo, iure omni debebatur. Ne igitur, Illustriss. Præsul, hoc gratæ, qualecumq; sit, ac deuotæ mentis argumentum aspernare, sed mihi, meisq; studijs, quæ tuis benignissimis auspicijs fælicissimè prouehuntur, perge, vt assoles, fauendo prodesse, dum præpotentem Deum enixè precabor, vt te selectiorum studiorum candidatis, incolumem, fælicemque, diutissimè tueatur. Vale.

Illustriss. & Reuerendiss. D. Tuæ

Addictissimus Seruus

F. Bonauentura Caualerius.

PRÆFATIO.



Eminem profectò mathematicarum demonstrationum dulcedinem vel primoribus labris vix attigiſſe puto, qui (non ſecus ac, mellis in arbore latentis deguſtata paululum ſuauitate, innumera licet ferientibus certatim aculeis apium caterua deglutientem Vrſum agrè arcere poſſunt) ſummarum, quæ illas comitantur difficultatum copia crebris veluti ictibus obſiſtente repulſus, ad ſatietatem vſq; eadem vbiq; perfundi totis viribus non contendat. Talia tibi amice Lector, qui melleos hoſce fructus depaſcere conſueſti, cuiuſdam in Geometria rei admirandæ caſu in me orta ſpeculationis occaſione, parta, huiuſce dulcedinis amore flagranti, libanda propono. Cum ergo ſolidorum, quæ ex reuolutione circa axim oriuntur, geneſim aliquando meditarer, rationemq; gignentium planarum figurarum cum genitis ſolidis compararem, maximè ſanè admirabar quod à propriorum parentum conditione adeò nata figura degenerarent, vt aliam omninò ab eiſdem rationem ſequi viderentur. Cylindrus.n. exempli gratia, in eadem baſi, & circa eũdem axim, cum cono conſtitutus, eſt eiuſdem [a] triplus, cum tamen ex parallelogrammo trianguli dictum conum generantis [b] duplo per reuolutionem oriatur. Similiter ſi in eadem baſi, & circa eundem axim, hæmiſphæriũ, vel hæmiſphæroides, necnon conoides parabolicum, atq; cylindrus, extiterint, hic erit hæmiſphærij, vel hæmiſphæroidis [c] ſexquialter, conoidis verò [d] duplus, cum tamẽ gignens parallelogrammũ dictum cylindrum ad inſcriptũ gignẽtem circulum, ſeu ellipſim, proximè rationem habeat, quam [e] quatuordecim ad vndecĩ, ad parabolã verò ſit in ratione [f] ſexquialtera. Quinimmò & in planis figuris per reuolutionẽ rectarum linearum circa punctum genitis, quales ſunt circuli, eandem varietatem licet experiri. Si enim plures circuli cõcentrici intelligantur expoſiti radios

[a] 10. Duod. Elem.
[b] 41. Pri. Elem.
[c] Cor. 3. 34. l. 5.
[d] Cor. 3. 31. l. 4.
[e] Arch. de Dim. Circ.
[f] Prop. 19. l. 4.

haben-

habentes ex. g. in proportione numerorum ab vnitate deinceps expositorum, ipsi circuli non eandem radiorum proportionem conseruabunt, sed eam, quam eorum [g] quadrata inuicem habebunt. His verò perspectis cum ad planarum, ac solidarum figurarum quoq; grauitatum centra respicerem, similemque varietatem nactus essem, adhuc augebatur admiratio: in cono enim centrũ grauitatis [h] est in axe per quartam partem distans à basi, in triangulo verò ipsum gignente est in eodem axe, distans ab eadem per [i] tertiã partem eiusdem axis. Similiter in conoide parabolico illud est in axe per [k] tertiam partem distans à basi; in parabola verò ipsum generante per [l] duas tertias eiusdem axis remouetur ab ipsa basi. Cum ergo talem varietatem in plurimis alijs figuris sæpius, ac sæpè fuissem meditatus, vbi prius e. g. cylindrũ ex indefinitis numero parallelogrammis, conum verò in eadem basi, & circa eundem axim, cum cylindro constitutum, ex indefinitis numero triangulis per axem transeuntibus veluti compactum effingens, habita dictorum planorũ mutua ratione, illicò & ipsorum solidorum ab ipsis genitorum emergere rationem existimabam, cum iam planè constaret planorum rationi genitorum ab ijsdem solidorum rationem minimè concordare, figurarum mensuram tali ratione inquirentem oleum, & operam perdere, ac ex inanibus paleis trituram facturum esse, mihi iure censendum videbatur. Verum paulò profundius rem contemplatus in hanc tandẽ deueni sententiam, nempè ad rem nostram lineas, & plana, non ad inuicem coincidentia, sed æquidistantia assumenda esse; sic enim in plurimis ratione inuestigata reperij tum corporum proportioni ipsorum planorum, tum planorum proportioni ipsarum linearum proportionem (si eo modo sumantur, quo in lib. 2. explicatur) ad amussim in omnibus respondere. Cylindrum igitur, & conum, iam dictos non amplius per axem, sed æquidistanter basi ceu sectos contemplatus, eandem sanè rationem habere illa comperij, quæ lib. 2. voco omnia [n] plana cylindri ad omnia plana coni, [o] regula communi basi (nempè circulorum congeriem, quæ intra cylindrum, & conum, velati vestigia

g Cor. 1. 11. l. 3.
h Luc. Val. 39. l. 1.
i Idem 19. l. 1.
k Idem 41. l. 2.
l Arch. 8. Sec. æquep.
m Def. 1. & 2. l. 2.
n Def. 1. & 2. l. 2.
o Def. 1. & 2. l. 2.

gia

gla plani à basi ad oppositam basim continuò illi æquidistanter fluentis quodammodo relinqui intelliguntur) ei, quam habet cylindrus ad conum. Optimam ergo methodum figurarum scrutãda mensura indicaui prius linearum pro planis, & planorum pro solidis rationes indagare, vt illicò ipsarum figurarum mensurã mihi compararem, res, puto, iuxta vota successit, vt perlegenti patebit. Artificio autem tali vsus sum, quale ad propositas quæstiones absoluendas Algebratici adhibere solent; qui quidem numerorum radices, quamuis ineffabiles, surdas, ac ignotas, nihilominus simul aggregantes, subtrahentes, multiplicantes, ac diuidentes, dummodo propositæ rei exoptatam sibi notitiam enucleare valeãt, sua satis obijsse munera sibi persuadent. Non aliter ipse ergo indiuisibilium siue linearum, siue planorum congerie (ijsdem vt in lib. 2. explicatur assumptis) licet quoad eorundem numerum innominabili, surda, ac ignota, quoad magnitudinem tamen conspicuis limitibus clausa, ad continuorum inuestigandam mensuram vsus sum, vt legenti in processu operis apparebit. Propositum mihi est autem ò Geometra in his septem libris quamplurium tam planarum, quam solidarum figurarum dimensionem adinuenire, quarum aliqua etiam ab alijs, ac præcipuè ab Euclide, & Archimede pertractata fuerunt, reliqua verò nemini, quod sciam hucusq; attentata; vno tamen excepto Keplero, qui occasione Dolij Austriaci per virgam mensoriam dimetiendi, postquam in sua p Stereometria Archimedea summariè ipsius Archimedis adinuenta sibi opportuna recensuit, nouis aliquando, qualescumq; sint, adiectis rationibus, tandem eam partem superaddidit, quam Stereometriæ Archimedeæ supplementum nuncupauit, in qua multiplicem Sectionum conicarum, Circuli nempè, Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipsis, nec non earũdem portionum circa diuersos axes reuolutionem contemplatus, solida numero octuaginta septem, præter quinque Archimedea, Sphæram scilicet, Conoides parabolicũ, Conoides hyperbolicum, Sphæroides oblongũ, & prolatum Geometris perquam eleganti præconio promulgauit. Cum ergo iam expositam metien-

p Kepleri Stereometria Doliorum.

darum figurarum nouam, at, si dicere fas sit, valde compendiosam methodum adinuenissem, fæliciter mecum actum esse existimaui, vt hæc solida, præter illa Archimedea, mihi suppeditarentur, circa quæ illius vim ac energiam, experiri liceret. Ne quis tamen putet me omnium dictorum solidorum dimensionem fuisse consequutum, sicuti neq; Keplero contingere potuit, nisi paucorum, nec satis fæliciter, vt prædictam Stereometriam, ac supplementum perlegenti constare poterit: satis mihi fuit eorum aliqua certiori tamẽ, ni fallor ratione, inuestigare, quæ circiter numero plusquam viginti ennumerari poterunt, præcipuè si Archimedea in numero computentur, quinq; scilicet pro singulis quatuor Coni sectionibus, & amplius alia quadam inferius recensenda. Vel enim reuolutio fit circa axem dictarum sectionũ, & sic fiunt solida Archimedea, ex circulo nempè Sphæra, ex parabola Conoides parabolicum, ex hyperbola hyperbolicum, & ex ellipsi sphæroides oblongum, seu prolatum. Vel reuolutio fit circa parallelam axi, extra figuram, sed minimè eandem tangẽtem constitutam, & sic ex circulo fit [q] Anulus latus circularis, ex parabola [r] semianulus latus parabolicus, ex hyperbola [s] hyperbolicus (hos Keplerus tamquam montis Ætnæ cauitati similes Crateres vocat) & ex Ellipsi [t] Anulus latus ellipticus, quem idem Keplerus, velut serto rusticarum puellarum similem, Anulum arduum appellat. Vel reuolutio fit circa parallelam axi, ac figuram tangentem, & tunc ex circulo fit Anulus [u] strictus circularis, ex parabola [x] semianulus strictus parabolicus, ex hyperbola [y] hyperbolicus, & tandem ex ellipsi, qui pariter Anulus strictus [z] ellipticus nuncupatur. Denique reuolutione facta circa parallelam axi, secantemq; figuram in duas portiones inæquales, ex circuli portione maiori fit Malum roseum, ex minori Malum citrium. In ellipsi verò ex maiori Malum [a] cotoneũ, & ex minori fit [b] Oliua Ex parabolæ portione maiori fit [c] Aceruus maior parabolicus, ex minori [d] Aceruus minor: Ex hyperbolæ portione maiori fit Aceruus maior [e] hyperbolicus, ex minori Aceruus [f] minor. Hos autem Aceruos minores parabolicos, & hyperbolicos, idem

q Cor. 14. 34. l. 3.
r Cor. 12. 31. l. 4.
s Cor. 16. 30. l. 5.
t Cor. 14. 34. l. 3.
u Cor. 13. 34. l. 3.
x Cor. 10. 31. l. 4.
y Cor. 15. 30. l. 5.
z Cor. 13. 34. l. 3.
a Cor. 19. 34. l. 3.
b Cor. 20. & 22. 34. l. 2.
c Cor. 21. 31. l. 4.
d Cor. 24. 31. l. 4.
e Parabolicis conformiter.
f Parabolicis conformiter.

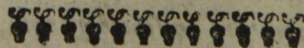
Keple-

Keplerus cornibus rectis similes existimat, quorum alia sunt acuta, & alia obtusa, vt in pecudibus, quando primum, inquit, cornibus coniscunt. Hæc verò sunt solida numero viginti, quibus etiam Anulus strictus [g] *ellipticus altera parte latior, & Anulus latus ellipticus altera parte* [h] *strictior, addi possunt, quę Keplerus Tiara, seu Globo Turcico similem putat, necnon ea solida, quæ ex sectionibus* [i] *oppositis oriuntur, seu præfata videntur concomitantia. Hæc inquam sunt, quæ ex ennumeratis ab ipso excerpsimus examinanda, à quo præter aliqua nomina nihil aliud à nobis desumptum est, vt inspicienti manifestum erit. Sciat verò lector nos præter dicta solida alia pariter quamplurima, quæ non sunt ex grege superius ennumeratorum, etiam contemplari. Præ cæteris autem maximam huiusce demonstrandi methodi vniuersalitatem non reticebo, quod enim alij de vna, vel saltem paucis solidorum speciebus, nos de infinitis continuò demonstramus, nedum .n. hic e. g. ostenditur* [k] *cylindrũ coni, vel* [l] *prisma pyramidis, in eadem basi, & altitudine cum eo existentis, triplũ esse, sed quacumq; in basi variatione facta, quæ nullo assignato numero coarctatur, solidum eidem insistens, quod* [m] *cylindricum vocamus, esse* [n] *triplum eius, quod in eadem basi, & altitudine cum eo constitutum,* [o] *conicum appellamus; quorum quidem solidorum species numero indefinitas esse manifestò apparet: Ex hoc autem vnico exemplo, tamquam ex vngue Leonem, dignoscet studiosus, quanto geometricus ager per hæc fertilior, & amplior fiat, hanc vniuersalitatẽ namq; circa omnia penè solida à nobis hic considerata iugiter prosequemur. In primo igitur, & secũdo Libro, vt plurimum lemmata proponuntur, quæ ad sequentium librorum doctrinam capiendam necessaria videntur, licet in eisdem plurima quoque sint sui gratia simpliciter demonstrata: In 3. 4. & 5. Lib. solida examinantur, quæ ex conicis sectionibus suam genesim agnoscũt. In 6. agitur de spatijs helicis, ac solidis ab eisdem genitis, problemataq; circa præ demonstrata construuntur. In septimo deniq; Lib. nostram infinitatis indiuisibilium Oceanum emensam ratem, alia instituta me-*

g Cor. 28. 54. l. 5.
h Cor. 29. 54. l. 5.
i Cor. 21. 30. l. 5.
k 10 Duod Elem.
l Corol 7. Duod Elé.
m Def. 5. l. 1.
n Sect. 9. Cor. 4. 34. l. 2
o Def. 4 l. 1.

thodo, in portum deducimus, vt in illius infinitatis scopulis periclitandi omnis tandem tollatur ambiguitas. Scio tamen hæc prima fronte leuiter perpendentibus, quippe quæ per iamdiù tritam Geometriæ semitam haud fuerint inquisita, minus esse probanda; at qui nauseantis stomaci tumentes flatus initio supprimentes ad extremam huius doctrinæ metam peruenire haud dedignabuntur, fortè super hac minimè amplius nauseabunt: Ne quis igitur hanc rogo methodum prius damnare velit, quam hæc omnia puro mentis oculo, sincereq; illius affectu fuerit perlustratus, hic enim tali ratione demonstrata cum aliorum inuentis ad vnguem concordare iugiter animaduertet. Nemo autem hæc aggrediatur, qui sex saltem priores Libros, & vndecimũ Elementorũ non calluerit, quod si in Apollonij, & Archimedis Operibus Lector pariter versatus fuerit, facilius hæc apprahendet, sin minus, quædam pauca, quæ ab ipsis desumpta fuere, poterit supponere. Qui verò viderit P Com. de Motu Martis præfati Kepleri per has nostras speculationes planè intelliget, quam facilè in dimensione plani ellipsis potuerit ipse hallucinari, dum omnium distantiarum Planetæ à Sole, per ellipticam lineam circumuoluti, mensuram putat æquipollere plani ellipsis mẽsuræ (quod est quoddam simile errori, in quem initio præsentis speculationis & ipse lapsus eram, putans coincidentia lineas, vel plana, proportionem planorum, seu solidorum, eandem conseruare) licet postmodum & ipse errorem proprium detegat, & quoquomodo possit illum emendare contendat. His igitur ritè consideratis, neminem fore existimo, qui hanc nouam methodum duxerit aspernendam, quin potius eandem veluti auream clauem, qua summa arcis Geometriæ nonnullas hucusq; occlusas fores reserantes, summis pulcherrimarum speculationum thesauris ditissimi fieri valeamus, albo adiecto calculo, postmodum fortè satius comprobabit.

P Kepleri Cõ. de motu Martis.



In

In huius Libri Auctorem.

EXerit ecce nouos sapiens CAVALERIVS ausus
Archimedæa deficiente manu:
Nempè geometricas ex vmbris eruit artes,
Queis metiare salum, queis metiare solum.
Egregium mirata VIRI decus, Ars stupet, indè
Sit ait, ergo meas exuperabis opes?

Anonymus.

In Librum Geometriæ.

DVm noua peruolcuis CAVALERI schemata, deque
Arte Geometrica prima trophæa refers;
Applaudit dignis tibi Felsina laudibus, & quem
Suspicit ingenio, voce per astra vehit.
Hinc Archimedis sileant monumenta, reuixit
Ecce Syracusij qui premit acta senis.

Co. Fran. Carolus Caprara Coll. Nob. Alum.

Ad Libri Auctorem.

VEra Geometriæ rectè documenta recludis,
Quæ minus antiquis emicuere viris.
Sufficis illius noua schemata scilicet artis,
Percipis vndè decus tu quoquè in orbe nouum.
Emensa spatium terræ dumque exprimis; indè
Arripis immensi limina summa Poli.

Petrus Fran. Coruinus Coll. Nob. Alum.

Ad Librum Geometriæ.

OPtima si cupias cognoscere schemata Lector,
Firma Geometrici percipe iura libri.
Aequoris, atquè soli disces spatiâ alma metiri,
Ingenij miros arripiesquè modos.
Felsina plaudit ouans, tantoquè superba triumpho,
Gaudia non vnquam deperitura ciet.

Co. Fran. Carolus Caprara Coll.Nob. Alum.

De

De Libro Geometriæ.

Exprimit egregiam nobis CAVALERIVS, artem
Ingenioquè refert abdita sensa nouo.
Huic veterum penitus cedunt monumenta virorum,
Vt longè meritis inferiora suis.

Co. Marcus Antonius Herculanus Coll. Nob. Alum.

De Libro Geometriæ.

Plena Geometricis sunt hæc monumenta figuris,
Quæ BONAVENTVRAE condidit alma manus.
Ingenij vires, & suspice mentis acumen,
Quod meritò æternum concelebrare licet,
Sola latere nequit VIRTVS: hæc sidera tranat,
Imaquè despiciens limina, summa petit.

Marcus à Cartis Coll. Nob. Alum.

Ad Auctorem Libri Geometriæ.

Iam noua lux splendet, iam splendor præ itet omnis,
Arte Geometrica, dum noua iura refers.
Lux fuit Archytas, lux Archimedis opusquè,
Lux ea sed tenebris consociata fuit;
Lux tua pellucet nulla caligine pressa,
Instar Apollinei sideris instar adest.

Petrus Fran. Coruinus Coll. Nob. Alum.



Pa-

NOs Frater Iacobus Scholarius Venetus, Congregationis Iesuatorum Vicarius Generalis Apostolicus, Opus, cui titulus est, *Geometria*, à nostro in Christo Filio R. P. Bonauentura Caualerio, Mathematicarum in Almo Bononiēsi Gymnasio publico Professore, ac Congregationis nostræ Sacerdote, elaboratum, vt typis excudi possit, seruatis seruandis, facultatem per præsentes concedimus. Dat. Ferrariæ, in Conuentu S. Hieronymi Die prima Nouembris 1632.

EGo F. Constātinus Bucius Ordinis Iesuatorum S. Hieronymi iussu Reuerendiss. Patris Vic. Generalis perlegi Opus de *Geometria* Ad. R. P. Bonauenturæ Caualerij eiusdem Ordinis, in quo nihil Chatolicæ fidei, aut bonis moribus aduersatur.

DOn Octauianus Finatius Cler. Regul. S. Pauli, & Sacræ Bonon. Pœnit. Rector pro Eminentiss. ac Reuerendiss. D. D. Card. Arch.

Imprimatur.

FR. Hieronymus Onuphrius Doctor Collegiatus, Lector publicus, & Sanctiss. Inquisitionis Consultor, pro Reuerendiss. P. M. Paulo de Garrexio Inquisit. Bonon.

In Primo Libro.

Pag.	lin.	*Errata*	*sic corrigito.*
3	18	eidem	eisdem
9	14	D. Sectio IV.	D. IV.
10	3	quibusdam sint	quibusdam parallelis sint
13	10	diuidentes	diuidentia
16	24	igitur	inquam
20	15	eorum	earum
20	17	eorum	earum
23	18	respectu espectu	respectu
23			*Vide dicta Lib. 7. Annot. prop. 3.*
24	16	Propos. IV.	Propos. V.
24	17	basis	circuitus
32	30	AP.	AZ.
40	19	figuram, AT, productam,	planum, AT, productum,
40	30	figuras, AT, FN, productas	figurarū, AT, FN, productarū plana
41	20	est vertex	est vnicus vertex
41	24	esse verticem	esse vnicū verticem
42	7	tangit	tangit, vel secat
42	8	vertex	vnicus vertex
45			*In fig pone litterā F.*
48	35	quæ	dictæ
51	26	qui in	quod in
52	13	quo vti	quo vsi
53	22	eiusdem	cuiusdam
64	18		*Vide dicta Lib. 7. Annot prop. 3.*
76	29	similes	similia
78	26		*Vide dicta Lib. 7. Annot. prop. 3.*
79	19	secans	secante
84	1	Theoremata	Theorema
122	11	extremo	extrema

In

In Secundo Libro.

4	8	hes incidentes	hanc incidentem
7	14	descripta	descriptæ
9	13	quarum	quorum
12	23	altera	alteram
19	20	eorum	earum
20	15	eorum	earum
20	17	eorum	earum
21	6	perventi fuerimus	peruenerimus
40	25	Π ℞ &	Ω ℞ &
46	10	SY, &	SY, βΔ, &
			Corrige nu pag præd.
54	6	habentes	habentia
79	15		*Vide dicta Lib. 7. (Annot. prop. 8.)*
82			*In fig. duc lineam, CB, & pone, X,*
100	12	$\frac{1}{4}$. FS,	$\frac{1}{2}$. FS,

In Tertio Libro.

19	19	vt quadratum axis	vt quad. dimidij ax.
20			*Vide dicta Lib. 7. Annot. prop. 21.*
27	22		*Vide ibidem dicta*
44	31	cum $\frac{2}{4}$. quadrati	cum $\frac{1}{4}$. quadrati
62	8	ΔMI,	ΓMI,
64			*Pone antecedentis Prop. figuram.*
111	6	volui bis	volui

In Quarto Libro.

37	11	OF,	OR,
54	23	BDC,	BDE,
68	28	ZC,	ZG,
68	30	Z℗Q,	Z℗G,
69	10	RF,	PF,
69	11	RTF,	PTF,

In Quinto Libro.

6	3	vsque ad curuam hyperbolicā, cui	vsq; ad latera parallelogrāmi, quibus
7	27	ex, MX, &, ON, & $\frac{1}{1}\frac{3}{1}\frac{2}{1}$. NE,	ex, NX, &, ON, & $\frac{2}{5}$. NE,
16	17	anteced.	prop. 7.
16			*Pone in fig. li'e XR,*
19	28		*Dele hæc verba (iūcta ipsa, OX,)*
31	27	prop. 44.	prop. 33.
42			*Excitate, EC, hinc inde vsq; ad asymptotos, ponendo in occursu litteras, S, I.*

In Sexto Libro.

6	9	DED,	DEC,
10	28	superabant	superabunt
11	7	sector	sectore
12			*In fig. pone, E, vbi, F,*
20	21	63.	B3.
27	19	MI,	MH,
27	33	OR,	O℞,
30	5	parabola	parabolæ
30	12	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{4}$
34	2	LZf,	LZφ
34	3	IΩZ,	IΩb℗,
35	4	GB,	CB,
35	12	LVB,	LV6,
37	10	portiones	portione
42	6	CDFB,	MNLK,
63			*In figura duc, MN,*

In Septimo Libro.

9	19	dicatur	dicantur
11	9	FRH,	FOH,
13	6	altitudines	altitudinis
14	8	6Z,	BZ,
23	14	BI℞KΓΔ,	BY℞KΓΔ,
29	26	cylindricas	cylindricos
30	23	sit	sint
32	8	sunt bases	sunt vt bases
32	27	hæc similiter secta	hæ similiter sectæ
37	29	HX,	FX,
43	32	dictam	dictum
47	21	latera	latere
48	24	dictam	dictum
49	30	comstare	constare
50	24	AC, PS,	ac, PS,
51	10	RC,	HC, vt, RS,
52	26	solidam	solidum
53	11	effecerint	effecerit
54	6		*dele verba*, vel, HC,
56	15	HI,	HC,
57	9	Cor. pm	Cor. primum
70	18	HN,	HM,
76	6	vt quadratum	vel quadratum

GEOMETRIÆ CAVALERII
LIBER PRIMVS.

In quo præcipuè de ſectionibus Cylindricorum, & Conicorum, necnon ſimilibus figuris, quædam elementaria præmittuntur; ac aliquæ Propoſitiones lemmaticæ pro ſequentibus Libris oſtenduntur.

DEFINITIONES.

A. I.

A



VM duæ rectæ lineæ inuicem parallelæ aliquam tetigerint figuram planam, cum illis in eodem plano conſtitutam, vnumquodq; punctum contactus illius vertex dicatur, & oppoſiti vertices puncta contactuum vtriuſque dictarum tangentium parallelarum ſimul comparata; quilibet autem vertices ſemper intelligentur aſſumpti reſpectu cuiuſ-

iuſcunque rectæ lineæ dictis tangentibus æquidiſtantis, quæ infra regula appellatur.

B B.

LIneæ tangentes dicantur, oppoſitæ tangentes eiuſdem figuræ reſpectu cuiuſcumque rectæ lineæ eiſdem tangentibus æquidiſtanter ductæ.

C C.

CVm earum vnius contactus fuerit in linea, tunc linea contactus vocabitur baſis eiuſdem figuræ, reſpectu cuius poterunt dici vertices puncta contactuum alterius tangentis, vel ſi illius contactus pariter ſit in linea, ambæ lineæ contactus, oppoſitæ baſes, ſumptæ reſpectu cuiuſcumq; lineæ, cui ſint æquidiſtantes.

A A. II.

CVm plana inuicem parallela tetigerint aliquod ſolidum, vnumquodq; punctum contactus illius vertex dicatur; & oppoſiti vertices puncta contactuum vtriuſque dictorum tangentium planorum ſimul comparata: quilibet autem vertices ſemper intelligantur aſſumpti reſpectu cuiuſcumq; plani dictis tangentibus æquidiſtantis, quod infra regula pariter appellatur.

B B.

IPſa tangentia plana dicantur, oppoſita tangentia plana eiuſdem ſolidi, reſpectu dicti plani tangentibus æquidiſtantis aſſumpta.

Cum

C. C

CVm dictorum tangentium contactus fuerit in plano, tunc vtriusuis tangentium planorum plana contactus bases dicatur, cuius respectu puncta contactus reliqui tangentis plani poterunt vertices appellari, & vtriusq; tangentium planorum contactus plana dicentur, oppositæ bases, cum verò vtriusque contactus fuerit in linea, oppositæ bases lineares ipsæ lineæ contactus vocabuntur.

D. D

CVm figuræ planæ oppositis tangentibus vtcumq; ductis, & solidę oppositis planis tangentibus, inciderit perpendiculariter recta linea in eadem tangentia terminata, dicetur hæc altitudo propositæ figuræ planæ, vel solidæ, respectu dictorum tangẽtium, vel cuiuscumque eidem æquidistantis, assumpta.

E. E

REgula appellabitur in planis recta linea, cui quædam lineæ ducuntur æquidistantes, & in solidis, planum, cui quædam plana ducuntur æquidistantia, qualis in superioribus est recta linea, vel planum, cuius respectu sumuntur vertices, vel opposita tangentia, cui vel vtraq;, vel alterum tangentium æquidistat.

SCHOLIVM.

HÆc minimè discrepant ab his, quæ in Euclide, Archimede, & Apollonio, circa vertices, bases, altitudines, & tangentia,

 siue

siue lineas, siue plana, assumuntur; cum, licet vniuersalius, idem, quod ipsi, declarent, vt ijs, qui in supradictorum auctorum operibus versati sunt innotescet facilè, vnde sine scrupulo assumemus aliquando ex dictis auctoribus, quæ ex consimilibus definitionibus pendent, illis commiscentes, prout opus fuerit, quæ ex his deducuntur.

III.

EXposita quacumque figura plana, & in eiusdem ambitu sumpto vtcumque puncto, ab eoque ad alteram eiusdem partium ducta quadam recta linea terminata, & super planum propositæ figuræ eleuata, si hæc per ambitum talis figuræ semper æquidistanter cuidam rectæ lineæ moueri intelligatur, donec omnem percurrerit ambitum, alterũ eiusdem extremũ punctum, quod non fertur per ambitum propositæ figuræ, describet circuitum planæ figuræ ipsi propositæ æquidistantis, vt probabitur. Solidum ergo, quod 6. huius comprænditur vtrisq; figuris iam dictis, & superficie linea, quæ reuoluitur, descripta, dicetur: Cylindricus; superficies in reuolutione descripta, necnon quodlibet illius frustum, superficies cylindracea: Cylindrici oppositæ bases dictæ figuræ planæ inter se æquidistantes; latus autem cylindrici, quæuis recta in superficie cylindracea oppositas bases pertingens, cui congruit in reuolutione ipsa linea reuoluta; & tandem; regula lateris cylindrici dicetur illa, cui reuoluta semper manet æquidistans.

A. IV. A

EXposita plana quacumq; figura, extra cuius planũ ad vtramuis eiusdem partium quodcumque sit assumptum punctum, si ab eo ad quoduis punctũ illius ambitus recta linea ducatur, quæ indefinitè quoq; sit producta, & hæc per eiusdem ambitũ moueatur donec ipsum totũ percurrerit ambitum; sumptum punctum erit vertex solidi, quod comprætenditur superficie descripta à linea, quæ reuoluitur inter ambitum propositæ figuræ, & sumptum punctum clausa, vertex, inquam sumptus respectu propositæ figuræ, vt probabitur. 15. huius.
Tale solidum autem dicatur; Conicus, cuius basis, proposita figura, & vertex dictum punctum; superficies descripta linea, quę reuoluitur, & iacet inter ambitum propositæ figuræ, & dictum punctum, & quodlibet illius frustum dicatur; superficies Conicularis: illæ verò rectæ lineæ, quæ in eadem reperiuntur, quibus congruit reuoluta inter verticem, & ambitum basis conclusa, vocentur, latera eiusdem Conici.

COROLLARIVM.

EX hac, & antecedenti definitione, patet cylindrum esse cylindricum, & conum esse conicum, eos scilicet, qui ab Apollonio, & Sereno, definiuntur.

B. B

CYlindrici recti dicentur, cum eorum latera fuerint ad rectos angulos basibus, scaleni verò, cum non fuerint ad rectos angulos eis-

eiſdem: Conicorum verò, & cylindricorum fruſta vocabuntur, quæ per plana baſibus parallela (pro conicis verſus ipſas baſes) ab ijſdem abſcinduntur.

V.

AXis, diameter, figuræ planæ, vel ſolidæ, ordinatim applicatæ ad eaſdem, lineæ, iuxta quas poſſunt, &c. nomina ſectionum coni eorũ latera recta, ſeu tranſuerſa, ſumãtur, prout ab Apollonio definiuntur, hoc tantum animaduerſo, me in ſequentibus aliquando abuti eiſdem nominibus ſectionum coni, Parabolæ .ſ. Hyperbolæ, Ellipſis, & oppoſitarum ſectionum, ſpatia videlicet intelligens ſub illis, & earum baſibus, compræhenſa, quod ex modo loquendi tunc euidenter cognoſcitur. Cætera deniq; Apollonij, & quæ ab Archimede circa Sphæroides, & Conoides, definiuntur, niſi alia afferatur à me definitio, ſumantur, prout ab ipſis vſurpantur.

VI.

FIguram planam circa diametrũ, vocat Apollonius 1. Conicorum, cum in ea ductis quotuis lineis cuidam æquidiſtantibus, omnes bifariam à quadam recta linea diuiduntur, quam vocat diametrum, ſi eas obliquè ſecet, & axem, ſi eas rectè diuidat, & ipſam figuram circa diametrum, vel axem.

Si ergo figura circa axem, reuoluatur circa eundem donec redeat, vnde diſceſſit, deſcripta in tali reuolutione ab eadem ſolida figura dicatur:

ſo-

ſolidum rotundum, eiuſdem verò axis, circa quem fit reuolutio.

VII.

SImiles Cylindrici, & Conici dicãtur, quorum baſes ſunt ſimiles (iuxta definitionem 10. ſimiliũ figurarum infra poſitam, ſubintellige, vel iuxta aliorum definitiones, quas cum prædicta concordare infra oſtendemus) in quibus ſumptis duabus homologis lineis, vel lateribus vtcumque, & per ipſas, & latera extenſis planis ipſa ad eandem partem æquè ad baſes inclinantur, horumq; conceptæ in eiſdem figuræ ſunt ſimiles, nempè ſimilia parallelogramma in cylindricis, & ſimilia triangula in conicis, quorum homologa latera ſint ſumptæ in baſibus homologæ.

VIII.

SImiles ſphæroides dicentur, quæ ex ſimilium ellipſium reuolutione oriuntur.

IX.

SImiles portiones ſphærarum, vel ſpæroidum, & ſimiles Conoides, ſiue Conoidũ portiones appellabimus, quando per axes ductis planis ad rectos angulos baſibus conceptæ in eiſdem ſolidis figuræ ſimiles erunt (iuxta definit. 10. ſubſequentem, vel etiam iuxta aliorum definitiones de ſimilibus figuris planis allatas, ſubintellige) quarum, & baſium communes ſectiones ſint homologæ baſium diametri, quæ vel circuli ſint, vel ſimiles ellipſes.

SCHOLIVM.

CÆtera definitiones ab Euclide similium planarum figurarum, & solidarum, & similium Cylindrorum, & Conorum, & quæ ab Apollonio lib. 6 Conicorum, referente Eutocio, fiunt similium sectionum Coni portionum, sumantur, vt ab ipsis afferuntur, adiuncto tamen definitioni similium sectionum Coni portionum ibidem ab Apollonio allatæ, si pro spatijs vsurpetur, quod infra dicetur.

A

A. X.

SImiles figuræ planæ in vniuersum vocentur, in quarum singulis oppositæ tangentes ita duci possunt, & in easdem tangentes ita incidere ad eundem angulum, ex eadem parte, rectæ lineæ in illis terminatæ, vt, si intra dictas oppositas tangentes eisdem æquidistantes vtcumq; ductæ fuerint rectæ lineæ, eas, quæ incidunt dictis tangentibus, similiter ad eandem partem secantes; reperiamus harum parallelarum, necnon & oppositarum tangentium eas portiones, quæ inter dictas incidentes, & circuitus figurarũ ad eandem partem sitæ sunt, eodem ordine sumptas, eandem inter se rationem habere, quam rectæ lineæ, quæ dictis tangentibus inciderunt, & in easdem terminantur.

B

B.

IPsæ autem, quæ dictis tangentibus incidunt, & in eas terminantur, dicentur; Incidentes dictarum tangentium oppositarum, & figurarum.

Quæ

C. C

QVæ verò dictis tangentibus oppositis æquidistant, & diuidunt productæ, si opus sit, similiter ad eãdem partem ipsas incidentes, necnon oppositarum tangentium portiones, quæ in similibus figuris iam dictis reperiuntur, vocentur; homologæ earumdem, sumptæ regula qualibet earum; dicantur autem lineæ homologæ, quæ sunt intra ambitum similium figurarum, quæ verò in ambitu, latera homologa. Ipsæ verò tangentes etiam, tangentes earumdem homologarum.

D. SECTIO IV. D

CVm verò duæ similes figuræ planæ in eodem plano, vel in planis æquidistantibus ita positæ fuerint, vt earum, & oppositarum tangentium, quæ sunt regulæ homologarum earumdem, incidentes vel sint superpositæ, vel sibi inuicem æquidistent, homologis earumdem figurarum, & homologis partibus ipsarum incidentium, ad eandem partem constitutis, ipsæ figuræ similes dicantur etiam, inter se similiter positæ; siue à suis lineis, vel lateribus homologis, similiter descriptæ.

E. E

SI verò fuerint quotcumq;, & qualescumq; figuræ planæ in eodem plano vtcumq; dispositæ; fuerint autem aliæ tot numero figuræ in

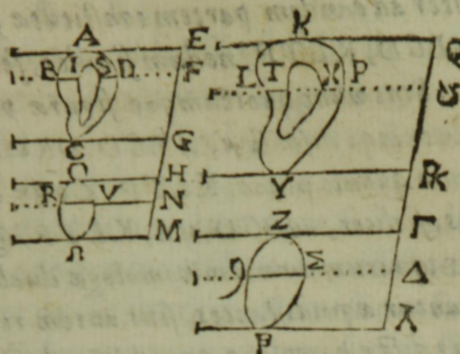
quouis plano, cum prædictis ita se habentes, vt binæ sint similes, & earum omnium lineæ homologæ duabus quibusdam sint æquidistantes: ductis verò oppositis tangentibus singularum similium figurarum, quæ sint parallelæ illis duabus, quibus homologæ earumdem æquidistant, & repertis incidẽtibus duarum ex dictis similibus figuris, & earum tangentium, illæ productæ fuerint vsq; ad extremas tãgentes, reperiamus autem easdem à tangentibus similium figurarum similiter ad eandem partem diuidi, quarum portiones inter oppositas tangentes similium figurarum iacẽtes sint earundem oppositarum tangentium, & similium figurarum incidentes. Tales figuræ dicentur binæ similes, & similiter inter se positæ primò dictæ, ac secundò dictæ, & earum, ac extremarum tangentium etiam dicentur incidentes, quæ in tangentium extremas terminantur.

APPENDIX PRIOR
Pro explicatione Definit. 10. antecedentis.

Sint duæ figuræ planæ, ABCD, KLYP, in quibus supponantur ductæ oppositæ tangentes, AE, CG, B. Def. 1. *in figura, ABCD, &, KQ, YR, in fig. KLYP, quibus incidant duæ rectæ lineæ, EG, QR, ad eundem angulum ex eadem parte, siue secent figuras, siue non, ductis autem vtcumq; dictis tangẽtibus parallelis, BF, L&, quæ in punctis, F, &, diuidant similiter ad eandem*

dem

dem partẽ ipsas, EG, Q℞, & circuitus figurarum in punctis, B, I, S, D; L, T, X, P; reperiamus, DF, ad P & esse vt, EG, ad, Q℞, & ita esse, SF, ad X & IF,



ad, T &, BF, ad, L &, ita nempè, vt, quæ sunt ad eandem partem ipsarum, EG, Q℞, eodem ordine sumptæ, sint, vt ipsæ, EG, Q℞, sic etiam tangentes, AE, KQ, CG, Y℞, sint vt, EG, Q℞, & sic cæteræ consimiliter sumptæ, tunc voco figuras, ABCD, KLYP, similes, A. Def. 10

& ipsas, EG, Q℞, incidentes similium figurarum, AB B. Def. 10.
CD, KLYP, & oppositarum tangentium, AE, CG, KQ, Y℞; ipsas, BI, SD, LT, XP, quæ clauduntur perimetris figurarum, & diuidũt productæ, si opus sit, ipsas, EG, Q℞, similiter ad eandem partem, voco, homologas earumdem figurarum, quarum dictæ oppositæ C. Def. 10.
tangentes dicuntur tangentes, siue regulæ.

Cum verò figuræ, ABCD, KLYP, fuerint in eodem plano, vel in planis æquidistantibus, ita constitutæ, vt ipsæ incidentes, EG, Q℞, sint vel superpositæ ad inuicem, vel parallelæ, & homologæ, BI, SD, LT, XP, ad eandem partem ipsarum, EG, Q℞, & partes homologæ incidentium (per dictas homologas, productas, si opus sit, similiter ad eandem partem diuisarum) fuerint pa-

riter ad eandem partem constitutæ, tunc voco figuras,
D.Def.10 ABCD, KLYP, nedum similes, sed et similiter positas.

Sint nunc quotcumque figuræ planæ in eodem plano vtcumq; dispositæ, ABCD, ORΩV, & aliæ tot numero in quouis plano KLYP, Z9βΣ, quæ binæ sint similes, scilicet, ABCD, ipsi, KLYP, &, ORΩV, ipsi, Z9
C.Def.10. βΣ, quarum omnium homologæ duabus quibusdam reperiantur æquidistantes, sint autem respectu ipsarum, quibus dictæ homologæ æquidistāt, ductæ in figuris, ABCD,
B,Def.1. KLYP, oppositæ tangentes, AE, CG, KQ, YR, & in figuris, ORΩV, Z9βΣ, oppositæ tangentes, OH, ΩM, ZΓ, βΛ, quæ tangentes erunt regulæ homologarum simi-
B.Def.10. lium figurarum iam dictarum; Sint deinde incidentes duarum ex dictis similibus figuris vtcūq;, vt ipsarum, ABCD, KLYP, & oppositarum tangentium, AE, CG, ipsæ, EG, QR, quæ producātur vsq; ad extremas tangentes, ΩM, βΛ, quibus incidant in punctis, M, Λ, reperiamus autem integras, EM, QΛ, similiter ad eādem partem secari tum à tangentibus, CG, YR, tum ab, OH, ZΓ, & insuper portiones, HM, ΓΛ, esse etiam incidentes oppositarum tangentiū, OH, ΩM, ZΓ, βΛ, & similium figurarum, ORΩV, Z9βΣ, veluti ipsæ, EG, QR, sunt incidentes oppositarum tangentiū, AE, CG, KQ, YR, & similium figurarum, ABCD, KLYP. Tunc igitur has figuras voco binas similes, & vnas, scilicet ipsas, ABCD, ORΩV, similiter, ac alias inter se dispositas, idest vt ipsæ, KLYP, Z9βΣ, & earum, ac extremarum tangentium, AE, ΩM, KQ, βΛ, ipsas, EM, QΛ, voco etiam incidentes.

A. XI.

SImiles figuræ ſolidæ, vel ſimilia ſolida, in vniuerſum vocentur, in quorum ſingulis oppoſita plana tangentia ita duci poſſunt, & in eadem ita incidere ad eũdem angulum ex eadem parte duo plana in ijſdem terminata, vt ſi deinde inter eadem plana tangentia eiſdem æquidiſtantia vtcumque plana ducta fuerint, altitudines ſolidorum, reſpectu dictorum tangentium ſumptas, D. Def 2. ſimiliter ad eandem partem diuidentes, reperiamus figuras ex his planis in dictis ſolidis cõceptas eſſe ſimiles, vel ſi plures producantur, tot numero in vno, quot in alio ſolido produci, quæ ſint bi- A. Def. 10. næ ſimiles, & quæ ſunt vnius ſolidi ſimiliter inter E. Def. 10. ſe diſpoſitæ, ac quæ ſunt alterius, & omnium homologas duabus quibuſdam rectis lineis communiter, tamquam earumdem regulis, æquidiſtare (ſic .n. earum homologæ cum quibuſuis alijs duabus regulis angulos æquales cum prędictis facientibus, vt infra Prop. 23. huius oſtendetur, etiam haberi poterunt) Vnde ſi regulæ homologarũ accipiantur cum incidentibus planis concurrentes, & conceptarum in ſolidis ſimilium figurarum ductæ in ſingulis oppoſitæ tangentes pręfatis regulis parallelæ, producantur, ſi opus ſit, quouſq; prędictis incidentibus planis occurrant, & binarũ quarumcumq; oppoſitarum tangentiũ puncta occurſuum iungantur rectis lineis, etiam has iungentes reperiamus ſingulas eſſe incidentes ſuarum ſimi-

lium

lium figurarum, & oppoſitarum tangentium, ac omnes dictas incidentes concipi in figuris ſimilibus, quarum & ipſæ incidentes ſint homologæ, & omnium regulæ communes ſectiones planorum incidentium, & oppoſitorum planorum tangentium. Has omnes, inquam, conditiones ſimilia ſolida in vniuerſum habere ſuppono.

B

B.

IPſæ autem figuræ planæ ſimiles, quæ capiunt omnes dictas incidentes, vocentur. Figuræ incidentes dictorum ſimilium ſolidorum, & oppoſitorum tangentium iam ductorum.

C

C.

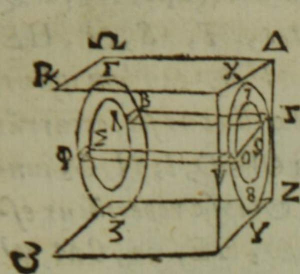
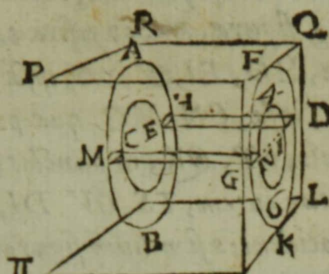
D Def. 2. FIguræ verò ex planis dictis tangentibus parallelis in eiſdem ſolidis cóceptæ, quotcumque ſint, altitudines eorumdem reſpectu dictorum tangentium ſumptas ſimiliter ad eandem

A. E. Def. 10. partem diuidentes, quæ ſimiles eſſe reperiuntur, ſiue binæ ſimiles, & vnæ, ac aliæ ſimiliter inter ſe diſpoſitæ, vocentur: Figuræ homologæ dictorum ſimilium ſolidorum, ſumptæ regula vna ipſarum, vel oppoſitorum tangentium, quæ homologarum figurarum plana tangentia, ſi libeat, ēt vocentur.

APPENDIX POSTERIOR

Pro declaratione Definit. 11.

B. Def. 2. *SInt ſolida, ΓϐƷΦ, AHBM, quorum ſint oppoſita tangentia plana, Δ℞, Z&, ſolidi, ΓϐƷΦ, &, QP, LΠ, ſolidi, AHBM, ſint autem alia duo plana,*

na, quæ istis incidant ad eundem angulum ex eadem parte, ΔΥ, QK, illa nempè quorum, & dictorum tangentium sint communes sectiones, ΔX, ZΥ, QF, LK, secentur nunc dicta solida planis tangentibus parallelis, quæ diuidant eorum altitudines, respectu ductorum tangentium sumptas similiter ad eandem partem: Sint autem eorum in dictis solidis conceptæ figuræ planæ similes, si vna in vnoquoq; solido figura producatur, vel si plures, binæ similes, & similiter inter se dispositæ, quæ fiunt in vno, ac quæ fiunt in alio solido, ex.g. ipsæ, βΛ, ΣΦ, HE, CM, quæ sint binæ similes, idest, βΛ, ipsi, HE, &, ΣΦ, ipsi, CM, &, βλ, ΣΦ similiter inter se dispositæ, ac ipsæ, HE, CM, quarum similium figurarum homologæ duabus quibuscumq; regulis, vt ipsis, ℞Ω, PR, æquidistent; vel si hæ non sint cum planis, ΔΥ, QK, concurrentes, alias, ΩΔ, RQ, cum prædictis angulos æquales continentes, ℞ΩΔ, PRQ, pro regulis homologarum accipiemus, hoc n fieri posse demonstrabitur in Prop. 23. huius, quæ erunt cum planis, ΔΥ, QK, concurrentes. Si ergo ducãtur prædictarum similium figurarum, βλ, HE,

D. Def. 2.

A. E. def. 10.

ΣΦ,

ΣΦ, CM, oppositæ tangentes, parallelæ regulis, ΩΔ, RQ, ex. g. figuræ, βΛ, oppositæ tangentes, βT, ΛS, & , HE, ipsæ, HD, EI, &, ΣΦ, ipsæ, ΣO, ΦV, & tandem ipsius, CM, ipsæ, CN, MG, quæ productæ, si opus sit, occurrãt planis, ΔΥ, QK, in punctis, T, S; OV; D, I; N, G; iungantur autem, TS, OV, DI, NG, & ipsæ reperiãtur esse incidentes similium figurarum, βλ, HE, ΣΦ, CM, & dictarum oppositarum tangentium.

Consimiliter, sectis eisdem solidis alijs planis dictis planis tangentibus parallelis, altitudinesq; dictas similiter ad eandem partem secantibus, semper conceptæ in solidis figuræ sint similes, vel binæ similes, &c. & earumdem homologarum oppositæ tangentes parallelæ præfatis regulis, ΩΔ, RQ, sint productæ vsque ad plana, ΔΥ, QK, occurrantq; illis in punctis, quæ si iungantur rectis lineis, ipsæ iungentes sint dictarum similium figurarum, & dictarum oppositarum tangentiũ semper incidentes, quæ omnes iaceant in planis, ΔΥ, QK, per quarum extrema transeant lineæ, XVYT, FGKD, & interius lineæ, 4N61, 7085, & contingat figuras, XVYT, FGKD, esse similes, earumq; homologas dictas incidentes, & ipsarum regulas esse communes sectiones planorum, in quibus iacent, & oppositorum planorum tangentium, idest ipsas, XΔ, YZ, FQ, KL. His igitur positis, voco
A. Def. 11 solida, Γβ3Φ, AHBM, similia; figuras verò, FGKD,
B. Def. 11. XVYT; dico figuras incidentes similium solidorum iam dictorum, & oppositorum tangentium planorum, ℞Δ, & Z; PQ, ΠL; ipsas autem figuras, βλ, ΣΦ, HE, CM, & eas, quarum extensa plana similiter ad eãdem partem

diui-

diuidunt altitudines solidorum, $\Gamma\beta 3\Phi$, AHBM, respectu dictorum tangentium planorum sumptas, & sunt similes, vel binæ similes, & similiter inter se dispositæ, voco figuras homologas dictorum solidorum, sumptas, regulis earum duabus, vel dictis tangentibus planis. C.Def.11.

SCHOLIVM.

ADuertendum est autem pro similium figurarum nominatione, dum voco eas similes figuras siue planas, siue solidas, me intelligere in eis definitiones generales superius allatas; dum verò eas particulari nomine appello, intelligere definitiones particulares pro ipsarum similitudine ab alijs, vel à me allatas, vt cum dicam, similes coni sectionum portiones, intelligam particularem in eis definitionem, & cum dicam (similia parallelogramma) intelligam in eis particularem definitionem similium rectilinearũ figurarum, & sic in cæteris, licet vtramq; definitionem tum particularem, tum generalem, de eisdem figuris verificari inferius ostendemus.

XII.

CVm fuerint quotcumque magnitudines eiusdem generis vtcumq; dispositæ, prima ad vltimã dicitur habere rationem compositam ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & sic deinceps vsq; ad vltimam.

XIII.

CVm vnum, & idem antecedens ad plura consequentia comparatum fuerit, singillatim ad vnumquodque; comparare idem ad eadem consequentia simul collecta, dicemus, colligere, vel, colligendo.

XIV.

PArallelogrãmum dicetur expoſitæ cuicumq; planæ figuræ circumſcriptum, ſi eius ſingula latera tangant dictam figuram, quæ illi pariter dicetur inſcripta.

XV.

PArallelepipedum dicetur expoſito ſolido circumſcriptum, ſi eius ſingula plana tangant dictum ſolidum, quod illi pariter dicetur inſcriptum.

POSTVLATA.

I.

QVamlibet rectam lineam indefinitè ita poſſe moueri, vt ſemper vni cuidam fixæ ſit parallela, ſiue in eodem, ſiue in pluribus planis, in tali motu exiſtat.

II.

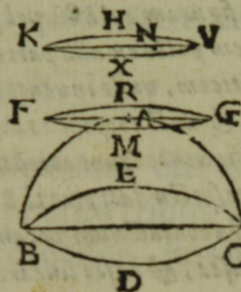
QVodlibet planum indefinitè ita poſſe moueri, vt ſemper vni cuidam fixo ſit æquidiſtans.



PROBLEMA I. PROPOS. I.

CViuslibet propositæ figuræ planæ, vel solidæ, verticem inuenire, respectu datæ, pro figura plana rectæ lineæ; pro solida verò, respectu dati plani.

Sit figura plana quæcumque, ABC, & in ea ducta recta linea, BC, oportet respectu ipsius, BC, verticem figuræ, ABC, inuenire. Sumatur in plano figuræ, ABC, indefinitè producto, vtcumq; punctum, N, & per, N, ipsi, BC, ducatur parallela, KV, indefinitè hinc inde producta, vel igitur, KV, tangit figuram, BAC, & sic inuentum esset, quod quæritur, vel non; igitur erit, KV, vel intra, vel extra figuram, vbicumq; sit, moueatur, KV, semper manens in eiusdem figuræ plano, & æquidistans ipsi, BC, recedendo ab eadem, BC, si intra figuram reperiebatur, vel accedendo, si erat extra, tandem .n. continget figuram, ABC, contingat in situ ipsius, FG, & in puncto, A, igitur, A, erit vertex figuræ, ABC, respectu ipsius, BC, à nobis inuentus, qui in huius Problematis priori parte inueniẽdus proponebatur. A. Def. 1. Postul. 1. A. Def. 1.



Sit nunc figura solida, siue solidum, ADE, in quo respectu plani, BECD, sit vertex inueniẽdus, sumpto igitur extra planum figuræ, vtcumque puncto, N, per ipsum agatur planum, KHVX, ipsi, BECD, æquidistans, quod vel continget solidum, BAC, vel non, si autem non contingat, moueatur accedendo, vel recedendo, à plano, BECD, tandem igitur continget ipsum, tangat in, A, puncto, igitur punctum, A, erit vertex solidi, ADE, respectu plani, BECD, qui inueniendus proponebatur. Postul. 2. A. Def. 2.

COROLLARIVM.

B. Def. 1. *Hinc manifestum est, si recta, BC, tangat planam figuram, ABC, quod ducta erunt opposita tangentes ipsius figuræ,*
B, Def. 2. *ABC, respectu datæ rectæ lineæ, quæ fuit vna ex eisdem tangentibus, nempè, BC; & ita si figura, BDCE, tangit solidum, ADE,*
A. Def. 2. *ducta erunt opposita tangentia plana solidi, ADE, respectu plani, BECD, in quibus puncta contactuũ erunt oppositi vertices earumdem figurarum, hoc pacto inuenti: Si verò recta linea, BC, secaret figuram, ABC, vel planum, BECD, secaret solidum, ADE, eodem pacto ex alia parte lineæ, BC, vel plani, BDCE, inueniemus verticem, vnde inuenti erunt propositæ figuræ planæ oppositi vertices, & ductæ oppositæ tangentes respectu datæ lineæ, BC; & in solido inuenti erunt oppositi vertices, & ducta opposita tangẽtia plana respectu dati plani, BDCE, quæ cum tangunt in figuris planis,*
C. Def. 2. *figuræ contactuum vocantur etiam oppositæ bases, & earum singulæ bases, & bases lineares, si contactus fieret in lineis: hinc ergo*
A.B Def. 1. & 2. *discimus inuenire oppositos vertices figuræ planæ, vel solidæ cuiuscumque, & eorum opposita tangentia ducere respectu datæ in figura plana rectæ lineæ, & dati plani pariter in solida figura.*

PROBLEMA II. PROPOS. II.

CVilibet figuræ planæ parallelogrammum circumscribere, cuius latera duabus datis rectis lineis, in propositæ figuræ plano se secantibus, sint parallela.

Sit proposita quęcumq; figura plana, AOVE, & in ipsius
Def. 14. plano duæ rectæ lineæ, BD, IT, vtcũq; se inuicem secantes in puncto, C, oportet illi parallelogrammum circũscribere, cuius latera rectis, BD, IT, sint parallela. Ducantur ergo
Cor. ant. opposita tangentes figuræ, AOVE, respectu ipsius, IT, quæ sint, KM, HL, & aliæ duæ respectu ipsius, BD, quæ sint, KH, ML,

ML, quæ cum prædictis concurrẽt, nam sunt parallelę ipsis, BD, IT, quæ inuicem concurrunt, sit ergo concursus in punctis, K, M, L, H, igitur, KL, erit parallelogrammum, cuius singula latera tangent ambitum figuræ, vt in punctis, A, O, V, E, & ideò erit figuræ, AOVE, circumscriptum, habens latera duabus datis rectis lineis, BD, IT, in figurę, AOVE, plano se inuicem secantibus, parallela; quod efficere, &c.

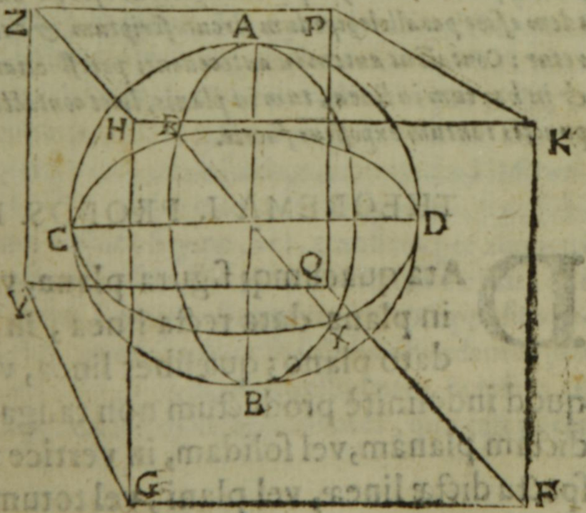


Def. 14.

PROBLEMA III. PROPOS. III.

CVilibet solido parallelepipedum circumscribere, cuius plana opposita tribus datis planis, se inuicem secantibus, sint parallela.

Sit solidum, ACBD, quodcumque, in quo tria plana, ACBD, AB, CD, se inuicẽ secent, q̃libet duo, oportet solido, ACBD, parallelepipedum circumscribere, cuius opposita plana prædictis planis sint parallela: Du-



Def. 15.

cantur

Coroll. 1. huius. cantur duo plana opposita tãgentia dictum solidum respectu cuiusuis planorum se secantium, ACBD, AB, CD, & producantur donec sibi occurrant, occurrent autem, quia hæc planis se inuicem secantibus sunt parallela, & sit ab illis comprehensum solidum, ZF, erit igitur, ZF, parallelepipedum, cum eius opposita plana sint inuicem parallela, quæ tangunt solidum, ACBD, vt in punctis, A, C, B, D, E, X, & ideò erit solido, ACBD, circumscriptum, habens plana opposita propositis planis se secantibus parallela; quod efficere opus erat.

Def. 15.

SCHOLIVM.

Potest autem contingere in antecedentis Propos. figura ipsam esse parallelogrammum, & lineas rectas se secantes, quibus parallelogrammi circumscriptibilis latera debent esse parallela, esse ipsa parallelogrammi latera, in quo casu idem esset parallelogrammum circumscriptum, & cui circumscriberetur: Veluti hic etiam si solidum, ACBD, esset parallelepipedum, cuius oppositis planis, plana circumscriptibilis deberent esse parallela, tunc enim idem esset parallelepipedum circumscriptum, & cui circumscriberetur: Contactus autem in antecedenti potest etiam esse in linea, & in hac tum in linea, tum in planis, licet contactus, qui fit in punctis tantum expositus fuerit.

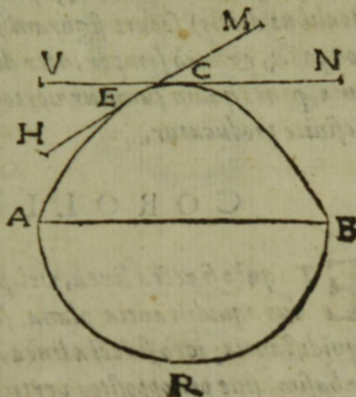
THEOREMA I. PROPOS. IV.

Data quacumq; figura plana, vel solida, & in plana data recta linea, in solida verò dato plano; quælibet linea, vel planum, quod indefinitè productum non tangat figuram dictam planam, vel solidam, in vertice sumpto respectu dictæ lineæ, vel plani, vel totum extra, vel

ali-

aliquid eius intra figuram cadit, nempè figuram secat, si linea lineæ, vel planum plano æquidistet.

Sit data figura plana, CARB, & in ea recta, AB, sit vertex vnus respectu ipsius, AB, punctus, C, & sit recta, HM, parallela ipsi, AB, quæ etiam indefinitè producta non tangat figuram, ARBC, in, C, vertice. Dico, HM, vel totam extra figuram cadere, vel eandem secare, neutrum efficiat si possibile est, igitur, HM, tanget figuram, CARB, & non in, C, igitur in alio puncto, vt in, E, igitur, E, erit vertex figuræ, CARB, respectu ipsius, AB, est etiam, C, vertex eiusdem respectu eiusdem, AB, ergo si per, C, ducamus rectam, VN, parallelam ipsi, AB, transibit hæc per punctum, E, qui est etiam vertex respectu ipsius, AB, igitur secabit, HM, quod est absurdum, nam vtræq; sunt parallelæ eidem, AB, & ideò inter se sunt parallelæ, vel, VN, extendetur super, HM, & sic, HM, transiret per, C, in ipsoq; tangeret figuram contra suppositum, quod etiam est absurdum, non igitur, HM, tanget figuram, CARB, sed erit tota extra figuram, si nullibi concurrat cum ambitu figuræ, vel, transiens per aliquem punctum, eandem secabit, si is punctus non sit ex illis, qui sunt vertices ipsius figuræ ex hac parte, vel ex opposito respectu ipsius, AB; quod similiter in solidis ostendemus pro rectis lineis, AB, HM, VN, plana intelligentes, & ipsam, CARB, esse figuram solidam supponentes, quæ ostendere opus erat.



A. Def. 3. huius.

Ex A. Defin. 1. huius.

CO-

COROLLARIVM I.

HInc patet à quolibet puncto ambitus datæ figuræ planæ, vel solidæ ductam lineam, vel planum æquidistans illi, respectu cuius sumitur vertex (si sumptus punctus non sit vnus ex verticalibus dictis) secare figuram, cum, vt ostensum est, tangẽs esse non possit, & ideò semper inter duo opposita tangentia, respectu regulæ, penes quam sumitur vertex, assumpta linea cadet, licet indefinitè producatur.

COROLLARIVM II.

ET quia si recta linea, vel planum, secat duas parallelas, vel duo æquidistantia plana, secat etiam omnia intermedia illis æquidistantia; ideò si recta linea, vel planũ, transeat per verticem, & basim, siue per oppositos vertices datæ figuræ planæ, vel solidæ secabit etiam omnes in figura oppositis tangentibus æquidistantes intra figuram, vel easdem productas extra figuram.

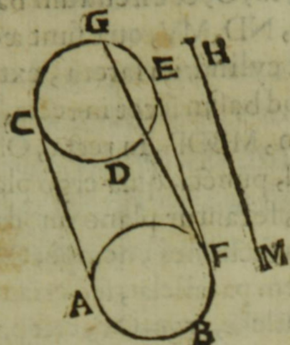
THEOREMA II. PROPOS. IV.

SI à quocumque puncto basis cylindrici, per quam fit reuolutio versus cylindricum ducta fuerit recta linea parallela regulæ lateris cylindrici, hæc erit latus cylindrici in tali basi constituti.

Defin. 3.

Sit cylindricus, CB, in basi, AFB, in cuius circuitu sumpto vtcumq; puncto, F, ab eo ducta sit versus cylindricum quædam parallela ipsi, HM, quæ sit regula lateris cylindrici. Dico eam esse latus huius cylindrici: Intelligatur per punctum, F, ductum latus cylindrici, quod sit, FE, vel igitur ducta ab, F, parallela ipsi, HM, cadit super, FE, & sic erit & ipsa latus cylindrici, vel non, nempè si caderet, vt, FG,

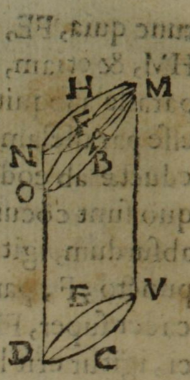
tunc quia, FE, est parallela ipsi, HM, & etiam, FG, est ipsi, HM, parallela sequitur, FE, ipsi, FG, esse parallelam, & sunt, FE, FG, eductæ ab eodem puncto, F, in quo sunt cõcurrentes, quod est absurdum, igitur quæ ducitur à puncto, F, parallela ipsi, HM, cadet super, FE, latus cylindrici, igitur erit latus huius cylindrici, quod erat ostendendum.



THEOREMA III. PROPOS. VI.

SVperficies, quæ clauditur ambitu descripto ab extremo puncto lateris cylindrici, quod per circuitum eiusdem basis non properat, est superficies plana, & æquidistans basi; si ea sumatur, in qua iacent iungentes duo quæuis puncta descripti ambitus.

Sit quilibet cylindricus, AE, cuius basis, CDEV, latus, MV, cuius punctum extremum, M, quod non properat per ambitum basis, in reuolutione describat circuitũ, MANH. Dico figuram hoc circuitu comprehensam, in qua iacent iungentes duo quęuis puncta descripti ambitus esse superficiem planam, æquidistantem basi, CDEV, & ideò singula puncta huius circuitus reperiri in tali plano. Sumatur ergo in tali circuitu vtcumq; punctum, M, & per, M, ducatur basi, CE, æquidistans planum, MBOF. Dico omnia puncta descripti circuitus esse in hoc plano, si enim non sint, aliquod erit extra, sit hoc punctũ, N, & per, N, sit ductum latus cylindrici, quod sit, ND, secans circuitum figuræ planæ,



BF, in, O, & circuitum basis in, D, deinde per, ND, MV, quæ sunt æquidistantes, cum sint cylindrici latera, extendatur planum, quod basim secet in recta, DV, figuram planam, MBOF, in recta, OM, & iungantur, MN, puncta, quia ergo plana parallela, BF, CE, secantur plano quodam, communes eorum sectiones, nempè, OM, DV, erunt inuicem parallelæ, sed etiam, OD, MV, sunt parallelæ, ergo, OV, erit parallelogrãmum, &, OD, æqualis ipsi, MV, est autem, MV, æqualis ipsi, ND, quia ambo sunt latera eiusdem cylindrici, ergo, DO, æqualis erit ipsi, DN, pars toti, quod est absurdũ, non igitur aliquod punctũ circuitus descripti à puncto, M, est extra planum æquidistãs basi, CE, igitur omnia sunt in tali plano, iuncta igitur, NM, ipsa erit in eodem cũ illis plano, in quo pariter iacebunt duo quæuis puncta iungentes eiusdem circuitus, & ideò figura tali ambitu contenta est superficies plana ipsi basi, CE, æquidistans, quod erat ostendendum: istæ autem vocantur cylindrici oppositæ bases.

16. Vndecimi Ele.

COROLLARIVM.

QVoniam verò supposito ipsam, MBOF, esse superficiem planam basi æquidistantem, & ducto per latera, OD, MV, plano ostendimus, OV, esse parallelogrammum, ideò cum sciamus, MANH, esse superficiem planam basi, CE, æquidistantem, ducto per latera vtcumq; plano cylindricum secante, ostendemus eodem pacto, ductu plani secantis in cylindrico conceptam figuram esse parallelogrammum, cum scilicet planũ ducitur tantum per duo latera, vel parallelogramma, cum per plura duobus, ipsum in eorum aliquo non tangens.

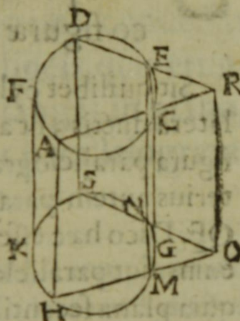
Defin. 3.

THEO-

THEOREMA IV. PROPOS. VII.

SI cylindricus ſecetur, vel tangatur à duobus planis per eiuſdem latera ductis, quæ non ſint inter ſe parallela, ſint autem illa producta donec ſibi occurrant, communis eorum ſectio erit eiuſdem cylindrici lateribus parallela.

Sit quilibet cylindricus, FG, per cuius latera ſint ducta duo plana non parallela, quæ ita ſint producta, donec ſibi occurrant, ſint autem illa plana, AM, DN, quorum & oppoſitarum baſium cylindrici, FG, communes ſectiones, AC, HM, DE, SN, erunt igitur, AM, DN, parallelogramma, intelligãtur oppoſitarũ baſiũ, FL, GK, indefinitè productarũ plana ſecari à planis dictorũ parallelogram. pariter indefinitè pductis, in rectis, AR, DR, HO, SO, & eadem ſe inuicem ſecare in recta, RO. Dico, RO, eſſe parallelam lateri cylindrici, FG. Iungantur, CE, MN, quoniam ergo, CE, MN, coniungunt extrema laterum cylindrici, CM, EN, quæ ſunt æqualia, & parallela, erunt & ipſæ æquales, & parallelæ, ſunt etiam parallelæ ipſæ, CR, MO, ergo angulus, ECR, erit æqualis angulo, NMO, eodẽ pacto oſtendemus angulum, CER, eſſe æqualem angulo, MNO, vnde etiam, CR, MO, erunt æquales, & ſunt parallelæ, ergo eas iungentes, quæ ſunt, RO, CM, erunt æquales, & parallelæ, eſt autem, CM, latus cylindrici, FG, ergo, RO, communis ſectio duorum planorum dictum cylindricum ſecantium, erit eiuſdem lateribus parallela. Idem oſtendemus, ſi ſectio contingat fieri intra cylindricum, ſi autem fiat



Corol. anteced.

33. p. Primi Elem.

p. 16. Vndec Elem.

10. Vndecimi Ele.

26. Primi Elem.

fiat in ſuperficie, patet non poſſe fieri, niſi in latere cylindrici, nam plana ſecantia ducuntur per latera, quodlibet autem latus eſt cæteris eiuſdem cylindrici lateribus æquidiſtans, & ideò vbicumq; contingat ſectionem fieri, ſemper communis ſectio planorum per latera cylindrici ductorum ſe inuicem ſecantiũ, eſt parallela lateribus cylindrici. Idem ſequetur de tangentibus planis, quod erat oſtendendum.

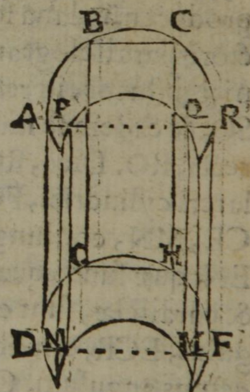
THEOREMA V. PROPOS. VIII.

SI quilibet cylindricus ſecetur planis parallelis per latera ductis, conceptæ in cylindrico figuræ erũt parallelogrãma æquiangula.

Sit quilibet cylindricus, BF, planis ſectus parallelis per latera ductis, ſit autem vnius in cylindrico, AF, concepta figura parallelogrammum, BH, alterius autem parallelogrãma, AN, QF. Dico hæc eſſe æquiãgula, quod enim ſint parallelogramma, patet, quia plana ſecantia ducũtur per latera, quod verò ſint æquiangula patet etiam, nam in parallelogrãmo, AN, latus, AD, æquidiſtat lateri, BO, &, AP, ipſi, BC, nam ſunt communes ſectiones plani, ABCR, & æquidiſtantium planorum, AN, BH, & ideò angulus, PAD, æquatur angulo, CBO, ergo parallelogramma, AN, BH, erunt æquiangula, eodem pacto oſtendemus parallelogramma, QF, BH, eſſe æquiangula, vnde concludetur etiam parallelogramma, AN, QF, eſſe inter ſe æquiangula, quod oſtendere opus erat.

Ex Coro. 6. huius.

10. Vndecimi Ele.



CO-

COROLLARIVM.

SI autem intelligamus oppositarũ basiũ cylindrici, AF, ita producta plana, vt secẽtur à plano per latera, AD, PN, QM, RF, ducto in rectis, AR, DF, quarum portiones extra cylindricum maneãt sint, PQ, NM, manifestum est etiam parallelogrammũ, PM, quod extra cylindricũ constituitur, & quod integratur ex parallelogrammis, AN, PM, QF, .i. AF, esse prædictis æquiangulum.

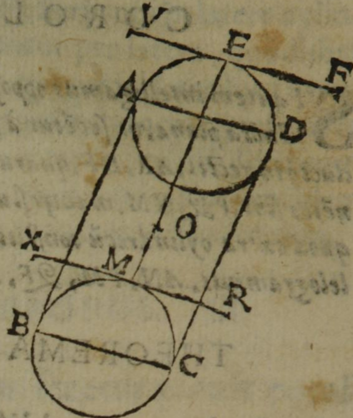
THEOREMA VI. PROPOS. IX.

SI planum ęquidistans plano per latera cylindrici ducto tangat cylindricum, contactus fiet in recta linea, vel rectis lineis, quæ erunt latera eiusdem cylindrici: Vel si tangat in plano, aut planis, plana contactus erunt parallelogramma, æquiangula per latera ducto.

Sit cylindricus, AC, per cuius latera ducatur planum in eo producens parallelogrammum, AC, sit autem ductum aliud planum huic æquidistans, quod tangat cylindricum, AC. Dico eiusdem contactum fieri in recta linea, vel rectis lineis, quæ erunt latera cylindrici, AC, vel si tangat in plano, aut planis, plana contactus esse parallelogramma, ęquiangula ipsi, AC. Primò igitur non tangat ipsum in plano, quia ergo tangit cylindricum, aliquid superficiei cylindrici commune est ipsi, & plano tangenti, sit is punctus, O, existens, & in plano tangente, & in superficie cylindracea, & per, O, sit ductum latus cylindrici, quod sit, EM. Dico totum, EM, reperiri in plano tangente cylindricum in, O, æquidistante ipsi, AC. Ducatur per, M, ipsi, BC, parallela, XR, quia ergo, XR, æquidistat ipsi, BC, &, EM, ipsi, AB, vel, DC, planum per, EM, XR, ductum æquidistabit plano,

AC,

AC, est autem planum, quod tangit cylindricum in, O, æquidistãs plano, AC, & transit per idem punctum, O, per quod trãsit planum per, EM, XR, ductum, ergo illa duo plana fiunt vnum planum, iacet autem, EM, in plano per, EM, XR, ducto, ergo iacet etiã in plano æquidistante ipsi, AC, & cylindricum, AC, tangente, igitur tangit cylindricũ in recta, EM. Eodẽ pacto si in alio puncto extra, EM, in superficie cylindracea sumpto tangeret cylindricũ, AC, ostenderemus tangere ipsum in latere, quod per tale punctũ transiret; in quo casu tangeret cylindricũ in lateribus vno pluribus, vt contingere potest. Tangat autem secundò ipsum in plano, igitur in eo plano sumpto vtcumq; puncto, tanget cylindricum in latere transeunte per tale punctum, igitur planum contactus tale est, vt in eo omnes ductæ rectæ lineæ æquidistantes ipsi, EM, sint latera cylindrici, AC, & subinde eidem, EM, æqualia, vnde superficies, in qua iacent erit parallelogrammum, igitur planum contactus in hoc casu erit parallelogrammum, & erit æquiangulum parallelogrammo, AC, nam eius latera sunt parallela lateribus parallelogrammi, AC, & ideò continent angulos æquales contentis à lateribus parallelogrammi, AC, vnde talia parallelogramma sunt æquiangula, igitur contactus plani æquidistãtis plano per latera cylindrici ducto, vel fit in latere, aut lateribus contacti cylindrici, vel in parallelogrammo, siue parallelogrammis, in eiusdem superficie iacentibus, & æquiangulis ei, quod fit à plano per latera ducto, quod ostendendum erat.



COROLLARIVM.

Hinc habetur communes sectiones plani tangentis, & cylindrici oppositarum basium productorum planorum, quæ sint, VF, XR, esse inter se parallelas, & tangere easdem bases; scilicet, VF, ipsam basim, EAD, &, XR, ipsam, MBC.

THEOREMA VII. PROPOS. X.

SI cylindricus quomodocumq; secetur per latera, diuiditur in cylindricos à secātibus planis, si autem secetur planis omnibus eiusdem lateribus coincidentibus inter se parallelis; solidum compræhensum conceptis in cylindrico figuris, & inclusa superficie cylindracea, erit cylindricus.

Sit cylindricus, AE, sectus à planis quomodocumq; per latera. Dico per eadem diuidi in cylindricos; sint autem secantia plana, quæ in cylindrico, AE, producant parallelogramma, AE, ME. Quia igitur, AE, est parallelogrāmum, si in ipso ducantur rectæ lineæ ipsis, AD, HE, parallelæ, & in, AH, DE, terminatæ, erunt eisdem, AD, HE, æquales, & subinde erunt æquales, & parallelæ regulæ lateris cylindrici, AE, vnde erit, AE, superficies cylindracea descripta latere, AD, siue latere cylindrici, AE, ergo solidum, ARXE, erit cylindricus. Eodem pacto ostendemus solida, AMHDVE, MZHVIE, esse cylindricos, talibus igitur planis cylindricus, AE, semper diuiditur in cylindricos, quæ est prior pars huius Theorematis. Ex def. 3.

Secetur nunc duobus planis vtcumq; inter se parallelis coincidentibus cum omnibus eiusdem lateribus, quæ in cylindrico, AE, producant figuras, BNGK, COFL. Dico soli-

solidum comprænhensum inter has figuras, & ijs inclusam superficiem cylindraceam, esse cylindricum. Sint adhuc plana per latera cylindrici, AE, vtcumq; ducta, AE, ME, quæ secent figuras, BNGK, COFL, in rectis, BG, CF, NG, OF, igitur eiusdem plani & ipsarum, BNGK, COFL, communes sectiones erunt parallelæ, quæ sint, BG, CF, sicut etiam ipsæ, NG, OF, sunt autem parallelæ etiam ipsæ, BC, NO, GF, ergo, BF, NF, erunt parallelogramma, & latera eorumdem, BC, GF, NO, inter se æqualia, & æquidistantia; si igitur eorũ quoduis, vt, GF, statuatur pro regula lateris cylindrici, superficies inclusa duabus figuris, BNGK, COFL, erit descripta vno laterum BC, vel, NO, properante per circuitũ figuræ, COFL, semper ipsi, GF, æquidistante, donec redeat vnde discessit, igitur hæc erit superficies cylindracea, cuius oppositæ bases ipsæ figuræ, BNGK, COFL, & solidum eisdem inclusum



Def. 3. erit cylindricus, quod erat posterior pars huius Theorematis à nobis demonstranda.

THEOREMA VIII. PROPOS. XI.

CViusuis cylindrici oppositæ bases sunt similes, æquales, & similiter positæ.

Sit cylindricus, PN, cuius oppositæ bases, APK, OZN. Dico eas esse similes, æquales, & similiter positas. Ducan-

Coroll. 1. huius. tur vtcumq; duo plana opposita tangentia cylindricũ, PN, parallela cuidam per latera transeunti, quorum & oppositarum basium productarum cõmunes sectiones sint ex vna parte ipsæ, VF, XL, ex alia verò, AB, ZG, quæ tangent vel

9. huius. in latere, siue lateribus, vt in, VX, AP, vel in planis, quæ erunt parallelogramma, sint autem dicta plana, & commu-

nes

nes ſectiones, indefinitè producta, & in qualibet dictarum communium ſectionum, vt in, AB, ſumpto vtcumq; puncto, B, ducatur vſq; ad oppoſitam tangētem vtcumq; in earum plano recta, BF, illi incidēs in, F, & per, B, ducatur in plano tāgente ipſa, BG, parallela vni laterum cylindrici, PN, per ipſas aūt, FB, BG, intelligatur

extenſum planum, quod ſecet aliud planum tangens in recta, FL, & planum per, ZG, XL, ductum in recta, GL, erunt igitur ipſæ, BF, GL, parallelæ, vt & ipſæ, BG, FL, & erit, FG, parallelogrammum. Ducatur nunc intra dicta oppoſita tangentia plana eiſdem æquidiſtans planum, quod erit ductum per latera, cylindricumque, PN, ſecabit, ſit ductū per latera, PO, CI, EM, KN, & productum ſecet planum, FG, in recta, DH, & planum, quod tranſit per, AB, VF, in recta, PD, & quod tranſit per, ZG, XL, in recta, OH, erit ergo, DH, parallela ipſi, BG, &, BG, eſt parallela vni laterum cylindrici, ergo &, DH, erit parallela ipſi, KN, EM, CI, PO, & erunt ipſa, PI, CM, EN, KH, FH, DG, parallelogramma, & eorum latera oppoſita inter ſe æqualia, nempè, FD, ipſi, LH, &, DB, ipſi, HG, DK, ipſi, HN, DE, ipſi, HM, DC, ipſi, HI, &, DP, ipſi, HO, ſunt igitur ipſæ, BF, GL, ductæ inter oppoſitas tangentes figurarum, APK, ZON, ad eundem angulum ex eadem parte, quia angulus, BFV, eſt æqualis angulo, GLX, nam, BF, eſt parallela ipſi, GL, &, Ex Lem. ſeq. 10. Vndecimi Ele.

E FV,

FV, ipſi, LX, & ſunt ipſæ, BF, GL, ſimiliter ad eãdem partem diuiſæ in punctis, D, H, per rectas, PD, OH, parallelas ipſis oppoſitis tangentibus, quæ cum ſint vtcumq; ductæ, reperitur tamen earumdem portiones, quæ iacent inter ipſas, GL, BF, ex eadem parte, eodem ordine ſumptas, eſſe, vt ipſas, BF, GL, nam quia, DK, eſt æqualis ipſi, HN, &, BF, ipſi, GL, vt, BF, ad, GL, ita eſt, DK, ad, HN, & ita eſſe oſtendemus, DE, ad, HM, DC, ad, HI, &, DP, ad, HO, nam iſtæ ſunt æquales. Idem demonſtrabitur in cæteris, quæ ſi-

Def. 10. militer ad eandem partem diuidunt ipſas, BF, GL, igitur figuræ, APK, ZON, ſunt ſimiles: Et quia earum homologæ, tum, PC, OI, tum, EK, MN, ſunt æquales, quod etiam de cæteris oſtendetur eodem pacto, ſunt enim ſemper parallelogrammorũ oppoſita latera, ideò figuræ, APK, ZON, nedum erunt ſimiles, ſed etiam æquales, & regulæ homologarum erunt ipſæ oppoſitæ tangentes, & ipſæ, BF, GL, earum incidentes. Quia verò figuræ, APK, ZON, ſunt in planis æquidiſtantibus ita conſtitutæ, vt earum incidentes ſint parallelæ, & homologæ figurarũ, ZON, APK, ſunt ad eandem partem incidentium poſitæ, & item homologæ partes incidentium, BF, GL, vt ipſæ, BD, GH, ſunt ad eandem partem pariter conſtitutæ, ideò figuræ, APK, ZON, nedum erunt ſimiles, & æquales, ſed etiam ſimiliter poſitæ, quod oſtendere opus erat.

Æquales homologas arguere æquales ſimiles figuras, & è contra, patebit infra in Cor. 25. huius, ab hac inde pendẽtẽr.

D. Defin. 10.

COROLLARIVM.

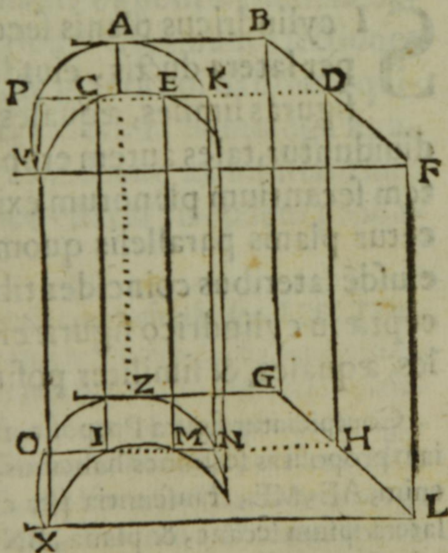
Manifeſtum eſt autem, quia plana oppoſita tangentia cylindrici, PN, ducta ſunt vtcumque, & eorum, & oppoſitarum baſium productarum communes ſectiones ſunt regula homologarum earumdem, quod ſi duxerimus duo alia oppoſita tangẽtia plana, habebimus etiam earumdem figurarum homologas, regulis adhuc communibus ſectionibus horum tangentium planorum poſtremò ductorum, & earumdem baſium productarum, quæ com-

munes

munes sectiones cum primò dictis angulos æquales continebunt, nam quæ existent ex. g. in plano figuræ, APK, erunt parallelæ existentibus in plano figuræ, ZON, igitur in oppositis cylindricorum basibus homologas habebimus etiam cum quibusuis rectis lineis æquales angulos cum duabus quibusuis homologarum earumdem inuentis regulis continentibus, quæ igitur cum regulis homologarum oppositarum basium cylindrici angulos ad eãdem partem continent æquales, sunt & ipsæ homologarum earumdem regulæ, necnon earundem oppositarum basium, & oppositarum tangentium æquè ad prædictas inclinatarum, etiam incidentes licebit, vt supra, inuenire. 10.Vndecimi Ele.

LEMMA PRO ANTECED. PROP.

DEsiderari tantum videtur huius euidentia, quod scilicet planum inter opposita tangentia plana eisdem æquidistanter ductum transeat per latera cylindrici, quod assumpta eiusdẽ figura nunc fiet manifestum; intelligatur ergo in ambitu vtriusuis oppositarum basium cylindrici, PN, sumptum punctum, vt, O, in ambitu figuræ, ZON. Dico planum, quod transit per, O, æquidistãs planis tangentibus, AG, VL, transire per latera cylindrici, PN. Ducatur ergo à puncto, O, latus cylindrici, PO, & ab eodem puncto, O, in basi, ZON, recta, ON, parallela ipsi, XL, igi-



tur planum, quod transit per, PO, ON, æquidistat plano, VL, nam, PO, ipsi, VX, lateri cylindrici, &, ON, ipsi, XL, æquidistat, quod ergo ducitur per, O, eidem plano tangenti æquidistans transit per ipsas, PO, ON, si.n. non, erunt duo plana eidem plano, VL, æquidistantia, & ideò inter se æquidistantia, quibus communis erit punctus, O, igitur in eo concurrent, quod est absurdum, non ergo illa sunt duo plana, sed vnum tantum, illud nempè, quod ducitur per punctum, O, ipsi plano, VL, æquidistans, transitq; per, PO, ON, necessariò: Si verò à punctis, I, M, N, erigantur latera cylindrici, CI, ME, NK, erunt cūcta in plano per, PO, ON, transeunte, ergo planum, quod ducitur per punctum, O, æquidistans plano, VL, cylindricum tangenti transit per latera, PO, CI, EM, KN, qood ostendendum erat.

15 Vndecimi Ele.

THEOREMA IX. PROPOS. XII.

SI cylindricus planis secetur quomodocumq; per latera ductis, eiusdem oppositæ bases in figuras similes, æquales, & similiter positas diuiduntur, tales autem erunt, quæ ad eādem partem secantium planorum existent: Et si idem secetur planis parallelis quomodocumq; omnibus eiusdē lateribus coincidentibus, conceptæ in cylindrico figuræ erūt similes, æquales, & similiter positæ.



Conspiciatur figura Proposit. 10. in qua iam propositas sectiones habemus, plana enim, AE, ME, transeuntia per cylindrici latera ipsum secant, & plana, BNG, COF, omnibus eiusdem lateribus coincidunt, & sunt parallela. Dico ergo figuras, MZH,

EIV, esse similes, & æquales, & similiter positas, quod patet, nam illæ sunt cylindrici, MHZI, oppositæ bases; idem eodem modo probabitur de figuris, AMH, DVE, & de, ARH, DXE, & tandem ostendemus pariter figuras, BNGK, COFL, esse similes, æquales, & similiter positas, quia sunt cylindrici, BF, oppositæ bases, quod demonstrandum erat. 11. huius.

COROLLARIVM.

Hinc apparet, quamuis figuram planam ex sectione plani, oppositis basibus cylindrici æquidistantis, in eo productam, eisdem oppositis basibus esse similem, æqualem, & similiter positam.

THEOREMA X. PROPOS. XIII.

SI quiuis cylindricus secetur plano per latera, deinde secetur planis oppositis eiusdem basibus æquidistantibus: Communes sectiones plani per latera ducti, & planorum basibus æquidistātium, erunt lineæ, vel latera homologa figurarum similium, quæ ex sectione æquidistantium planorum in cylindrico effecta in eodem producuntur.

Sit cylindricus, ADM, cuius oppositæ bases, ABC, TDF, secetur autem plano vtcumq; per latera ducto, quod in eo producat parallelogrammum, BF, & alio vtcumque plano oppositis basibus æquidistante, quod in eo producat figuram, YNXO, & in parallelogrammo, BF, rectam, NO. Dico rectas, DF, NO, BC, esse lineas, vel latera homologa figurarum, TDF, YNO, ABC, similium. Ducantur plana opposita tangentia cylindrici, AM, respectu plani, BF, in eo ducti, vnius quorum, & planorū figurarum, YNO, TDF, Coroll. 1. huius.

pro-

productorum, cõmunes sectiones sint, XS, MG, alterius autẽ, & eorundem planorum sint rectæ, YP, TQ, indefinitè ambæ productæ, sumpto autẽ in, YP, vtcũq; puncto, P, ducatur per, P, ipsi, CF, æquidistans, PQ, & ab eodem in plano per, YP, XS, transeunte vsq; ad, XS, ducatur vtcumq; ipsa, PS, per ipsas autem, QP, PS, intelligatur extensum planum, quod secet aliud tangens planum in, SG, & planum per, TQ, MG, ductum in, QG, producantur autem ipsæ, NO, DF, versus, PS, QG, quibus occurrant in, V, R, & iungatur, VR, erunt igitur, VR, PQ, communes sectiones æquidistantium planorum, YQ, NR, & plani, PR, & ideò erunt parallelæ, vt & ipsæ, PV, QR, &, PR, erit parallelogrammum: Similiter, vt in Prop. 11. ostendemus esse parallelogramma ipsa, VG, PG, NF, OR, NR, & angulum, PSX, æqualem esse angulo, QGM, & tandem, PS, QG, esse incidentes similium figurarum, YNO, TDF, & oppositarum tangentium, YP, XS, TQ, MG, & tangentes esse homologarum earundem regulas, & quia eisdem æquidistant ipsæ, NO, DF, & productæ similiter, & ad eandem partem ipsas incidentes, PS, QG, diuidunt, nam, PV, æquatur ipsi, QR, &, VS, ipsi, RG, ideò ipsæ, NO, DF, erunt lineæ homologæ figurarũ, YNO, TDF, similium, quæ in plures homologas secari contingere potest, prout se habet ambitus superficiei cylindraceæ huius cylindrici, AM, sunt lineæ homologæ inquam, si sint intra ambitum figurarum, quarum sunt homologæ, sunt verò latera homologa, si sint in earundem ambitu, veluti contingeret si planum per latera ductum esset planum contactus vnius oppositorum tangentium, veluti si cylindricus fuisset, cuius oppositæ bases sunt, ABC, TDF, exclusis residuis

B. Def. 10. huius.

C. Def. 10. huius.

siduis

ſiduis figuris, quæ ab ipſis, BC, DF, abſcinduntur, tunc enim eodem modo facta fuiſſet demonſtratio, vt cõſideranti facilè patebit; idem oſtendemus in recta, BC, & in quibuſuis alijs, quæ ſunt communes ſectiones planorum baſibus æquidiſtantium, & parallelogrammi, BF, probantes ſcilicet eaſdem eſſe lineas, vel latera homologa figurarum in cylindrico per baſibus æquidiſtantia plana productarum, quod oſtendere opus erat.

THEOREMA XI. PROPOS. XIV.

SI duæ figuræ planæ non exiſtentes in eodem plano fuerint ſimiles, æquales, & ſimiliter poſitæ, illæ erunt cuiuſdam cylindrici oppoſitæ baſes.

Sint duæ ſimiles figuræ planæ, & æquales, AQTO, FDNC, non exiſtentes in eodem plano, & ſimiliter poſitæ. Dico eas eſſe cuiuſdam cylindrici oppoſitas baſes. Quoniam enim ſunt ſimiliter poſitę erunt inter ſe æquididiſtãtes, & earum incidentes pariter inter ſe æquidiſtantes, ducantur oppoſitæ tãgentes figuræ, AQTO, quæ ſint, TP, AB, & figuræ, FDNC, quæ ſint, FH, NL, quæq; ſint regulæ homologarum earumdem ſimilium figurarum, & ſint incidẽtes earum, & ſimilium figurarum ipſæ, BP, HL, quæ erũt parallelæ, & quia ſunt incidentes ſimilium figurarum, AT, FN, & oppoſitarum tangentium iam ductarũ, ideò ad eaſdem ex eadem parte efficient angulos æquales, igitur angulus, BPT, erit æqualis angulo, HLN, & ideò etiam, PT, æqui-

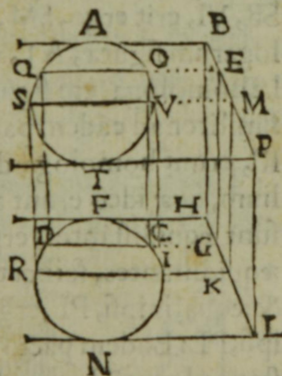
D. Def. 10.

Coroll. 1. huius.

D. Def 10.

B. Def 10.

Ex cõuerſa 10. Vndec. Elem.



æquidiſtabit ipſi, LN, &, BA, ipſi, FH, iungantur, BH, PL, quoniam ergo, AT, FN, ſunt ſimiles, & æquales, earum homologæ erunt pariter æquales, ſunt autem incidentes, BP, HL, vt ipſæ homologæ, vt colligitur in Coroll. 1. ſequentis Propoſit. 22. independenter ab hac Propoſitione, ergo, BP, HL, erunt æquales, & ſunt æquidiſtantes, ergo eas iungentes, BH, PL, erunt æquales, & æquidiſtantes.

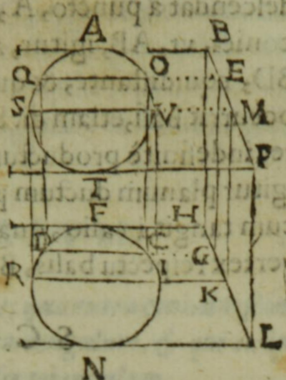
10. Sexti Elem.

Diuidantur ipſæ incidentes, BP, HL, ſimiliter ad eandem partem in punctis, E, M; G, K, & iungantur, EG, MK, erit ergo, MP, æqualis ipſi, KL, &, EM, ipſi, GK, &, BE, ipſi, HG, nam quia, BP, HL, ſimiliter diuidũtur in his punctis, earum partes ſunt, vt ipſæ integræ, illæ verò ſunt æquales, & ideò etiam homologæ partes ſunt æquales, & eas iungentes, PL, MK, EG, BH, erunt æquales, & æquidiſtantes, ducatur à puncto, K, verſus figuram, FN, ipſa, KR, æquidiſtans ipſi, NL, quia ergo, MK, æquidiſtat ipſi, PL, &, RK, ipſi, NL, planum per, MK, KR, tranſiens æquidiſtat tranſeunti per, PL, LN, ſecet hoc planum tranſiens per, MK, KR, figuram, AT, productam, in recta, SM, & iungantur, SR, VI, erit ergo, SM, æquidiſtans ipſi, TP, regulæ homologarum figuræ, AT, veluti, RK, æquidiſtat ipſi, NL, regulæ homologarum figuræ, FN, & ſecant incidentes, BP, HL, ſimiliter ad eãdem partem in punctis, M, K, ergo ipſæ, SV, RI, erunt homologæ dictarum figurarum ſimiliũ, & æqualium, quæ ideò erunt æquales, ſicut etiam ipſæ, VM, IK, & ſunt æquidiſtantes, ergo eas iungentes erunt æquales, & æquidiſtantes, ſcilicet, SR, VI, MK, eſt autẽ, MK, parallela & æqualis ipſi, PL, ergo, SR, VI, erunt æquales, & parallelæ ipſi, PL: Eodem pacto per, EG, extendẽtes planum æquidiſtans plano, TL, quod ſecet figuras, AT, FN, productas in rectis, QE, DG, oſtendemus ipſas, QO, DC, eſſe homologas figurarum ſimilium, & æqualium, AT, FN, & ideò eas eſſe æquales, vt & ipſas, OE, CG, ergo ſi iungantur, QD, OC, iſtæ erunt æquales, & parallelæ ipſi, EG, ideſt ipſi, PL;

15. Vndecimi Ele.

ſimi-

similiter in cæteris planis procedemus, quæ inter plana, TL, AH, ipsis æquidistantia ducuntur, ostendentes, quę iungunt extrema homologarum earundem figurarum, AT, FN, esse æquales, & æquidistantes ipsi, PL, si igitur, PL, regula statuatur, erunt omnes dictæ iungentes in superficie quadam, per quam ipsi, PL, properãte quadam recta linea æquali semper æquidistanter, eiusdem extrema iugiter manet in ambitu figurarum, AT, FN, ergo hæc erit superficies cylindrici, cuius oppositæ bases erunt ipsæ, AT, FN, sunt igitur, AT, FN, cylindrici cuiusdam (nempè cuius latus est quoduis ipsorum, QD, SR, VI, OC,) oppositæ bases, quod erat nobis ostendendum. Def. 3.



THEOREMA XII. PROPOS. XV.

PVnctus manens, cui in reuolutione innititur latus conici, est vertex conici respectu eiusdem basis.

Sit conicus, ABD, basis, BD, punctus, cui innititur latus conici, ABD, in reuolutione, quæ ab eo fit per circuitum basis, BD, sit, A. Dico, A, esse verticem conici, ABD, respectu basis, BD. Intelligatur per punctum, A, ductum planum æquidistans basi, dico hoc planum tantummodo in hoc puncto tangere conicum, si enim possibile est eundem tangat, seu secet in duobus punctis, vt in, C, A, iuncta ergo, AC, illa erit in superficie coniculari, & cum A. Def. 4.



deſcendat à puncto, A, per ipſum tranſiet aliquando latus conici, vt, AB, igitur, AB, erit in plano ducto per, A, baſi, BD, æquidiſtante, & quia latus, AB, indefinitè productum occurrit baſi, etiam dictum baſi æquidiſtans planum occurret indefinitè productum ipſi baſi, quod eſt abſurdum, non igitur planum ductum per, A, baſi, BD, æquidiſtans conicum tangit in alio, quam in puncto, A, ergo, A, erit illius vertex reſpectu baſis, BD, quod erat oſtendendum.

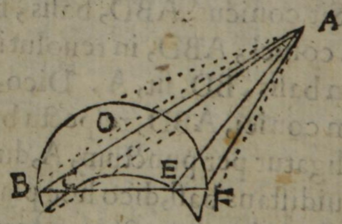
SCHOLIVM.

CVm autem dicemus verticem alicuius conici, intelligemus ſemper ipſum reſpectu baſis aſſumptum, ideſt punctum, cui in reuolutione innititur latus cylindrici, niſi aliud explicetur.

THEOREMA XIII. PROPOS. XVI.

SI conicus ſecetur vtcumq; per verticem ducto plano, concepta in ipſo figura, vel figuræ, erit triangulus, vel trianguli.

Secetur quilibet conicus, ABF, plano vtcumq; per verticem ducto, quod in eo producat figuram, ſiue figuras, ABC, AEF. Dico eas eſſe triangulos, ſit cõmunis ſectio illius, & baſis producti plani, tota, BF, cuius, CE, portio maneat extra baſim, eſt igitur, BF, recta linea, dico etiam eſſe rectas ipſas, AB, AC, AE, AF, ſi enim non eſt, AB, recta, ducatur in plano figuræ, ABC, recta, AOB, igitur, AOB, quæ iungit pũctum, B, & verticem coni eſt latus conici, ABF, ergo eſt in ſuperficie conicula-



ri,

ri, & eſt etiam in plano figuræ, ABC, ergo eſt in eorum communi ſectione, ideſt cadit ſuper, AB, igitur, AB, erit recta linea, eodem modo oſtendemus ipſas, AC, AE, AF, eſſe rectas, & ideò erit, ABC, triangulus, vt etiam, AEF, quod erat oſtendendum.

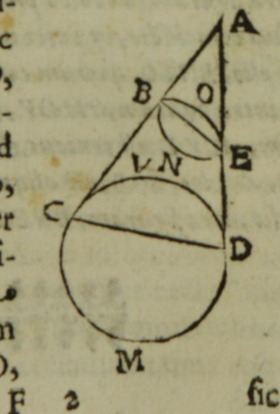
COROLLARIVM.

Eodem modo nobis innoteſcit figuras, quæ extra conicum fiunt eſſe triangulos, ideſt, ACE, eſſe triangulum, & qui ex ipſis integratur, ſcilicet, ABF, pariter eſſe triangulum.

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

SI conicus ſecetur vtcumque planis per verticem, diuiditur ab eiſdem in conicos: Et ſi ſecetur vtcumq; planis coincidentibus omnibus eiuſdem lateribus, ſolida ab ijſdem abſciſſa verſus verticem erunt pariter conici, & eorum baſes ipſæ figuræ abſcindentes.

Sit quilibet conicus, AMV, ſectus plano vtcumque per verticem ducto, quod in eo producat triangulum, ACD. Dico ab hoc plano ſecante in conicos, ACVD, ACMD, fuiſſe diuiſum. Si .n. intelligamus latus triáguli, ACD, quod ſit, AC, vel, AD, innixum puncto, A, indefinitè productum ferri per rectam, CD, ipſa deſcribet ſuperficiem trianguli, ACD, ad modum ſuperficiei conicularis, eſt autem reliqua, quæ inſiſtit ambitui, CVD,



A Def 4. sic descripta, ergo tota superficies, ACDV, est conicularis descripta latere, AC, vel, AD, properante per circuitũ figuræ planæ, CVD, ergo erit, ACVD, conicus, cuius basis ipsa figura, CVD, & vertex, A. Eodem modo ostendemus, ACMD, esse conicum, cuius basis, CMD, vertex, A. Secetur nunc plano vtcumq; omnibus conici, AMV, lateribus coincidente, quod in eo producat figuram, BNEO. Dico, ANO, esse conicum, cuius basis figura, BNEO, vertex, A, nam dum latus conici, AMV, properat per circuitũ basis, CMDV, vt describat eius conicularem superficiem, properat etiam per circuitum figuræ, BNEO, & describit supra ipsam superficiem conicularem, igitur superficies ab eadem figura, BE, abscissa versus, A, est conicularis, & solidum comprehensum ab ipsa, & figura plana, BNEO, erit conicus, & eiusdem basis ipsa figura, BNEO, vertex autem, A, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM.

Hinc habetur, si planũ trãseat per verticem conici, & quamlibet rectam lineam intra basim conici existẽtem, qui quidem secetur alio plano coincidente cum omnibus eiusdem conici lateribus, communem sectionem horum duorum planorum fore intra figuram in conico productam à plano omnibus eiusdem lateribus coincidẽte, vt patet in conico, ACD, qui secatur plano, ACD, & alio, BNEO, quorum communis sectio sit, BE. Dico .n. si, CD, sit intra figuram, CMDV, etiam, BE, fore intra figuram, BNEO, nam, ACVD, est conicus, & quia latera non vniuntur, nisi in puncto, A, ideo, BOE, est aliqua figura, vt etiam, BNE, & ideò, BE, cadit intra figuram, BNEO.

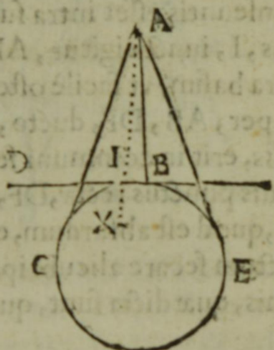


THEO-

THEOREMA XV. PROPOS. XVIII.

SI per verticem conici, & rectam tangentem eius basim extendatur planum, hoc tanget ipsum conicum in vna, vel pluribus rectis lineis, quæ erunt latera conici, vel in plano transeunte per eiusdem latera, quod erit triangulum, siue in pluribus triangulis.

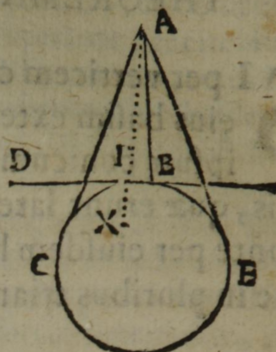
Sit conicus, cuius vertex, A, basis, BCE, quam tangat recta, DF, in puncto, vel punctis, siue in linea. Dico planũ, ADF, tangere dictũ conicum in recta linea, siue in pluribus rectis lineis, siue in plano, quod erit triangulum per eiusdem latera transiens. Tangat igitur, DF, figuram, BCE, in puncto, B, & iungatur, AB, perque, AB, &, DF, dictum sit extensum planum, ergo, AB, erit latus conici, ACE, nam latus, quod reuoluitur transiens per, B, congruit rectæ, AB, alioquin duæ



rectæ lineæ clauderent superficiem, est ergo, AB, in superficie coniculari, est etiam in plano per, A, &, DF, trãseunte, ergo, AB, est communis tum superficiei coniculari, tum plano per, A, &, DF, ducto, nullus autem punctus rectæ, AB, est intra superficiem cylindraceam, ergo planum per, AB, DF, ductum tangit conicum in recta, AB: Eodem pacto ostendemus idem tangere conicum in quibusuis alijs lateribus, quæ ducantur à punctis contactus rectæ lineæ, DF, qui si sint plures, fit etiam contactus in omnibus lineis, si verò contactus rectæ, DF, fiat in recta linea tunc conta-

ctus

ctus plani per, AB,DF,ſit in ſingulis rectis lineis, quæ à recta talis contactus ad verticem, A, duci poſſunt, iacent autem omnes illæ in plano trianguli, cuius baſis eſt linea contactus vertex reſpectu eius, punctus, A, igitur, contactus plani per, AB, DF, ducti ſit vel in vna, vel pluribus rectis lineis, vel in plano, quod eſt triangulum, ſiue plura triangula, non ſecabit autem alicubi tale planum ipſum conicum, tunc enim aliquis pūctus talis plani per, AB, DF, tranſeuntis eſſet intra ſuperficiem conicularem, ſit is punctus, I, iuncta igitur, AI, & producta verſus baſim incidet intra baſim, vt facilè oſtendi poteſt, & quia eſt, AX, in plano per, AB, DF, ducto, & punctus, X, eſt etiam in plano baſis, erit in communi ſectione, ideſt in linea, DF, igitur aliquis punctus rectæ, DF, erit intra baſim, igitur illam ſecabit, quod eſt abſurdum, ergo falſum eſt planum per, A, DF, ductum ſecare alicubi ipſum conicum, igitur illum tanget in his, quæ dicta ſunt, quod oſtendere oportebat.



COROLLARIVM.

Ex hoc habetur, ſi conicus ſecetur plano baſi æquidiſtante, communem ſectionem huius, & plani per verticem, & tangentem baſim ducti, tangere figuram à plano æquidiſtante baſi in conico productam. ſi enim eam ſecaret, etiam tangens planum ſecaret conicum, quod eſt abſurdum.

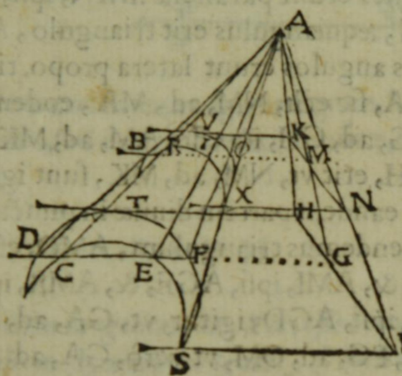


THEO-

THEOREMA XVI. PROPOS. XIX.

SI conicus plano secetur basi æquidistante, concepta in eo figura erit similis basi, & eidem similiter posita.

Sit conicus, cuius vertex, A, basis, TDF, secetur autem plano basi æquidistante, quod in eo producat figurã, VBO. Dico hãc esse similem basi, & eidem similiter positam. Ducãtur ipsius basis duæ vtcumque oppositæ tãgentes, quæ sint, TH, SP, indefinitè ꝓductæ, deinde per verticẽ, & quamlibet dictarũ tangentium extendatur planum,



erunt ergo hæc plana tangentia conicum, ADF, secent aũt figuræ, VBO, productum planũ in rectis, VK, XN, quæ erũt ipsius figuræ, VBO, oppositæ tangentes, sumatur deinde in altera ipsarum, TH, SP, vt in, TH, vtcumq; punctum, vt, H, à quo versus reliquam tãgentem eiusdem figuræ, TDF, in eiusdem plano ducatur vtcumque, HP, in, SP, terminata, deinde intelligatur extensum planum per, A, &, HP, transiens ita, vt secet plana conicum tangentia in rectis, AH, AP, & planum per, VK, XN, ductum in recta, KN, rursus diuidatur, HP, vtcumq; in puncto, G, à quo ducatur ipsi, SP, parallela, GD, secans basis ambitum in punctis, F, E, C, D, deinde extendatur planum per, A, verticem, & rectam, DG, quod per conici latera transibit, & producet triangula siue intus, siue extra conicum, quæ sint, ADC, ACE,

Coroll 1. huius.

Per antec.

Corol. antecd.

16. huius.

ACE, AEF, AFG, secabitq; figuram, VBO, secet eius productum planum in recta, BM, quæ ambitum eiusdem, VBO, diuidat in punctis, B, R, I, O, habebimus etiam triangula, ABR, ARI, AIO, AOM, quorum latera erunt portiones laterum inferiorum triangulorum, per planũ autem, ADG, siue per rectam, AG, sit secta, KN, in puncto, M. Quia ergo plana, quæ per rectas, VK, XN, & per, TH, SP, trãseunt

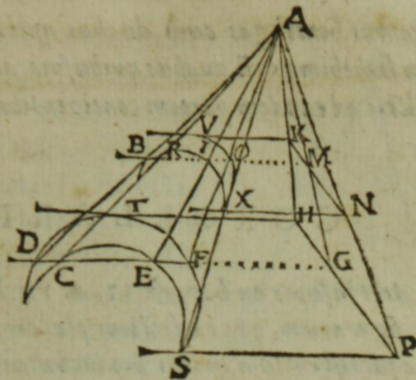
10. Vndecimi Ele. sunt parallela, & secantur à plano, APH, cõmunes eorum sectiones erunt parallelæ .s. KN, ipsi, HP, igitur triãgulus, AMN, æquiangulus erit triangulo, AGP, & ideò circa æ-

4. Sexti Elem. quales angulos erunt latera proportionalia, ergo vt, PG, ad, GA, sic erit, NM, ad, MA, eodem modo ostendemus, vt, AG, ad, GH, ita esse, AM, ad, MK, ergo ex æquali, PG, ad, GH, erit vt, NM, ad, MK, sunt igitur, PH, NK, similiter ad eandem partem diuisæ in punctis, M, G. Eodem modo ostendemus triangulum, AMO, esse æquiangulum ipsi, AGF, &, AMI, ipsi, AGE, &, AMR, ipsi, AGC, & tandem, AMB, ipsi, AGD, igitur, vt, GA, ad, AM, sic erit, permutando, FG, ad, OM, vt verò, GA, ad, AM, sic permutando est, PG, ad, NM, idest, PH, ad, NK, ergo, FG, ad, OM, est vt, PH, ad, NK, similiter ostendemus, EG, ad, IM, &, CG, ad, RM, & tandem, DG, ad, BM, esse vt, PH, ad, NK, &

10. Vndecimi Ele. quia, KN, est parallela ipsi, HP, &, NX, ipsi, PS, ideò angulus, KNX, est æqualis angulo, HPS, habemus igitur duas figuras planas, VBO, TDF, quarum ductæ sunt oppositæ tangentes, VK, XN, vnius, &, TH, SP, alterius, inuenimus autem rectas, KN, HP, inter easdem positas, cũ eis ad eandem partem angulos æquales continentes, ità se habere, vt ductis duabus vtcumq; ipsis tangentibus parallelis, quæ diuidant ipsas similiter ad eandem partem, repertũ sit eas, quæ inter taliter incidentes, & perimetrum figurarũ continentur, eodem ordine sumptas, esse vt ipsas, HP, KN, in-

A. Def. 10. cidentes, sunt igitur figuræ planæ, BVO, DTF, inter se similes, & homologarum earundem regulæ ipsæ tangentes,

qua-



dictæ figuræ sunt in planis æquidistantibus, quarum incidentes sibi inuicem æquidistant, & homologæ earundem figurarum sunt ad eandem partem incidentium, & ipsarum incidentium partes homologæ pariter ad eandem partem constitutæ, igitur figuræ, VBO, TDF, nedum erunt similes, sed etiam similiter positæ, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM I.

ET quia ostensum est ipsas tangentes, SP, XN, esse homologarum earundem similium figurarum regulas, & ducta sunt vtcumque, patet si duxerimus alias duas eiusdem basis oppositas tangentes, quæ cum primò ductis angulos efficient æquales, & per ipsas, & verticem, A, extenderimus duo plana (quorum & plani figuræ, BVO, producti communes sectiones erunt aliæ duæ figuræ, BVO, oppositæ tangentes) quod eodem modò ostendemus has secundas tangentes esse homologarum earundem similium figurarum regulas, & intra ipsas contineri earundem quoq; incidentes, facient autem secundæ tangentes cum primis angulos æquales, prima n. ex. g. tangens figuræ, BVO, quæ est, XN, est parallela ipsi, SP, primæ tangenti figuræ, DTF, & secunda tangens figuræ, BVO, est pariter parallela secundæ tangenti figuræ, DTF, nam tum primæ, tum secundæ tangentes sunt communes sectiones æquidistantium planorum, ipsarum nempè figurarum, BVO, DTF, productorũ planorũ, & ideò sunt parallelæ, & angulos continent æquales, vnde in figuris, quæ à planis basi conici parallelis producuntur, si ha- 10. Vndecimi Ele.

habeamus homologas cum duabus quibuſdam regulis, eaſdem etiam habebimus cũ duabus quibuſuis alijs angulos æquales cum prædictis ad eandem partem continentibus.

COROLLARIVM II.

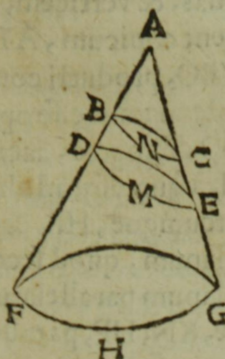
Patet inſuper ex hac, & 11. ac 12 huius ſimilium planarum figurarum, quæ ex ſectione planorum baſi cylindrici, vel conici æquidiſtantium in illis producuntur, vel ſunt oppoſitæ baſes cylindrici, aut fruſti conici, poſsibile eſſe inuenire incidentes, quæ ſint & ductarum vtcumq; oppoſitarum earundem tangentium incidentes, & quia punctum, H, ſumptum eſt vtcumque, & ab ipſo ducta qualibet incidens, HP, patet, quod, ducta vtcumque in dictis figuris incidẽte earum tangentibus, quæ ſunt regulæ homologarum earundem, poſſunt reperiri duæ incidentes earundem, quarum altera ſit iam ducta; veluti, acta, HP, vtcumq; inuentæ ſunt duæ incidentes, KN, HP, quarum altera fuit, HP. Et quia homologarum in eaſdem incidentes productarum, & ad eas terminatarum, portiones, eodem ordine ſumptæ, ſunt proportionales, ſunt enim, vt ipſæ incidentes, ideò per homologarum productarum, talia extrema ſemper tranſeunt aliquæ incidentes.

THEOREMA XVII. PROPOS. XX.

SI conicus ſecetur quomodocumq; planis parallelis, cum omnibus eiuſdem lateribus coincidentibus, conceptæ in ipſo figuræ erunt inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ.

Sit conicus, cuius baſis, FHG, vertex, A, ſecetur autem vtcumq; planis parallelis, quæ cum omnibus eiuſdem lateribus

ribus coincidant, & ſint conceptæ in ipſo figuræ, DME, BNC. Dico has eſſe ſimiles, & ſimiliter poſitas: Nam quia planum figuræ, DME, coincidit omnibus lateribus conici, AFHG, ideò eſt etiam conicus ipſe, ADME, ſecatur autem plano eius baſi, DME, æquidiſtante, eo ſcilicet, quod producit figuram, BNC, ergo figura, BNC, erit ſimilis baſi, DME, & eidem ſimiliter poſita, quod erat demonſtrandum.



17. huius.

Ex antec.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XXI.

SI quilibet conicus ſecetur plano per verticem, ſiue ab eodem tangatur in plano, nempè in triangulo, vel triangulis, ſecetur autem alijs planis vtcumq; baſi parallelis, communes ſectiones, quæ ab eodem plano ſecante fiunt in dictis planis baſi parallelis, erunt homologæ lineæ, vel latera figurarum, quæ ab eiſdem æquidiſtantibus planis in eodem conico producuntur.

Videatur figura Propoſ. 19. huius, in qua conicus, ATDF, intelligatur ſectus plano vtcumq; per verticem, A, ducto efficiente triangulum, ſiue triangulos, ADC, AEF, intra, extra autem triangulum, ACE, & qui ex illis integratur, ADF, ſecetur autem alio plano baſi parallelo, qui in conico producat figuram, VBO; & ſint earum, & plani per verticem communes ſectiones, BR, DC, IO, EF. Dico eaſdem eſſe lineas homologas earundem figurarũ, VBO, TDF. Intelligantur in baſi ductæ oppoſitæ tangentes, TH, SP, per

Coroll. 1. huius. quas, & verticem, A, extendantur plana, quæ pariter tangent conicum, ATDF, ſint autem eorum, & plani figuræ, 28. huius. VBO, producti communes ſectiones, VK, XN, quas, vt ibi, oſtendemus eſſe oppoſitas tangentes ipſius, VBO, reſpectu, BO, ſumptas, accipiatur deinde in, TH, vtcũq; punctum, H, à quo vſq; ad aliam oppoſitam tangentem, SP, ducatur vtcumque, HP, & per ipſam, & punctum, A, extendatur planum, quod ſecet tangentia plana in rectis, AH, AP, & planum parallelarum, VK, XN, in recta, KN, erunt ergo ipſæ, KN, HP, parallelæ, extendatur planũ trianguli, ADF, ita vt ſecet triangulum, APH, in recta, AG, & planum figuræ, TDF, productum, ſi opus ſit, in recta, DG. Eodem modo igitur, quo vti ſumus in Propoſ. 19. quia, KN, HP, ſunt parallelæ, oſtendemus ipſas, KN, HP, eſſe ab ipſis, BM, DG, (quæ ſunt communes ſectiones trianguli, ADF, & æquidiſtantium planorum, VBO, TDF, & ideò ſunt parallelæ) ſimiliter diuiſas, & ad eandem partem in punctis, M, G, vnde, vt ibi oſtendemus figuras, VBO, TDF, eſſe ſimiles, & earum, & tangentium oppoſitarum, XN, VK; SP, TH, incidentes eſſe ipſas, KN, HP, & tangentes eſſe regulas homologarum earundem, quarum duæ ſunt ipſæ, BRIO, DC EF, coniunctæ, ſiue ipſæ, BR, DC; IO, EF. Eodem modo, ſi propoſitus conicus fuiſſet, cuius vertex, A, baſis altera figurarum à baſi, TDF, per rectam, DF, abſciſſarum, vt ipſa, DTF, oſtenſum eſſet ipſas, BR, DC; IO, EF, communes ſectiones plani conicũ tangentis in triangulis, ADC, AEF, & planorum æquidiſtantium, BVO, DTF, eſſe earundem homologas, erunt autem in hoc caſu latera homologa, velut cum ſunt intra figuras ſunt lineæ homologæ earundem, quod erat oſtendendum.

Sed hoc ẽt per modũ Coroll. ex Prop. 19. deduci potuiſſet.



CO-

COROLLARIVM.

Hinc habetur, si propositum fuißet frustum conici, BTF, quod eius omnia latera producta coincidißent in vno puncto, A, vnde ostensum pariter fuißet communes sectiones plani per eius latera transeuntis, vt ipsius, BDFO, quod semper est trapezium, & ipsarum, VBO, TDF, siue eisdem æquidistantium inter easdem ductarum, eße earundem lineas, vel latera homologa, vnde patet communes sectiones plani per latera frusti conici ducti, & eiusdem basium oppositarum, siue eisdem æquidistantium inter eas productarum figurarum, esse earundem lineas, vel latera homologa; lineas, inquam, cum sunt intra figuras, nec sumuntur in plano tangente, latera, cum sunt in earum circuitu, cum nempè sunt in eodem plano tangente, in eo præcisè, quod est planum contactus frusti conici (contactus scilicet eius plani, quod per verticem ducitur) quod semper erit trapezium, vel trapezia, vt patere potest in trapezijs, BDCR, IEFO, quæ essent planum contactus frusti conici, si idem frustum tangeretur à plano trianguli, ADF.

THEOREMA XIX. PROPOS. XXII.

Si duæ figuræ planæ similes, non existentes in eodem plano, fuerint inæquales, & similiter positæ; erunt eiusdem frusti conici oppositæ bases.

Vtamur adhuc figura Prop. 19. & sint duæ figuræ planæ quæcũq; similes, inæquales, & similiter positæ, non tamen existentes in eodem plano, ipsæ, VBO, TDF. Dico, quod erunt ambæ cuiusdam frusti conici oppositæ bases. Quoniam ergo figuræ, VBO, TDF, sunt similiter positæ, & non in eodem plano, erunt in planis æquidistantibus, & quia sunt similes sint earum incidentes, & oppositarum tangen- D. Def. 10. huius.

tium, quæ sunt earundem homologarum regulæ, ipsæ, KN, HP; KN, ipsius, VBO, &, HP, ipsius, TDF, & prædictæ tangentes figuræ, VBO, sint ipsæ, VK, XN, & figuræ, TDF, ipsæ, TH, SP, erunt ergo ipsæ, KN, HP, æquidistantes, & quia ad tangẽtes, quæ sunt regulæ homologarum, illę efficiunt ad eandem partem angulos æquales, erit angulus, KNX, æqualis angulo, HPS, & quia, KN, est parallela ipsi, HP, erit etiam, XN, parallela ipsi, SP. Eodem pacto ostendemus, VK, esse parallelam ipsi, TH; ducantur in figuris, VBO, TDF, duæ earum homologæ regulis dictis tangentibus, quæ sint ipsæ, BR, IO, DC, EF, sint autem totæ, BO, DF, productæ, si opus sit, vt secent ipsas, KN, HP, quas diuident similiter ad eandem partem, vt in punctis, M, G, & quia figuræ propositæ sunt inęquales, sit maior ipsa, TDF, igitur etiam maior erit, DC, ipsa, BR, vel, EF, ipsa, IO, si .n. essent eisdem æquales, etiam reliquæ homologæ his parallelæ essent æquales, cum omnes sint proportionales (sunt .n. vt incidentes) vnde etiã figuræ essent æquales, & si minores, etiam ipsa figura, TDF, esset minor figura, BVO, contra suppositum, est igitur, DC, maior ipsa, BR, est autem, vt, DC, ad, BR, ita, PH, ad, NK, nam vt, DG, ad, BM, ita est, PH, ad, NK, & etiam ita, CG, ad, RM, ergo reliqua, DC, ad reliquam, BR, erit vt, PH, ad, NK, sic etiam esse ostendemus, EF, ad, IO, vt, PH, ad, NK, & quia, DC, est maior ipsa, BR, vel, EF, ipsa, IO, ideò, HP, erit maior, KN, si igitur iunxerimus puncta, PN, HK, ipsæ, PN, HK, si producãtur ad partes ipsius, NK, cõcurrent, vt in, A. Dico,

Conuersa 16. Vndecimi Ele.

A. Defin. 10.

Dico, A, esse verticem conici, cuius est basis ipsa, TDF, & ex plano ipsi, TDF, æquidistanter ducto est in ipso concepta figura, VBO. Quia ergo, NK, est parallela ipsi, PH, erunt triangula, ANK, APH, æquiangula, & circa æquales angulos latera proportionalia, igitur, HP, ad, PA, erit vt, KN, ad, NA, &, permutando, HP, ad, NK, erit vt, PA, ad, AN, vt autem, PH, ad, NK, ita est, PG, ad, NM, nam ipsæ, HP, KN, similiter sunt diuisæ in punctis, G, M, ergo, PA, ad, AN, erit vt, PG, ad, NM, & sunt parallelæ ipsæ, PG, NM, ergo puncta, G, M, A, erunt in vna recta linea, sit illa, AC, igitur, vt, PG, ad, NM, vel, PH, ad, NK, ita erit, GA, ad, AM, est autem, PH, ad, NK, vt, FG, ad, OM, & vt, EG, ad, IM, & tandem, vt, DG, ad, BM, ergo, vt, GA, ad, AM, ita erit, FG, ad, OM; EG, ad, IM; CG, ad, RM; &, DG, ad, BM, ergo, cum sint parallelæ, erunt tum puncta, AOF, tum, AIE, ARC, tum etiam, ABD, in vna recta linea, extendâtur ergo dictæ rectæ lineæ, quæ erunt, AF, AE, AD, AC. Eodem modo, si per duas quaslibet homologas figurarum, VBO, TDF, planum extendamus, fiet in cæteris demonstratio; igitur si sumantur in ambitu figuræ, TDF, quæcumq; puncta, quæ iungantur cum puncto, A, semper iungentes transibunt per circuitum figuræ, VBO, ergo figuræ, TDF, &, VBO, erunt frusti conici oppositæ bases, quod à conico, ATDF, abscinditur per figuram, VBO, quod erat demonstrandum.

4. Sexti Elem.

Ex Lémate seq.

Ex Lémate seq.

Defin. 4.

COROLLARIVM I.

QVoniam ostendimus, tum, DC, BR, tum etiam, EF, IO, esse vt ipsas incidentes, PH, NK, habetur similium figurarum homologas pariter esse, vt incidentes earundem, & oppositarum tangentium, quæ sunt earundem regulæ, quod in diffinitione assumitur contingere tantum ijs, quæ inter circuitum figurarũ, & ipsas incidentes, eodem ordine sumpta, continentur.

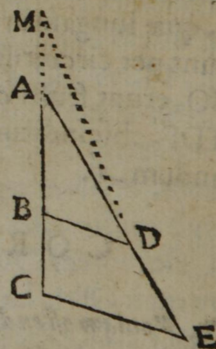
COROLLARIVM II.

PAtet etiam ex hac, & 14. huius, omnes similes figuras planas posse esse alicuius cylindrici, vel frusti conici, oppositas bases; vnde quæ pro illis in Coroll 2. 19 huius colliguntur, pro omnibus similibus figuris planis etiam colligi possunt.

LEMMA PRO ANTECED. PROP.

SI in recta linea signentur tria puncta, primũ, medium, & postremum, à primo autem, & medio ducantur ad eandem partem duæ inuicem parallelæ ita se habentes, vt educta à primo ad eductam à secundo, sit veluti recta inter primum, & postremum punctum posita, ad eam, quæ inter medium, & idem postremum sita est: Extrema puncta parallelarum, quæ non sunt in proposita linea, & illius postremum, erunt in recta linea.

Sit proposita recta, AC, in qua signatis vtcumq; tribus punctis, C, primo, B, medio, &, A, postremo, à punctis, C,B, educantur ad eandem partẽ duæ inuicem parallelæ, q̃ sint, CE, BD, ita se habentes, vt, CE, ad, BD, sit, vt, CA, ad, AB. Dico puncta, A, D, E, esse in recta linea, si enim (iũcta, ED,) ipsa, ED, producta non transit per, A, transibit supra, vel infra, A, secans, CA, (nam, BD, est minor ipsa, CE, vt est, AB, minor, AC,) transeat, vt per, M, quia igitur, EDM, est recta erit, MCE, triangulus, in quo lateri, CE, ducitur parallela, BD, ergo trianguli, ECM, DBM, erunt æquianguli, & circa æquales angulos latera proportionalia, ergo, permutando, CE, ad, BD, erit vt, CM, ad, MB, est autem vt, CE, ad, BD, ita, CA, ad, AB, ergo vt, CM, ad,



4. Sexti Elem.

ad, MB, ita erit, CA, ad, AB, diuidendo, CB, ad, BM, erit vt, CB, ad, BA, ergo, MB, erit æqualis ipsi, BA, totum parti, quod est absurdũm, non igitur, ED, producta transit supra, A, eodem modo ostendemus non transire infra, A, ergo transibit per, A, ergo tria puncta, A, D, E, erunt in recta linea, AE, quod erat ostendendum.

THEOREMA XX. PROPOS. XXIII.

SI duarum quarumlibet similium figurarum habeamus homologas cum duabus quibusdam regulis, habebimus etiam homologas earundem cum duabus quibusuis alijs, cum prędictis angulos æquales ad eandẽ partem faciẽtibus.

Patet hæc propositio, nam quæcunq; figuræ planæ similes, si sint æquales, & similiter positæ, possunt esse cuiusdam cylindrici oppositæ bases, si sint inæquales, oppositæ bases frusti conici, in his aũt contingit, si habeamus homologas cum duabus quibusdam regulis, nos easdem habere cum alijs duabus quibuscumq; cum prædictis angulos æquales ad eandem partem cõstituentibus, ergo hoc in quibuscũq; planis similibus figuris verificatur, quod est propositum.

14. huius.
11. huius.
Coroll. 19. & 11. huius.

COROLLARIVM.

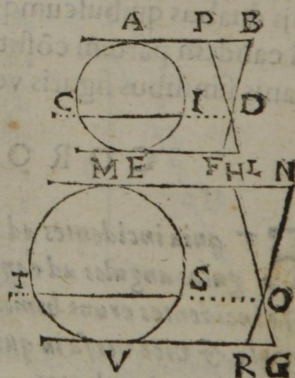
ET quia incidentes ad homologarum similium figurarum regulas angulos ad eandem partem efficiunt æquales, ideò & ipsæ incidentes erunt homologarum earũdem similium figurarum regulæ, & vice versa in quibusdam regulis homologarum poterunt sumi earum incidentes.

B. Def. 10.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXIV.

SI in duarum similium figurarũ oppositas tangentes, quæ earundem homologarum sint regulæ, incidant duę rectæ lineæ ad eundem angulum ex eadem parte easdem secantes, ductis verò quibusdam duabus, prędictis tangẽtibus parallelis, in dictis figuris, quæ secantes diuidant similiter ad eãdem partẽ, vel assumptis ipsis oppositis tangentibus, reperiamus harum portiones inter incidentes, & circuitum figurarum eodem ordine sumptas, ita se habere, velut illæ, quæ dictis tangentibus inciderunt, istæ, quæ illis inciderunt, erũt tum similium propositarum figurarum, tum ductarum tangentium, incidentes.

Sint duæ quæcumq; similes planæ figuræ, ACEI, MTVS, quarum sint ductæ oppositæ tangentes homologarum earundem regulæ, AB, EF, figuræ, AE, &, MN, VR, figuræ, MV, incidant autem eisdem ad eundem angulum ex eadem parte duæ, BF, NR, & ductæ sint quædam duæ ipsis tangentibus parallelæ, CD, TO, secantes ipsas, BF, NR, (& consequenter incidẽtes, vt facilè patet) similiter ad eãdem partem, reperiamus, CD, ad, TO, & pariter, ID, ad, SO, esse vt, BF, ad, NR. Dico ipsas, BF, NR, esse incidentes similium figurarum, AE, MV, & ductarum oppositarum tangentium, VR, MN; EF, AB.



AB. Ex dictis igitur ipsæ, CI, TS, erunt homologæ earundem similium figurarum, AE, MV, & quia, CD, ad, TO, est vt, BF, ad, NR, &, BF, ad, NR, vt, ID, ad, SO, erit, CD, ad, TO, vt, ID, ad, SO, igitur puncta, D, O, reperientur in duabus dictarum similium figurarum, & oppositarum tangentium, incidentibus, sint illæ ipsæ, HG, PL, quæ cum ipsis, TO, CD, æquales angulos ad eandem partem continebunt. Dico tamen etiam ipsas, NR, BF, esse earundem figurarum, & tangentium, incidentes: Sint puncta contactus tangentium, FE, RV, proxima ipsis, NR, BF, ipsa, V, E. Dico, EF, ad, VR, esse vt, FB, ad, RN, nam, EL, ad, VG, est vt, LP, ad, GH, quia verò angulus, CDP, æquatur angulo, TOH, &, CDB, ipsi, TON, reliquus, PDB, æquabitur reliquo, HON, & sic etiam, FDL, ipsi, ROG, est etiam angulus, PLE, æqualis angulo, HGV, ideò reliquus in triangulo, DFL, idest angulus, DFL, erit æqualis angulo, ORG, & sic triangula, FDL, ORG, erunt æquiangula, vt etiam probabimus triangula, DPB, OHN, esse æquiangula, sicut sunt æquiangula inter se triangula, FDL, PDB, &, ROG, HON, vnde vt, LD, ad, DF, sic erit, PD, ad, DB, permutãdo, LD, ad, DP, erit vt, FD, ad, DB, componendo, LP, ad, PD, erit vt, FB, ad, BD, permutando, LP, ad, FB, erit vt, PD, ad, DB, idest vt, HO, ad, ON, at, vt supra, ostendemus, HO, ad, ON, esse vt, HG, ad, NR, ergo, PL, ad, BF, erit vt, HG, ad, NR, erat autem, EL, ad, VG, vt, PL, ad, HG, ergo, EL, ad, VG, erit vt, BF, ad, NR, quia verò, BF, ad, NR, est vt, DF, ad, OR, (nam, BF, NR, sunt similiter diuisæ in punctis, D, O,) idest vt, FL, ad, RG, ergo, EL, ad, VG, erit vt, FL, ad, RG, ergo reliqua, EF, ad, VR, erit vt tota, EL, ad, VG, idest vt, BF, ad, NR. Idem ostendemus de quibuslibet ductis ipsis, EF, VG, parallelis, quæ diuidant, BF, NR, similiter ad eandem partem, nempè eas, quæ inter ipsas, BF, NR, & circuitum figurarum, AE, MV, eodem ordine sumptæ continentur, esse vt ipsas, BF, NR, ergo, BF, NR, sunt in-

C. 10 definitionis.

Ex Cor 1. 19. & 22. huius.

B. Definit. 10.

4. Sexti Elem.

3. Def. 10. cidentes ſimilium figurarum, MV, AE, & ductarum tāgentium, quod oſtendere opus erat.

COROLLARIVM.

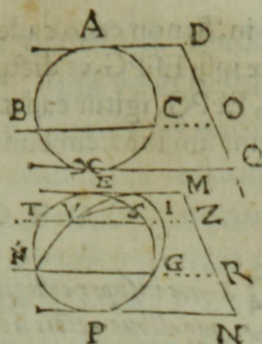
INnoteſcit ex hoc conſequenter duarum ſimilium figurarum, & earundem oppoſitarum tangentium, quæ ſunt regulæ homologarum, tum incidentes ſimiliter diuidi ab homologis earundem figurarum, productis, ſi opus ſit, tum quaſcumq; alias, quæ cum homologis angulos continent æquales, vt exempli gratia ipſa, NR, BF. Et vlterius ipſas homologas eſſe tum vt quaſuis incidentes, tum vt eiſdem parallelas, ideſt ex. g. CI, ad, TS, nedum erit vt, PL, ad, HG, ſiue vt, BF, ad, NR, ſed etiam vt, BF, ad quamcumq; aliam parallelam ipſi, NR, ductam inter parallelas, MN, VR, nam illa erit æqualis ipſi, NR. Patet igitur duarum ſimilium figurarum homologas nedum eſſe vt earum, & oppoſitarū earundem tangentium, quæ ſunt regulæ homologarum, incidentes, ſed etiam vt quaſuis alias inter eaſdem tangētes ductas ipſis incidentibus æquidiſtantes, ſiue ad homologas ſimilium figurarum æqualiter inclinatas.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXV.

SI quæcunq; ſimiles figuræ planæ à rectis lineis deſcribantur, quæ ſint earundem homologæ, & inter ſe æquales; ſuperponantur autem ad inuicem ipſæ figuræ, ita vt eaſdem deſcribentes rectæ lineæ ſibi congruant, figuræque ſint ſimiliter poſitæ, illæ quoq; erunt ad inuicem congruentes.

Sint ſimiles figuræ planæ, ABXC, EFPG, quæcunq; deſcriptæ ab earundem homologis, & æqualibus rectis lineis,

BC, FG, quæ ita inuicem superponantur, vt, BC, FG, sibi congruant, & ipsæ sint similiter positæ. Dico etiam ipsas figuras ad inuicem fore congruentes. Sint oppositæ tangentes ductę pro figura, ABXC, ipsæ, AD, XQ, regula, BC, & pro figura, EFPG, regula, FG, ipsæ, EM, PN, quarum figurarum, ac oppositarum tangentium sint quoq; incidentes ipsæ, DQ, MN, productis verò, BC, FG, versus, DQ, MN, illis incidant in punctis, O, R, & superponatur figura, ABXC, figuræ, EFPG, ita vt, BC, congruat ipsi, FG, & sint similiter positæ: Erunt ergo ipsæ incidentes, DQ, MN, ad eandem partem figurarum iam superpositarum, & inuicem parallelæ, vel congruentes, sed in nostro casu erunt congruentes, cum enim vt, BC, ad, FG, ita sit, DQ, ad, MN, ipsæ verò, BC, FG, sint æquales, etiam, DQ, MN, æquales erunt, sicut etiam, CO, GR, (quæ sunt inter se vt, DQ, MN,) ergo cum punctus, B, positus sit in, F, erit, O, in R, &, DQ, extensa super, MN, & cum etiam, DO, MR, sint æquales punctus, D, erit in, M, sic autem ostendemus quoq; punctum, Q, cadere in, N, & consequenter, XQ, cadere super, PN, &, AD, super, EM, si ergo figura, ABXC, cadens super, EFPG, non congruit illi, esto quod ceciderit, si possibile est vt, FVIG, ita vt ambitus extra ambitum cadat, sumpto autem quocunq; puncto, I, qui sit in ambitu figuræ, VFPGI, sed cadens non in ambitu figuræ, EFPG, per ipsum ducatur, TZ, parallela, EM, secans, MN, in, Z, ambitum figuræ, VPI, in, V, I, &, ambitum figuræ, EFPG, in, T, S, erunt autem homologæ, VI, TS, & inter se æquales cum sint, vt incidētes, DQ, MN, quæ sunt æquales, necnon æquales reliquæ vsq; ad incidentes, nempè, SZ, IZ, quod est absurdum, pūctus enim, I, non



D. Defin. 10.

Coroll 1. huius.

B. Defin. 10.

D. Defin. 10.

A. Defin. 10.

C. Defin. 10.

A. Defin. 10.

eſt in, S, non ergo cadet ambitus figuræ, ABXC, ſuperpoſitæ ipſi, EFPG, vt dictum eſt, extra ambitum eiuſdem figuræ, EFPG, igitur cadet ſuper illius ambitum, & ipſæ figuræ erunt ſibi inuicem congruentes, quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

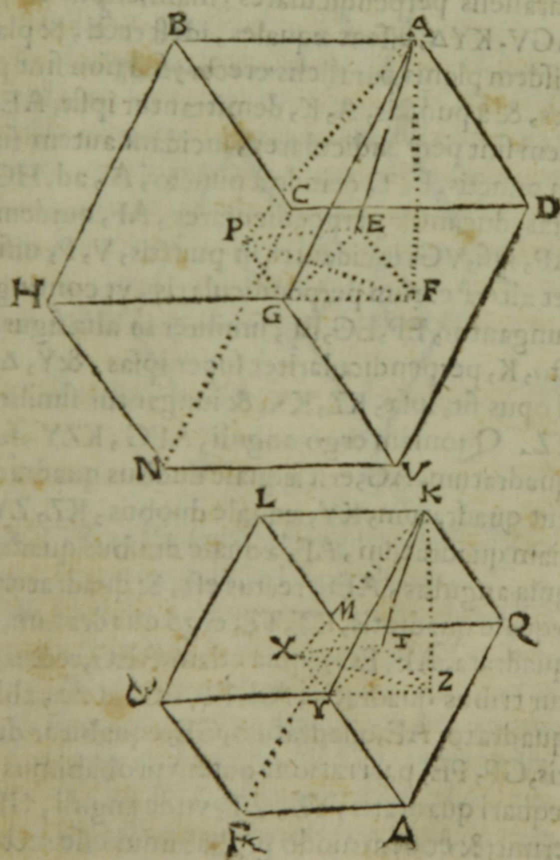
Ex hoc inſuper colligitur figuras quaſcumq; planas ſimiles ab æqualibus rectis lineis, tanquam ab homologis, deſcriptas inter ſe æquales eſſe, cum ita ad inuicem ſuperponi poſsint, vt ſibi congruant, velut in Prop. demonſtratum eſt. Et vice verſa ſi figuræ ſint ſimiles, & æquales, etiã homologas æquales eſſe, ſi enim inæquales eſſent, etiam ipſæ figuræ inæquales eſſent, quod eſt abſurdum. Vlterius aũt patet, ſi ſint inuicem ſuperpoſitæ, ita vt ſimiliter ſint conſtitutæ, ac duæ quæuis homologæ inuicem fuerint congruentes, etiam ipſas figuras fore congruentes, alioquin ſequerentur abſurda ſuperius demonſtrata, cum quæuis aliæ homologæ neceſſariò quoq; ſint æquales, quæ enim congruerunt ſunt æquales, & ſubinde etiam incidentes, & quæuis aliæ homologæ inter ſe ſunt æquales.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXVI.

SI duobus parallelis quibuſcumq; planis inciderint duo plana ſe ſe interſecãtia, primum nempè, & ſecundum; fuerint autem alia duo parallela quæcũq; plana, quibus pariter incidant duo alia plana ſe ſe diuidentia, primum ſimiliter, & ſecundum: Eorum autem cum parallelis planis cõmunes ſectiones angulos æquales comprehenderint, necnon primorum, ac ſecundorum planorum mutuæ ſectiones ad communes ſectiones primo-

morum planorum cum planis parallelis effectas angulos æquales constituerint, ipsa verò prima plana ad plana parallela æquè fuerint ad eãdem partem inclinata: Eædem communes sectiones ad communes sectiones secundorum planorum cum planis parallelis effectas angulos pariter cõstituent æquales, necnon secunda plana erunt ad eadem plana parallela æqualiter ad eandem partem inclinata.

Sint duo parallela q̃cunq; plana, BD, HV, q̃bus incidat duo plana, HA, primũ, AV, secundũ se se secãtia ĩ recta, AG. Sint nunc alia duo plana quęcunq; parallela, LQ, &Δ, q̃bus pariter incidãt alia duo plana, LY, primũ, &, KΔ, secũdum, se se pariter secã-

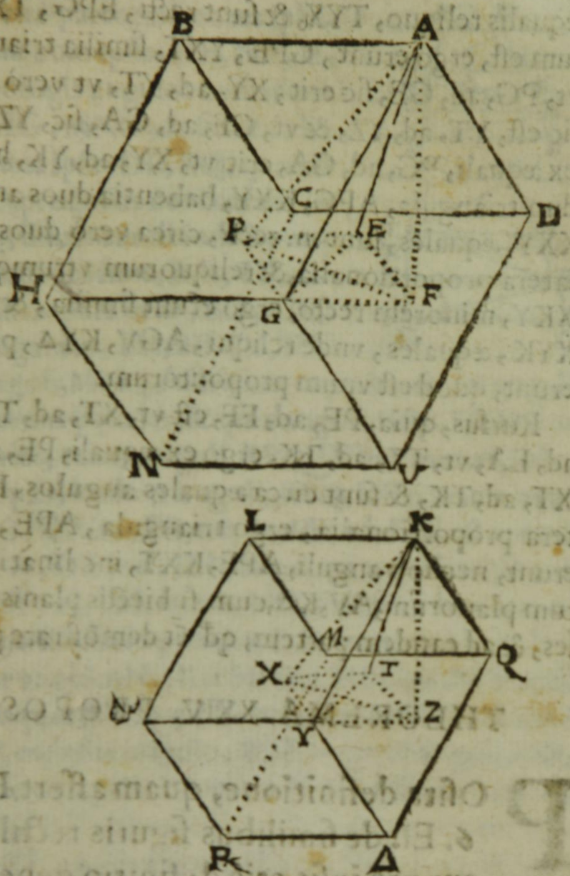


tia

tia in recta, KY, communes verò sectiones, BA, AD; LK, KQ, incidẽtium planorum cum planis parallelis cõtineant angulos æquales, sit nempè, BAD, angulus æqualis angu-
10. Vndecimi Ele. lo, LKQ, (erit.n.&, HGV, æqualis ipsi, &YΔ,) similiter ipsæ, AG, KY, cum ipsis, GH, Y&, angulos constituãt æquales, & prima plana, BG, LY, ad plana parallela, BD, HV; LQ, &Δ, sint æquè ad eandem partem inclinata. Dico angulos, AGV, KYΔ, æquales esse, necnon secunda plana, AV, KΔ, ad eadem parallela plana esse æqualiter ad eãdem
Def 3. Vndec. Elem. partem inclinata. Si igitur, AG, KY, essent dictis planis
18 Vndecimi Ele. parallelis perpendiculares, manifestum est, quod anguli, AGV, KYΔ, essent æquales, idest recti, & plana, AV, KΔ, eisdem planis parallelis erecta; sed non sint perpendiculares, & à punctis, A, K, demittantur ipsæ, AE, KT, quæ eisdem sint perpendiculares, incidant autem subiectis planis in punctis, E, T; deinde à puncto, A, ad, HG, VG, productas, ducantur perpendiculares, AF, quidem ipsi; HG, &, AP, ipsi, VG, incidentes in punctis, V, P, nisi fortè, AG, esset alteri earum perpendicularis, vt contingere potest, & iungantur, EP, EG, EF; similiter in alia figura cadant à pũcto, K, perpendiculariter super ipsas, &Y, ΔY, productas, si opus sit, ipsæ, KZ, KX, & iungantur similiter, TX, TY, &, TZ. Quoniam ergo anguli, AFG, KZY, sunt recti, ideò
47. Primi Elem. quadratum, AG, erit æquale duobus quadratis, AF, FG, sicut quadratum, KY, æquale duobus, KZ, ZY, est autem etiam quadratum, AF, æquale duobus quadratis, AE, EF, quia angulus, AEF, rectus est, & quadratum, KZ, pariter æquale quadratis, KT, TZ, ergo quadratum, AG, idest duo quadrata, AE, EG, (quia etiam, AEG, rectus est) æquabuntur tribus quadratis, AE, EF, FG, vnde, ablato communi quadrato, AE, quadratum, GE, æquabitur duobus quadra-
48. Primi Elem. tis, GF, FE; pari ratione autem probabimus quadratũ, YT,
Def. 6. Vndec. Elem. æquari quadratis, YZ, ZT, vnde anguli, GFE, YZT, recti erunt; & eodem modo probabimus esse rectos, EPG, TXY,

ergo

ergo anguli, AFE, KZT, erunt anguli inclinationis primorum planorum, BG, LY, cum subiectis planis, HV, & Δ, & ideò inter se æquales: Similiter anguli, APE, KXT, erũt inclinationes secundorum planorũ, AV, KΔ, cum eisdẽ subiectis planis. Quia ergo anguli, AFE, KZT, sũt



Defin. 6. Vnd. Ele.

æquales, &, AEF, KTZ, recti, erunt triangula, AFE, KZT, inter se similia, vt etiam triangula, AFG, KZY, inter se, nam anguli, AGF, KYZ, sunt quoq; æquales, &, AFG, KZY, recti; erit ergo, vt, EF, ad, FA, sic, TZ, ad, ZK, & vt, AF, ad, FG, sic, KZ, ad, ZY, ergo ex æquali, vt, EF, ad, FG, ita erit, TZ, ad, ZY, & sunt circa rectos, nempè æquales angulos, GFE, YZT, ergo triangula, GFE, YZT, pariter similia erunt, anguli igitur, EGF, TYZ, adæquabuntur, totus autem, PGF, toti, XYZ, æquatur, ergo reliquus, EGP, erit

6. Sexti Elem.

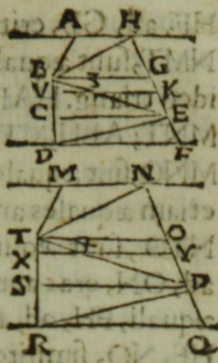
æqualis reliquo, TYX, & sunt recti, EPG, TXY, vt probatum est, ergo erunt, GPE, YXT, similia triangula, igitur, vt, PG, ad, GE, sic erit, XY, ad, YT, vt verò, GE, ad, GF, sic est, YT, ad, YZ, & vt, GF, ad, GA, sic, YZ, ad, YK, ergo ex æquali, PG, ad, GA, erit vt, XY, ad, YK, habemus ergo duo triangula, APG, KXY, habentia duos angulos, APG, KXY, æquales, sunt .n. recti, circa verò duos, PGA, XYK, latera proportionalia, & reliquorum vtrumq; simul, PAG,
7. Sexti Elem. XKY, minorem recto, ergo erunt similia, & anguli, PGA, XYK, æquales, vnde reliqui, AGV, KYΔ, pariter æquales erunt, quod est vnum propositorum.

Rursus, quia, PE, ad, EF, est vt, XT, ad, TZ; EF, autem ad, EA, vt, TZ, ad, TK, ergo ex æquali, PE, ad EA, erit vt, XT, ad, TK, & sunt circa æquales angulos, PEA, XTK, latera
6. Sexti Elem. tera proportionalia, ergo triangula, APE, KXT, similia erunt, necnon anguli, APE, KXT, inclinationis secundorum planorum, AV, KΔ, cum subiectis planis inter se æquales, & ad eandem partem, qđ ēt demōstrare propositū fuit.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXVII.

POsita definitione, quam affert Euclides lib. 6. El. de similibus figuris rectilineis, sequitur pro ipsis etiā definitio generalis, quam de omnibus similibus figuris planis ipse attuli.

Sint duæ vtcumq; figuræ rectilineæ, ABDEH, MTRPN;
Prima def. Sexti Ele. similes iuxta diffinitionē Euclidis, idest singulos habentes angulos æquales, A, M; B, T; D, R; P, E; HN, & circa æquales angulos latera proportionalia. Dico easdem esse similes iuxta meam definitionem. Ducantur duæ vtcumq; oppositæ earum tāgentes, quæ cum duobus ex lateribus homologis earumdem angulos æquales ab eadē parte contineant,



ſint autē ex vna parte tangentes ipſæ, AH, MN, quæ cum ipſis, HE, NP, lateribus homologis angulos continent æquales, AHG, MNO, & ſint ex alia parte tangentes ipſæ, DF, RQ, quæ cū ipſis, HE, NP, productis concurrant in punctis, F, Q, ducantur deinde à punctis angulorum, qui ſunt, B, E; TP, dictis tangentibus parallelæ, BG, CE, TO, SP, & iungantur, BH, BE, TN, TP. Quia ergo anguli, MNQ, AHF, ſunt æquales, etiam anguli, NQR, HFD, erunt ęquales, & quia anguli, NPR, HED, ſunt quoque æquales, etiam anguli, RPQ, DEF, erunt æquales, & reliqui reliquis, vnde trianguli, RPQ, DEF, erunt æquianguli, & ideò, QP, ad, PR, erit vt, FE, ad, ED, eſt autem, RP, ad, PN, vt, DE, ad, EH, ergo, ex æquali, QP, ad, PN, erit vt, FE, ad, EH, igitur, NQ, HF, ſunt ſimiliter ad eandem partem diuiſæ in punctis, E, P, quia verò angulus, NPS, æquatur angulo, NQR .i. HFD .i. HEC, &, NPR, ipſi, HED, ideò reliquus, SPR, ęquabitur reliquo, CED, eſt autē angulus, TRP, æqualis angulo, BDE, ergo trianguli, PSR, ECD, erunt æquianguli, & ideò, CE, ad, ED, erit vt, SP, ad, PR, &, ED, ad, EF, eſt vt, RP, ad, PQ, ergo ex æquali, & permutando, CE, ad, SP, erit vt, EF, ad, PQ, .i. vt, HF, ad, NQ. Similiter quia anguli, BDE, TRP, sūt ęquales, & circa eos latera ſunt proportionalia, ideò trianguli, BDE, TRP, erunt æquianguli, vnde anguli, DBE, RTP, &, BED, TPR, erunt æquales, ſunt autem æquales ipſi, CED, SPR, ergo reliqui, BEC, TPS, erūt æquales, & ideò trianguli, BCE, TSP, erunt ęquiāguli, & quia angulus, BEF, eſt ęqualis ipſi, TPQ, reliquus, BEH, erit æqualis reliquo, TPN, eſt autem, BGE, æqualis ipſi, TOP, ergo trianguli, BGE, TOP, erunt æquianguli, ergo, BG, ad, TO, erit vt, BE, ad, TP, ideſt vt, CE, ad, SP, ideſt vt, HF, ad, NQ, permutando, & conuertendo,

4. Sexti Elem.

Ex definit. Eucl.

6. Sexti Elem.

HF, ad, GB, erit vt, NQ, ad, OT; quia verò anguli, HAB, NMT, ſunt æquales, & circa eoſdem latera proportionalia, ideò triang. HAB, NMT, ſunt æquianguli, & anguli, AHB, MNT; ABH, MTN, inter ſe æquales, ergo cū anguli, AHG, MNO, ſint æquales, reliqui, BHG, TNO, erunt æquales, ſunt etiam æquales anguli, HGB, NOT, ergo trianguli, HBG, NTO, ſunt æquianguli, ergo, BG, ad, GH, erit vt, TO, ad, ON, erat autem, FH, ad, GB, vt, QN, ad, OT, ergo ex æquali, FH, ad, HG, erit vt, QN, ad, NO, ſunt igitur ipſæ, HF, NQ, ſimiliter diuiſæ, & ad eandem partem in punctis, G, O, & ipſæ diuidentes, BG, TO, ſunt vt ipſæ, HF, NQ.

6. Sexti Elem.

Ducantur nunc inter dictas oppoſitas tangentes eiſdem parallelæ duæ vtcunque, VK, XY, inter circuitum figurarum iam propoſitarum, & rectas, HF, NQ, comprehenſæ, ſimiliter ad eandem partem diuidentes ipſas, HF, NQ, in punctis, K, Y, ſecanteſque ipſas, BE, TP, in punctis, 3, 4, eſt ergo, FK, ad, QY, permutando, vt, HF, ad, QN, ideſt vt, FE, ad, QP, ergo, FK, ad, QY, erit vt, FE, ad, QP, & reliqua, EK, ad reliquam, PY, vt, FK, ad, QY, ideſt vt, FH, ad, QN; Similiter oſtendemus, vt, FH, ad, QN, ſic eiſe, GK, ad, OY, ergo, GK, ad, OY, erit vt, KE, ad, YP, &, permutando, GK, ad, KE, erit vt, OY, ad, YP, componendoque, GE, ad, EK, erit vt, OP, ad, PY, eſt verò, vt, GE, ad, EK, ita, BG, ad, 3K, & vt, OP, ad, PY, ita, TO, ad, Y4, ergo, BG, ad, 3K, erit vt, TO, ad, Y4, & permutando, BG, ad, TO, erit vt, 3K, ad, 4Y, eſt verò vt, BG, ad, TO, ita, HF, ad, NQ, ergo, 3K, ad, 4Y, erit vt, HF, ad, NQ, ſimiliter, quia ipſæ, VK, XY, diuidunt ſimiliter ad eandem partem ipſas, BC, TS, in punctis, V, X, ac diuiduntur ipſæ, GE, OP, in punctis, K, Y, ideò eodem modo oſtendemus ipſas, V3, X4, eſſe vt ipſas, CE, SP, ideſt vt ipſas, HF, NQ, erāt autem, 3K, 4X, vt ipſæ, HF, NQ, ergo totæ, VK, XY, erunt vt ipſæ, HF, NQ, habemus igitur figuras, ADE, MRP, in quibus ductæ ſunt oppoſitæ tangentes, AH, DF, MN, RQ, quibus in-

ciderunt ipsæ, HF, NQ, ad eundem angulum ex eadem parte, inuentum est autem eas, quæ inter dictas, HF, NQ, & circuitum figurarum eisdem tangentibus vtcunq; ducuntur æquidistantes, & secant dictas, HF, NQ, similiter ad eandem partem, eodem ordine sumptas, esse vt ipsas, HF, NQ, ergo figuræ, ADE, MRP, quæ erant similes iuxta definitionem Euclidis, erũt etiam similes iuxta definitionem meam, & erunt dictæ tangentes regulæ homologarum earundem, & ipsarum, ac dictarum similium figurarum incidentes ipsæ, HF, NQ, quod erat ostendendum. Defin. 10. huius.

COROLLARIVM.

Quia verò oppositæ tangentes, AH, DF, MN, RQ, ductæ sunt vtcumque, angulos tamen æquales ad eãdem partem cum homologis laterib. continẽtes, ideò quascumq; duxerimus oppositas tangentes in figuris rectilineis similibus iuxta Euclidem, dummodo faciant angulos æquales ad eandem partem cum lateribus homologis, easdem esse regulas homologarum similium figurarum poterit probari.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVIII.

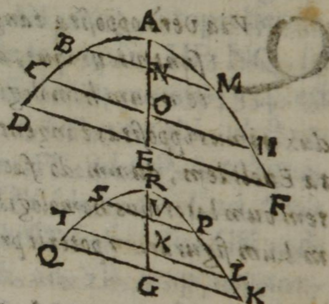
POsita infrascripta definitione similium portionum sectionum coni, illi adiuncto, quod infra dicetur, sequitur pro ipsis etiam mea definitio generalis similium planarum figurarum. Hoc autem dico pro spatijs sub ipsis sectionibus, & rectis lineis contentis, non autem pro ipsis tanquam lineis, licet crediderim Apolloniũ ipsarum similium sectionum tamquam linearũ, non autem figurarũ, quæ fiunt ab ipsis, similitudinem attendisse,

diſſe, ego verò ipſam recipio tamquam ipſarum figurarum ſimilitudini congruam, dum illi adiungitur, quod in ipſa Propoſ. explicatur.

DEFINITIO.

Similes portiones ſectionum coni ſunt, in quarum ſingulis ductis lineis baſi parallelis numero æqualibus, ſunt ipſæ parallelæ, & baſes ad abſciſſas diametrorũ partes ſumptas à verticibus, in ijſdem rationibus, tum abſciſſæ ipſæ ad abſciſſas: Apollonius lib. 6. Conicorum, vt refert Eutocius.

Sint ſimiles portiones ſectionum coni, DAF, QRK, in baſibus, DF, QK, quarum diametri ſint ipſæ, AE, RG, ſecentur autem ſimiliter ipſæ diametri in punctis, N, O; V, X; & ſit, DF, ad, EA, vt, QK, ad, GR, &, CH, ad, OA, vt, TL, ad, XR, &, PM, ad, NA, vt, SP, ad, VR; has igitur Apollonius in ſupradicta definitione ſimiles vocat, mihi autem hoc opus eſt illi adiũgere .ſ. quod anguli baſibus, & diametris,



ad eandem partẽ contenti ſint æquales, vt angulus, AED, ipſi, RGQ, ſi.n. hoc non ponatur poſſet contingere eſſe baſes, DF, QK, æquales, & ipſas, AE, RG, in quo caſu tot figuras ſimiles, & æquales, ex. g. ipſi, ADF, poſſemus habere, quot ſunt variationes inclinationum diametrorum ad baſes, quam tamen variationem per definitionem ſupradictam excludere neceſſarium eſſe exiſtimaui. Suppoſito igitur, quod tali definitioni hoc adiungatur, dico eam cum mea concordare, ſi pro ipſis ſectionibus tanquam figuris intelligatur. Ductis enim per vertices, A, R, baſibus, DF, QK, parallelis, illæ tangẽt dictas portiones, & inter eaſdem ductas habebimus ipſas, AE, RG, illis ad eundem angulum

inci-

incidẽtes ex eadem parte, quibus similiter ad eandem partem diuisis, vt in punctis, N, O, V, X, & per eadem ductis ipsis tangentib. parallelis, BM, CH, SP, TL, inuenimus eas, q inter ipsas, AE, RG, & circuitum figurarũ, ADF, RQK, ad eandem partem continentur, & diuidunt ipsas similiter ad eãdem partem, eodem ordine sumptas, esse in proportione ipsarum, AE, RG, nam quia, DF, ad, EA, est vt, QK, ad, GR, permutando, DF, ad, QK, erit vt, EA, ad, GR, & quia ipsæ, AE, RG, sunt diametri, ad quas ordinatim applicãtur dictæ parallelæ, ideò ab eisdem bifariam diuidentur, ergo &, DE, ad, QG, &, EF, ad, GK, erit vt, EA, ad, GR, eodem modo ostendemus tum, CO, ad, TX, tum, OH, ad, XL, esse vt, OA, ad, XR, .i. vt, EA, ad, GR, & sic, BN, ad, SV, &, NM, ad, VP, esse vt, NA, ad, VR. .i. vt, EA, ad, GR, sunt igitur figuræ, ADF, RQK, similes iuxta meam definitionem, earum verò & tangentium oppositarum (quarum duæ ex vna parte sunt ipsæ, DF, QK,) incidentes sunt ipsæ, AE, RG. Defin. 10.

SCHOLIVM.

***A** Ffert Commandinus aliam definitionem similium hyperbolarum, scilicet similes esse, quarum coniuncta diametri inter se, vel quarum figura latera eandem proportionem habent, quam David Riualtus in Com. in Arch. lib. de Conoidib. & Sphæroidibus ad def 18. ostendit concordare cum supradicta Apollonij, quam videat, qui voluerit: Hæc igitur eodem modo, quo illa Apollonij, cum mea pariter concordabit (sumpta tamen hyperbola tamquam figura) vnde hac queq; hypotesi, si opus fuerit, pariter vtemur ad passiones inde dependentes demonstrandas.*

LEMMA I.

SI sint duæ similes solidæ figuræ iuxta definitionem 9. Vndec. Elem. & in earum altera duæ assumantur in

am-

ambitu quæcumq; figuræ coincidentes, illæ erunt ad inuicem æquè ad eandem partem inclinatæ, ac aliæ duæ, quæ in reliqua solida figura eisdem similes esse supponuntur.

Sint similes solidæ figuræ, AN, KR, in earum autem altera, AN, sumantur duæ quæcumq; figuræ inuicem coincidentes, AV, VH, quibus in reliqua similes sint, KΔ, quidem, AV, &, Δ&, ipsi, HV: Dico vtrasque, AV, VH, æquè ad inuicem, & ad eandem partem esse inclinatas, ac sunt ipsæ, KΔ, Δ&. Vel ergo, AG, KY, sunt subiectis planis perpendiculares, & tunc, AV, KΔ, erunt ipsis, HV, &Δ, erecta, vel non, & tunc demittantur à punctis, A, K, subiectis planis perpendiculares, AE, KT, & super ipsas, HG, VG, productas (si opus sit, & nisi, AG, KY, sint vel ipsis, HG, &Y, vel ipsis, GV, YΔ, perpendiculares) similiter ad angulos rectos cadant, AP, KX, quidem ipsis, VG, ΔY, &, AF, KZ, ipsis, HG, &Y, perpendiculares, iunganturque, PE, XT, PF, XZ, &, FE, ZT. Quoniam ergo, APG, est angulus rectus, erit quadratum, AG, æquale quadratis, GP, PA, quadratũ verò, PA, æquatur duobus quadratis, PE, EA, propter angulum rectum, AEP, ergo quadratum, AG, hoc est duo quadrata, GE, EA, æquabuntur tribus quadratis, GP, PE, EA, & ablato communi quadrato, EA, quadratum, GE, æquabitur quadratis, GP, PE, ergo, EP, erit perpẽdicularis ipsi, PV, cui etiam est perpendicularis, AP, ergo, APE, erit inclinatio planorum, AV, VH. Eodem modo ostendemus, KXT, esse inclinationem planorum, KΔ, Δ&, & angulos, EFG, TZY, esse rectos. Quoniam verò angulus, AGV, æquatur ipsi, KYΔ, (sunt.n.figuræ, AV, KΔ, similes ex hypotesi) etiã, AGP, æquabitur, KYX, &, APG, KXY, recti sunt, ergo triangula, APG, KXY, similia erunt. Eodem modo probabimus etiam triangula, AGF, KYZ, esse similia, ergo, PG, ad, GA, erit vt, XY, ad, YK, &, GA, ad, GF, vt, YK, ad, YZ, ergo ex æquali, PG, ad, GF, erit vt, XY, ad, YZ, & sunt latera ꝓportionalia circa ęquales angulos, PGF, XYZ, (sunt

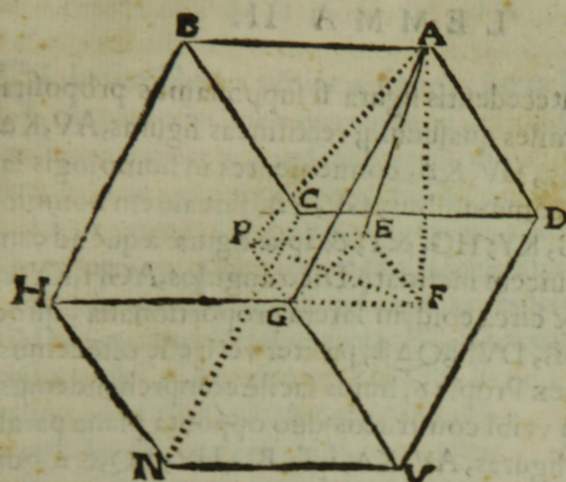
18 Vndecimi Ele.

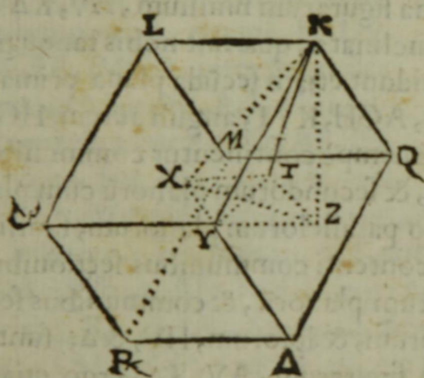
47. Primi Elem.

Def.3. Vndec. Elem.

48. Primi Elem.

Def.6. Vndec. Elem.





(sũt.n.ęquales ijs, qui sunt ad verticem, nempè,HGV, & YΔ, qui adæquantur, cum sint similiũ figurarũ, HGV, &YΔ,) ergo triangula, P GF,XYZ, erunt similia, & anguli,G PF, YXZ, vt &, GFP, YZ X, inter se æquales, ergo ipsi,FPE, ZXT; PFE, ZXT, inter se quoq; erũt æquales, cum sint residui rectorũ, GPE, GFE,YXT, YZT; ergo triangula,PEF, XTZ, pariter similia erunt. Erit ergo, AP, ad, PG, vt, KX, ad, XY; PG, ad, PF, vt, XY, ad, XZ; &, PF, ad, PE, vt, XZ, ad, XT, ergo ex æquali, AP, ad, PE, erit vt, KX, ad,XT, & sunt anguli, AEP, KTX, recti, ergo triangula, APE, KXT, similia erunt, & anguli, APE, KXT, æquales, qui sunt inclinationes planorum, AV, KΔ, ad plana,VH, Δ&, ad eandem partem, quod ostendendum erat.

6. Sexti Elem.

4. Sexti Elem.

7. Sexti Elem.

LEMMA II.

Iux.def.1. Sexti Ele.

IN eadem antecedentis figura si supponamus propositas esse duas similes quascumq; rectilineas figuras, AV, KΔ, inter se, necnon, HV, &Δ, conuenientes in homologis lateribus vtrisq; communibus, GV, YΔ, sint autem homologæ inter se, AG, KY; HG, &Y; & ipsæ figuræ æquè ad eandem partem inuicem inclinatę. Dico angulos, AGH, KY&, æquales esse, & circa eosdem latera proportionalia, quod etiam de angulis, DVN, QΔ℞, pariter verũ esse ostẽdemus.

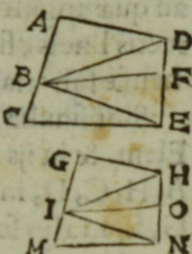
Hoc autem ex Prop. 26. huius facilè comprehendemus, sunt .n. (ijsdem vt ibi constructis) duo opposita plana parallela tangentia figuras, AV, KΔ, ipsa, BD, HV; LQ, &Δ, quibus incidunt plana figurarum similium, AV, KΔ, æquè ad eandem partem inclinata, quæ sint nobis tanquam prima, ijsdem autem incidunt etiam secũda plana prima diuidentia, nempè plana, AGH, KYT, anguli autem, HGV, &YΔ, sunt æquales, qui nempè continentur communibus sectionibus primorum, & secundorum planorũ cum planis, HV, &Δ, quæ sunt duo parallelorum planorum, similiter anguli, AGV, KYΔ, (contenti communibus sectionibus primorum, & secundorum planorũ, & communibus sectionibus primorum planorum, & ipsorum, HV, &Δ,) sunt æquales, sunt .n. similium figurarum, AV, KΔ, ergo etiam anguli, AGH, KY&, æquales erunt, vt in Prop. 26. iam ostensum est. Cum autem figuræ, AV, KΔ, sint similes, &, AG, KY, latera homologa, erit, AG, ad, GV, vt, KY, ad, YΔ, ostendemus autem eadem ratione, VG, ad, GH, esse vt, ΔY, ad, Y&, ergo ex æquali, AG, ad, GH, erit vt, KY, ad, Y&. Eodem modo probabimus angulos, DVN, QΔ℞, æquales esse (siue plana, AH, DN; K&, Q℞, sint parallela, siue non, hoc .n. nihil refert) & circa eos latera esse proportionalia, quod ostendere opus erat.

LEM-

LEMMA III.

SI in similibus rectilineis figuris, iuxta Euclidem, ducantur rectæ lineæ quæcumque, earundem latera homologa similiter ad eandem partem diuidentes, ipsæ diuident easdem in similes figuras, similes autem erunt, quæ ad eandem partem diuidentium linearum cōstituentur, & ipsæ secantes earundem erunt homologa latera.

Sint similes rectilineæ figuræ iuxta Euclidem, ACED, GMNH, quibus incidant rectæ, BF, IO, secantes latera homologa, AC, GM; necnon, DE, HN, similiter ad eandem partem, vt, AC, GM, in punctis, B, I, &, DE, HN, in punctis, F, O. Dico figuras ab eisdem constitutas ad eandem partem, nempè, BADF, IGHO; BCEF, IMNO, inter se similes esse. Ducantur à punctis, B, I, ad angulos oppositos rectæ lineæ, BD, BE, IH, IN, vt si figuræ sint quadrilateræ, vel multilateræ, in triangula disseparentur. Quoniam ergo, AC, GM, similiter diuiduntur in, B, I, erit, BA, ad, IG, vt, AC, ad, GM, idest, vt, AD, ad, GH, ergo permutando, BA, ad, AD, erit vt, IG, ad, GH, & anguli, BAD, IGH, sunt æquales, ergo, BAD, IGH, erunt triangula similia, ergo anguli, ADB, GHI, æquales erunt, sunt autem æquales etiam, ADF, GHO, ergò reliqui, BDF, IHO, erunt æquales, est verò, BD, ad, DA, vt, IH, ad, HG, &, AD, ad, DF, vt, GH, ad, HO, ergo ex æquali, BD, ad, DF, est vt, IH, ad, HO, ergo triangula, BDF, IHO, pariter similia erunt, & anguli, DFB, HOI, inter se, necnon, DBF, HIO, inter se æquales, ergo anguli, ABF, GIO, ADF, GHO, erunt etiam æquales, & figuræ, ABFD, GIOH, æquiangulæ, & cum, BA, ad, DF, FB, binæ sint in eadem ratione cum, IG, GH, HO, OI, patet, quod etiam circa æquales angulos sunt latera propor- 6. Sexti Elem.



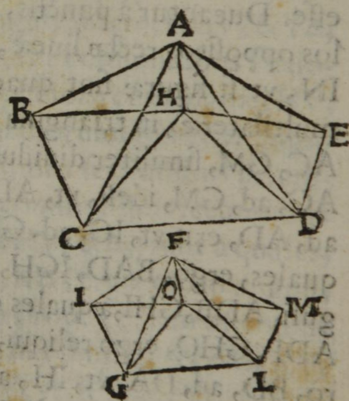
tionalia, ergo ipsæ figuræ, BADF, IGHO, similes erũt. Eodem autem modo ostendemus similes esse, BCEF, IMNO, patet autem ipsas, BF, IO, esse earum latera homologa, quod erat demonstrandum.

Defin. 1. Sexti Ele.

LEMMA IV.

SI in similibus solidis planis contentis iuxta def. 9. Vndec. Elem. quatuor quælibet puncta sumantur in vnoquoq; eorundem (non tamen in eodem plano constituta) ad quæ anguli solidi æquales terminantur, illaq; iungãtur rectis lineis, fient similes pyramides triangulatæ comprehensæ sub triangulis, ijsdẽ rectis lineis iungentib. cõtentis.

Sint similia solida, AHCD, FOGL, iuxta def. 9. Vndec. Elem. & in ijs accepta quatuor quæcumq; puncta, nempè, A, H, C, D, in vno, &, F, O, G, L, in alio solido, quæ non sint in eodem plano, sed ad angulos æquales constituta, iũganturq; rectis lineis, AH, AC, CD, CH, HD; FO, FG, FL, OG, GL, LO, siue hæc iungentia sint ipsorum similium solidorum latera. Dico pyramides, AHCD, FOGL, similes esse. Vel ergo plana has pyramides continentia, sunt in ambitu solidorum, vt



ex. g. CHD, GOL, & tunc erunt similia ex ipsa definitione, vel non sunt in ambitu, tunc autem probandum est nihilominus esse similes, vt non sint in ambitu ipsa triangula, ACH, FGO, sint verò in ambitu triangula, ABC, FIG; ABH, FIO, HBC, OIG, ergo tria hæc tribus iam dictis similia erunt, ergo & bases, ACH, FGO, similes erunt, nam

cum

cum sit, AC, ad, CB, vt, FG, ad, GI; BC, ad, CH, vt, IG, ad, GO, erit ex æquali, AC, ad, CH, vt, FG, ad, GO, eadem ratione ostendemus, CH, ad, HA, esse vt, GO, ad, OF, ex quo habebitur ex æquali, CA, ad, AH, esse vt, GF, ad, FO, ergo triangula, ACH, FGO, similia erunt. Eodem modo probabimus triangula, AHD, FLO, ACD, FGL, esse similia, ex quo concludemus ipsas pyramides similes esse. Quod si tria triangula ad, B, I, terminantia omnia non sint in ambitu, ostendemus tamen illa esse similia, erunt.n. vel bases pyramidum, quarum tria triangula verticalia erunt in ambitu, vel saltem aliarum pyramidum, quarum triangula similia esse probabuntur, quia erunt bases pyramidum tria triangula verticalia in ambitu habentium, ad hæc.n. tandem deuenire necesse erit: Igitur ostensum est, quod proponebatur. 5. Sextĩ Elem.

COROLLARIVM.

QVia verò in pyramidibus triangulatis, BAHC, IFGO, existentibus similibus illarum triangulis verticalibus, bases, ACH, FGO, necessariò similes esse ostensa sunt, ideò ex hoc colligimus si in duabus pyramidibus triangulatis tria verticalia triangula tribus verticalibus triangulis similia sint, etiam bases similes esse.

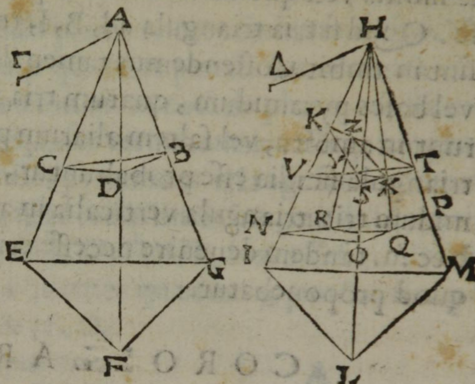
LEMMA V.

SI duo similia triangula fuerint subiectis planis æquè ad eandem partem inclinata, ita vt communes cum illis sectiones sint earum latera homologa, quæ tanquam bases assumantur; ab eorum autem verticibus rectæ lineæ in sublimi fuerint constitutæ, angulos æquales cum eorum lateribus homologis continentes, illæ erunt subiectis planis æqualiter inclinatæ, vel eisdem ambo parallelæ; si autem

fue-

fuerint inclinatæ, & vſque ad ſubiecta plana producantur, iunganturq; puncta occurſuum cum extremis baſium dictorum triangulorum, pariter hinc conſtitutæ pyramides ſimiles erunt.

Sint ſimilia triangula, ABD, HPO, ſubiectis planis æquè inclinata, in baſibus, BD, PO, à quorum verticibus, A, H, rectæ lineæ, AC, HN, in ſublimi conſtitutæ cõtineant cum homologis eorũ lateribus angulos æquales, ſint nempè anguli, CAB, NHP, necnon, CAD, VHO, inter ſe æquales. Dico ipſas, AC, HN, ſubiectis planis eſſe æqualiter inclinatas,



vel eiſdem ambo parallelas, ac (ſi ſint inclinatæ, incidãtq; ipſis in punctis, C, N, iunganturque, CB, CD, NP, NO,) pyramides, ACDB, HNOP, ſimiles eſſe. Sumatur ergo in, AD, etiam quantumuis protenſa vbicumq; punctum, F, & accipiatur in, HO, producta, ſi opus ſit, HL, æqualis, AF, & indefinitè extenſis lineis, AC, AB, HN, HP, ducantur in planis, FAC, FAG, LHN, LHP, à punctis, F, L, ipſis, AF, HL, perpendiculares, FE, FG; LI, LM, occurrentes ipſis, AE, AG, HI, HM, in punctis, E, G, I, M, & iungantur, EG, IM. Quoniam ergo duo anguli, AFG, HLM, recti, &, FAG, LHM, ſunt æquales, & latera, AF, HL, æqualia, erunt etiã, FG, LM, GA, MH, æqualia; eodem modo oſtendemus æqualia eſſe, FE, LI, EA, IH, vnde cum ſint æquales, EA, IH, AG, HM, & anguli, EAG, IHM, pariter æquales, etiam baſes, EG, IM, æquales erunt, & pyramides, AEFG, HILM, ſimiles, & æquales ad inuicem exiſtent. Suſpendatur nunc py-

26. Primi Elem.

4. Primi Elem.

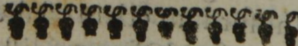
pyramis, AEFG, & ponatur punctum, F, in, L, demittaturque, FG, super, LM, cui congruet, sed & triãgulo, EFG, cadente super, ILM, punctum, E, erit in, I, ac latus, AF, ipsi HL, alioquin duæ eidem plano, ILM, perpendiculares essent eductæ ab eodem puncto, L, quod est absurdum (sunt autem, AF, HL, perpendiculares planis, ELG, ILM, hoc est solo plano, ILM, cum superponuntur, ex eo, quod duabus, IL, IM, sint perpendiculares in puncto, L,) ergo, FA, cadet super, LH, & punctum, A, in, H, unde etiam, EA, cadet in, IH, &, AG, in, HM, punctum, B, verò, esto, quod sit in, T, D, in, S, &, C, in, V, erit etiam, DB, congruens ipsi, ST, CD, VS, &, CB, ipsi, VT, & quia angulus, ABD, æquatur ipsi, HPO, ABD, autem est etiam æqualis, HTS, ergo, HTS, HPO, sunt æquales, &, ST, parallela, OP. Dico etiã triangulum, VST, æquidistare ipsi, NOP, si.n. hoc non sit, quia, ST, est parallela ipsi, OP, poterit per, ST, duci planum ipsi, NOP, parallelum, ducatur, & producat in pyramide triangulum, KST, acta autem à puncto, H, ipsi, OP, perpendiculari, quæ sit, HQ, secans, ST, in, X, ducatur in plano, NOP, recta, QR, à puncto, Q, perpendicularis ipsi, OP, & iungatur, HR, triangulumque, HRQ, secet duo triangula, VST, KST, in rectis, YX, ZX. Quia ergo triangula, KST, NOP, sunt parallela, erunt etiam ipsæ, ZX, RQ, parallelæ, sed &, ST, OP, sunt parallelæ, ergo anguli, ZXS, RQO, erũt æquales, rectus ergo est etiam ipse, ZXS, sed etiam, SXH, rectus est, ergo, SX, est duabus, ZX, XH, perpendicularis, & subinde plano per ipsas transeunti, & consequenter, SXY, est rectus, unde, HXZ, erit inclinatio planorum, HST, KST, &, HXY, inclinatio planorum, HST, SVT, hæc autem est æqualis inclinationi planorũ, HOP, NOP, ex hypotesi, idest angulo, HQR, idest angulo, HXZ, ergo angulus, HXY, qui est totum, est æqualis angulo, HXZ, eiusdem parti, quod est absurdum, ergo absurdum etiam est dicere triangulum, VST, non æquidistare ipsi, NOP, æquidistat ergo, & ipsæ,

VS,

Defin. 10. Vnd. El.
7. Pri. El.
13. Vnd. Elem.
4. Vnd. El.
4. Pri. El.
16 Vnd. Elem.
10. Vnd. Elem.
4. Vnd. El.

16. Vnd. Elem. VS, VT, ſunt etiam parallelæ ipſis, NO, NP, & triangula, VHS, ipſi, NHO, VHT, ipſi, NHP, necnon, VST, ipſi, NOP, ſunt ſimilia, ergo pyramides, HVST, HNOP, ſunt ſimiles, eſt autem pyramis, HVST, ſimilis, immo & æqualis, ipſi, ACDB, ergo pyramides, ACDB, HNOP, inter ſe ſimiles erunt, & anguli, ACB, HVT, ACD, HVS, inter ſe æquales, ergo, AC, HV, rectæ lineæ ſtantes in ſublimi, & cum ipſis, CD, CB, VS, VT, angulos æquales continentes (à quibus etiam contenti anguli, DCB, SVT, ſunt
35. Vnd. Elem. æquales) erunt ad plana triangulorum, CDB, NOP, æqualiter inclinata, & ſunt ipſæ pyramides, ACDB, HNOP, ſimiles, vt propoſitum fuit demonſtrare.

Si verò rectæ lineæ angulos æquales cum ipſis, DA, AB, OH, HP, continentes eſſent ipſæ, AΓ, HΔ, quarum, ΔH, eſſet parallela plano, VST, probaremus etiam, ΓA, eſſe parallelam plano, CDB, alioquin ſi cum ipſo producta concurreret, etiam, ΔH, ex ſupra oſtenſis, producta concurreret cum plano trianguli, VST. Vel præintellectis duabus iam datis, AC, HN, & ſuppoſita ſuperiori conſtructione, oſtenderemus, vt ſupra, tria latera, ΓA, ΔH; AD, HO; AB, HP; eſſe ad inuicem ſuperpoſita, vnde ſi, ΔH, æquidiſtat plano, NOP, etiam neceſſe eſſe concluderetur, ΔH, ſeu, ΓA, in ea cõſtitutam, æquidiſtare plano, NOP, vel ipſi, VST, ſeu, ΓA, ipſi, CDB, quod erat oſtendendum.



CO-

COROLLARIVM.

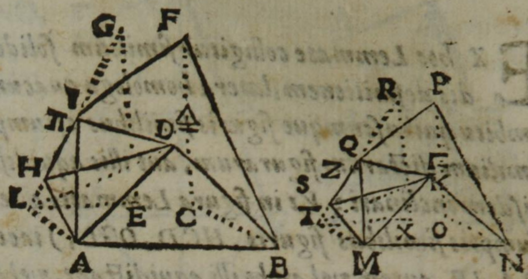
Ex hoc Lemmate colligitur similium solidorum, iuxta Euclidis definitionem, latera homologa quæcunque, vel (duabus in ambitu quibuscumque figuris similibus assumptis) iacere in plano similium dictarum figurarum, aut illis æquidistare, vel æqualiter eisdem inclinari; Vt in figura Lemmatis 4. ex. g. CD, GL, (assumptis similibus figuris, HCD, OGL,) iacent in earum plano, BA, IF, autem vel ambo illi æquidistant, vel eisdem sunt æqualiter inclinata, nam iunctis, AC, AH, FG, FO, nisi hæc sint latera dictorum solidorum, fiunt anguli, BAH, IFO, BAC, IFG, æquales, & triangula, ACH, FGO, similia, nam pyramides, ABCH, FIGO, sunt inter se similes, ipsa verò triangula, ACH, FGO, æquè ad eandem partem inclinantur ipsis, HCD, OGL, cum etiam, AC HD, FGLO, pyramides sint similes ex eodem Lemmate 4. vnde vel, AB, FI, æquidistãt basibus, CHD, GOL, vel sunt eisdẽ æqualiter inclinata, idem de cæteris homologis quibuscumq; lateribus, quibuslibet similibus figuris in ambitu aßumptis comparatis, pariter intelligendum erit. Lemma 4. Lemma 1.

LEMMA VI.

SI in similibus solidis iuxta Euclidem ducantur plana duabus quibuscumq; similibus figuris in eorum ambitu assumptis parallela, quæ vt eorum bases accipiantur; diuidant autem ducta plana eorum altitudines, respectu dictarum basium captas, similiter ad eandem partem, quæcumq; latera homologa ab eisdem secabuntur, similiter ad eandem partem diuidentur.

Sint in similibus solidis iuxta Euclidis definitionem 9. Vndec. Elem. assumptæ in ambitu duæ similes figuræ tanquam bases, ex.g. triangula similia, ADB, MKN, sint verò de ambitu etiam descripta triangula similia, AHI, MSQ; AHD, MSK; &, IHD, QSK; quibus etiam adiungantur la-

tera homologa, IF, QP, ad vertices, F, P, respectu dictarum basium captos, pertingentia, reliquis dimissis figuris eorum ambitũ



complentibus, ne nimia fieret Schematis confusio, sint autem à verticibus, F, P, demissæ altitudines respectu basium, ADB, MKN, ipsæ, FC, PO, planis basium in punctis, P, O, occurrentes, ductis autem duobus planis quomodocumq; basibus parallelis, & secantibus altitudines, FC, PO, similiter ad eandem partem in punctis, Δ, Γ, eadem secent latera homologa ex. g. IH, QS, in punctis, ΠZ. Dico in eisdem secari similiter ad eandem partem. Producantur ergo, HI, SQ, hinc inde, ita vt (nisi hoc ipsis cõtingat absq; eo, quod producantur) ad plana basium, DAB, KMN, & eisdem æquidistantia plana per vertices, F, P, ducta, terminentur, vt in punctis, L, T, G, R, à punctis verò, G, R, demittantur ad plana dictarum basium perpendiculares, GE, RX, illis incidentes in, E, X, & iungantur, L, E, TX. Similiter à verticibus, F, P, ad puncta basium, B, N, ducantur, FB, PN, & iungantur, BC, NO. Quoniam ergo latera homologa, HI, SQ, continent cum homologis lateribus similium triangulorum, AID, MQK, ad eandem partem basibus, DAB, KMN, inclinatorum (quia, IADB, QMNK, essent similes pyramides) angulos æquales, & producta incidunt in plana dictarum basium in, L, T, erũt eisdem æqualiter inclinata, ergo anguli, GLE, RTX, erunt æquales, &, GEL, RXT, sunt recti, ergo triangula, GLE, RTX, similia erunt, ergo, GL, ad, RT, erit vt, GE, ad, RX, idest vt, FC, ad, PO. Vlterius si iungeremus, FA, FD, PM, PK, fierent simi-

2a Lem. 5.

ſimiles pyramides, FDAB, PKMN, vnde pateret, FB, PN, eſſe ad plana baſium, DAB, KMN, ſimiliter inclinata, & ſubinde angulos, FBC, PNO, eſſe æquales, & cum ſint recti, FCB, PNO, triangula, FBC, PNO, eſſe æquiangula, & vt, FC, ad, PO, ita eſſe, FB, ad, PN, etiam manifeſtum eſſet, ſed vt, FC, ad, PO, ita eſt, GL, ad, RT, & vt, FB, ad, PN, ita, BD, ad, NK, & ita quodcunq; latus in ſolido, FHB, ad latus ſibi homologum in ſolido, PSN, ideſt ita, IH, ad, QS, ergo vt, GL, ad, RT, ita, HI, ad, SQ, & ita cōpoſitum ex reſiduis, LH, IG, ad compoſitū ex reſiduis, TS, QR, ſunt aūt, LH, TS, latera homologa ſimiliū pyramidum, HLAD, STMK, ergo vt, HA, ad, SM, vel vt, HI, ad, SQ, ita, HL, ad, ST, ergo etiam reliqua, IG, ad reliquam, QR, eſt vt, HI, ad, SQ, vel vt altitudo, FC, ad, PO, vel vt, GL, ad, RT, vel vt, GΠ, ad, RZ, ſunt enim & ipſæ, GL, RT, ſimiliter ad eandem partem ſectæ in punctis, Π, Z, nam ſimiliter ſecantur ac, FC, PO, in punctis, Δ, Γ, ergo etiam reliqua, IΠ, ad, QZ, erit vt tota, GΠ, ad totam, RZ, ideſt vt, FC, ad, PO. Eodem modo oſtendemus, ΠH, ad, ZS, eſſe vt, FC, ad, PO, ergo, IΠ, ad, QZ, erit vt, ΠH, ad, ZS, & permutando, IΠ, ad, ΠH, erit vt, QZ, ad, ZS, ſunt ergo latera homologa, IH, QS, ſimiliter ad eandem partem ſecta à præfatis planis, quod eodem modo de quibuſcumq; homologis lateribus, quæ contingat dictis planis ſecari, pariter oſtendemus, hoc verò demonſtrare propoſitum fuit.

Ex Lem. 4.

19. Quin. Elem.

Ex Lem. 5.

COROLLARIVM.

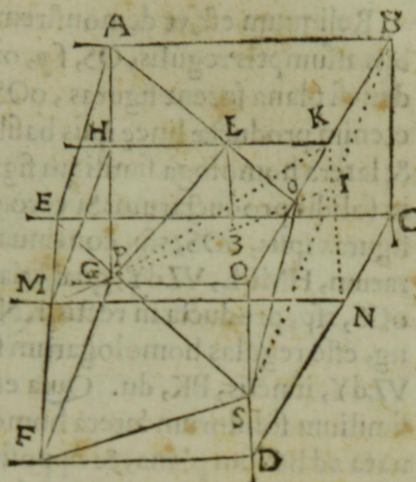
EX hoc autem Lemmate inſuper habetur nedum latera homologa ſimilium ſolidorum, ſed etiam, ſi illa producantur vſq; ad oppoſita tangentia plana, eorum reſidua, vel ipſa tota, eſſe vt eorum dictas altitudines.

THEOREMATA XXVI. PROP. XXIX.

SI in duobus similibus solidis iuxta def. 9. Vndec. Elem. accipiantur, ac in eorumdem ambitu, duæ quæcumque similes figuræ planæ tanquam bases, quibus parallela ducantur quæcumq; plana eadem secantia, necnon eorum altitudines, respectu dictarum basium assumptas, similiter ad eandem partem diuidentia. Productæ ijsdem in solidis figuræ similes erunt iuxta definitionem 10. huius, & omniũ homologæ duabus quibusdam regulis æquidistabunt.

Sint similia solida iuxta def. 9. Vndec. Elem. ipsa, AEFSOGo, TI&pf8s, in eorum autem ambitu capiantur similes quæcumq; figuræ planæ, OGFS, f8&p, quibus parallela ducantur duo quæcumq; plana eadem secantia, necnon & altitudines respectu dictarum basium assumptas similiter ad eandem partem diuidentia, ac in ipsis solidis figuras, LHMP, YVZd, producentia. Dico has esse similes figuras planas iuxta def. 10. huius, omniumq; sic productarum in dictis solidis homologas duabus quibusdã regulis, vt ex. g. ipsis, OS, fp, æquidistare. Igitur figurarum ambientium dicta solida duæ aliæ similes quæcumq; capiantur cum basibus concurrentes, vt ex. g. oOS, sfp, similia triangula, ducantur autem præfatis basibus opposita tangentia plana, AC, TR, secantia producta plana figurarum, oOS, spf, in rectis, BC, QR, quibus occurrant, Oo, fs, productæ vt in punctis, B, Q, & iungantur, SB, pQ, esto autem, quod plana figurarum, LHMP, YVZd, diuiserint plana figurarum, oOS, sfp, producta in rectis, KN, ug, quæ ab ipsis, BS, Qp, BO, Qf, secentur in, I, X, Ku, & iungantur, LK, PI, Yu, dX.

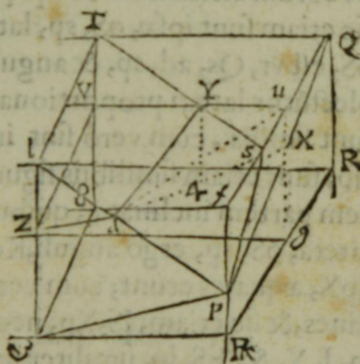
Quo-



Quoniam ergo plana figurarum, HMPL, VZ dY, prædictas altitudines similiter ad eãdem partem diuidentia, secant latera homologa, ao, Ts, similiter ad eãdem partem in pũctis, L, Y, vt etiã, AG, T8, in, HV, erunt figuræ, ALH, TYV, ad eãdem partem secantiũ, HL, VY, constitutæ inter se similes, & earum latera homologa ipsæ, HL, VY; eodem modo ostendemus similes esse ipsas, EALP, IT Yd, & earum latera homologa ipsas, LP, Yd, sunt autem figuræ, AEPL, ALH, inuicem ad eãdem partem æquè inclinatæ, ac ipsæ, T IdY, TYV, cum sint in planis similium figurarum, A ESo, T I ps, AGOo, T8 fs, quæ sunt inuicem ad eandem partem æquè inclinatæ, ergo anguli, HLP, VYd, homologis lateribus contenti erunt æquales, & circa eosdem latera erunt proportionalia. Eodem modo ostendemus cęteros angulos, LPM, YdZ, inter se, necnon, PMH, dZV, ac, MHL, ZVY, æquales esse, & circa æquales angulos latera existere proportionalia, ergo figuræ, LHMP, YVZd, similes erũt iuxta Euclidem, ergo etiam similes erunt iuxta definit. 10. huius.

Ex Lem. ant.

Ex Lem. 3.



Ex Lem. 1.

Ex Lem. 2.

Defin. 1. Sex. Elem.

Re-

Reliquum eſt, vt demonſtremus earum homologas duabus aſſumptis regulis, OS, fp, omnes æquidiſtare: Et quidem ſi plana ſecent figuras, oOS, sfp, hoc manifeſtum eſt, etenim productæ lineę ipſis baſibus, OS, sp, erunt parallelæ, & latera homologa ſimilium figurarum ex traiectis planis in ſolidis productarum. Si verò plana parallela ſecent duas figuras ipſis, oOS, sfp, continuatas, vti faciunt plana figurarum, HMPL, VZdY, quæ etiam ſecant plana figurarum, oOS, sfp, producta in rectis, KN, ug, oſtendemus ipſas, KN, ug, eſſe regulas homologarum ſimilium figurarũ, LHMP, VZdY, iunctis, PK, du. Quia enim, Oo, fs, ſunt ipſorum ſimilium ſolidorum latera homologa, producta, ac terminata ad baſium plana, & oppoſitorum tangentium, in punctis, O, B; f, Q, ideò, BO, Qf, ſunt ſimiliter ad eandem partem ſectæ in, o, s, & nedum, Oo, fs, ſed etiam, oB, sQ, ſunt vt eorum altitudines ſumptę reſpectu dictarum baſium, ſed ſic etiam ſunt ipſæ, oS, sp, latera homologa, ergo, Bo, ad, oS, eſt vt, Qs, ad, sp, & angulos æquales, BoS, Qsp, complectũtur latera proportionalia, ergo triangula, BoS, Qsp, ſunt ſimilia, cum verò ſint in planis triangulorum, oOS, sfp, ſunt etiam ſimilibus figuris, LPSo, Ydps, æquè ad eandem partem inclinata, quibus communia ſunt homologa latera, oS, sp, ergo anguli, KoL, usY, inter ſe, necnon, PSI, dpX, æquales erunt; cum verò, BS, Qp, ſint vt dictæ altitudines, & ſic etiam, IS, Xp, necnon, PS, dp, (etenim, BS, Qp, in, I, X, &, ES, Ip, ſimiliter ſecantu,, & ad eandem partem, in punctis, P, d,) erit, IS, ad, SP, vt, Xp, ad, pd, & circumſtant angulos æquales, ISP, Xpd, ergo triangula, ISP, Xpd, ſunt ſimilia. Eodem modo oſtendemus ſimilia eſſe triangula, LoK, Ysu. Vlterius, quia eſt, Ko, ad, oS, vt, us, ad, sp, &, oS, ad, SI, vt, sp, ad, pX, & anguli, KoS, usp, necnon, oSI, spX, ſunt æquales, ideò trapezia, KoSI, uspX, erunt ſimilia, ſed etiam figuræ, LPSo, Ydps, ſunt ſimiles, eſt autem, KL, ad, Lo, vt, uY, ad, Ys, &, oL, ad, LP, vt, sY, ad,

Elicitur ex Cor. Lem. 6.

6. Sex. Ele.

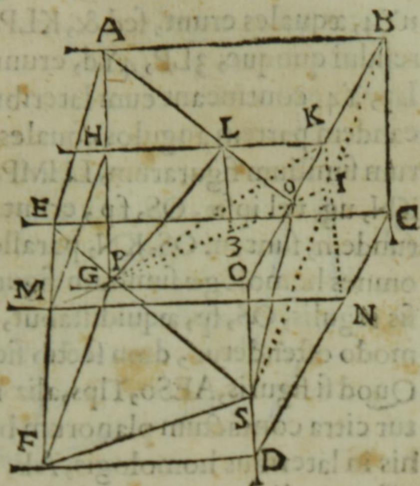
Ex Lem. 2.

Cor. Lem. 6.

Coro l. 26. huius.

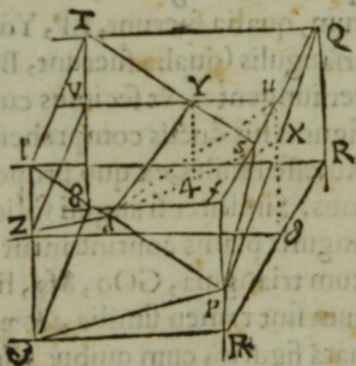
6. Sex. Ele.

ad, Yd, ergo, KL, ad, LP, erit vt, uY, ad, Yd, eodem modo autem ostendemus, LP, PI, IK, KL, binas esse in eadem proportione cum ipsis, Yd, dX, Xu, uY. Manifestum est autem si iũgeremus, AO, Tf, AS, Tp, quod fierẽt similes pyramides triangulatæ ipsæ, AOoS, Tfsp, similibus .n. triãgulis comprehenderentur, vt meditanti compertum fiet, ideò plana, AoO, Tsf, idest triãgula similia, LKo, Yus, sunt æquè ad eandem partem ipsis similibus figuris, LPSo, Ydps, inclinata, cum quibus coincidunt in lateribus homologis, Lo, Ys, ergo anguli, KLP, uYd, erunt æquales, quibus circumstãt latera proportionalia, vt probatum est, ergo triangula, KLP, uYd, similia erunt, & erit, KP, ad, PL, vt, ud, ad, dY, est verò, PL, ad, PI, vt, dY, ad, dX, ergo ex æquali, KP, ad, PI, erit vt, ud, ad, dX, est autem, PI, ad, IK, vt, dX, ad, Xu, ergo triangula quoque, PKI, duX, pariter similia erunt, vnde anguli, LPI, YdX; PIK, dXu, &, IKL, XuY, æquales erunt. Ducantur nunc in planis figurarum, LHMP, YVZd, à punctis, L, Y, parallelæ, KN, ug, ipsæ, L3, Y4. Cum igitur anguli, LKI, YuX, sint æquales, etiã, KL3, uY4,



Ex Lem. 4.

Ex Lem. 1.



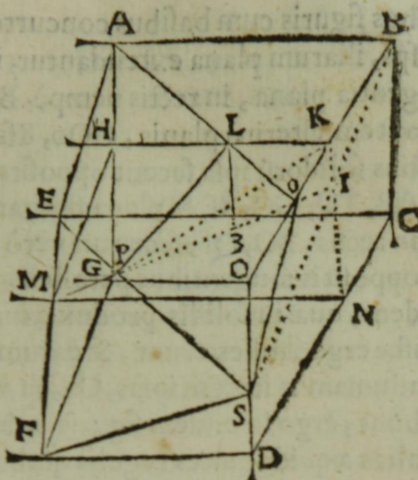
Ex Lem. 2.

uY4, æquales erunt, ſed &, KLP, uYd, ſunt æquales, ergo reſidui quoque, 3LP, 4Yd, erunt æquales, vnde cum ipſæ, L3, Y4, contineant cum lateribus homologis, LP, Yd, ad eandem partem angulos ęquales, erunt regulæ homologarum ſimilium figurarum, LHMP, YVZd, vnde etiam ipſæ, KN, ug, vel ipſæ, OS, fp, erunt regulæ homologarum earundem, ſunt .n. OS, KN, parallelæ, vt etiam, ug, fp, vnde omnes homologæ ſimilium figurarum, LHMP, YVZd, ipſis regulis, OS, fp, æquidiſtabũt, quod & de cæteris eodem modo oſtendetur, dum ſectio fiet in figuris, AESo, Tlps. Quod ſi figuris, AESo, Tlps, aliæ figurę planæ continuarentur citra contactum planorum baſibus oppoſitorum, cum his in lateribus homologis, AE, Tl, conuenientes, quibus eſſent inclinatæ, parum diſſimili methodo, producentes, OB, fQ, vſq; ad tangentia plana, & occurſuum puncta cum ipſis, S, p, iungentes, necnon extrema laterum homologorum, qualia fuerunt, LP, Yd, cum extremis rectarum in triangulis (qualia fuerunt, BOS, Qfp,) productarum, pariter iungentes, vt fecimus cum ipſis, KI, uX, oſtenderemus figuras his ductis comprehenſas, quales fuerunt, LPIK, Yd Xu, eſſe ſimiles, ex quo propoſitum quoq; noſtrum haberemus. Similiter ſi anguli ſolidi, O, f, pluribus, quam tribus angulis planis contineantur, currit tamen demonſtratio, cum triangula, GOo, 8fs, licet non ſint in ambitu ſolidorum ſint tamen ſimilia, & æquè ad eandem partem inclinata figuris, cum quibus concurrunt, etenim ex. g. pyramides, SGOo, p8fs, ſi eorum latera iungerentur, ſimiles eſſent, quapropter ipſius demonſtrationis vis non eneruatur. Similiter ſi, oOS, ſfp, non eſſent triangula, ſed aliæ quæcumq; figuræ ſimiles, pro, oS, ſp, acceptis lateribus ipſis, Oo, fs, adiuncta, os, conterminantibus, & planis ad hęc latera pariter terminantibus, eodem modo demonſtratio abſolueretur: hæc omnia autem ſingillatim proſequi nimis longum, ac ſchematibus rem aperire, res tricis plena eſſet, qua-

Corol. 27. huius.

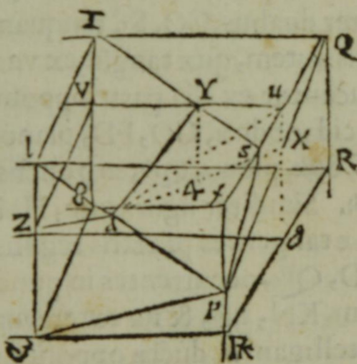
Ex Lem. 4. & 1.

quapropter Lectoris industriæ hoc relinquo, si enim ea rectè perceperit, quæ superius explicata sunt, circa huius veritatẽ minimè hæsitabit, infinita autem similium solidorum planis cõtentorum varietas efficit, vt ægrè ipsius demonstrationis vniuersalitatem oculis subijcere possim, quod Lector æqui, boniq; faciat, hæc verò ostendenda proponebantur.



TH. XXVII. PROP. XXX.

Posita def. 9. Vndec. Elem. similium solidarum figurarum, sequitur & mea definitio generalis similium solidorum.



Assumptis denuò ant. Prop. figuris, sint adhuc similia solida iuxta Euclidem ipsa, AGS, T8p. Dico eadem esse etiam similia iuxta def. 11. huius, quam de similibus solidis generaliter attuli. Sint autem ducta eadem opposita tangentia plana, vt ibi, ita vt duæ similes figuræ, GFSO, f8&p, sint plana cõtactuum ex vna parte, ex alia verò sint plana tangentia, AC, TR, captis autem alijs duabus simili-

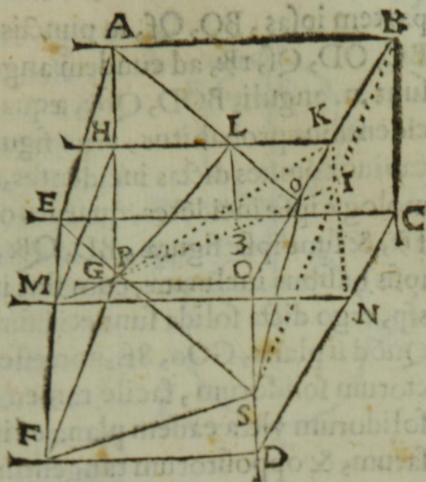
bus figuris cum basibus concurrentibus; ipsis nempè, OSo, fps, illarum plana extendantur, ita vt secent opposita tangentia plana, in rectis nempè, BC, OD; QR, f℞; extensis autem vlterius planis, GOo, 8fs, quæ nunc sint in ambitibus solidorũ ipsa secent opposita tangentia plana in rectis, AB, TQ; GO, 8f, & plana figurarum, OSo; fps, producta in rectis, BO, Qf, secentur verò hæc solida duobus planis oppositis tangentibus parallelis vtcumque, & sint illa eadem, quæ in solidis produxerunt figuras, LHMP, YVZd, istæ ergo similes erunt, & earum homologæ, si pro regulis assumamus iterum ipsas, OS, fp, eisdem quoque æquidistabunt, ergo in eisdem figuris habebimus etiam homologas alias æquidistantes regulis quibuscumq; cum ipsis, OS, fp, angulos æquales ad eandem partem continentibus, cum ergo ipsæ, GO, 8 f, angulos æquales cum ipsis, OS, fp, ad eandem partem contineant, ideò omnium homologæ pariter duabus, GO, 8f, tanquam nouis regulis æquidistabũt, istis autem, quæ tangũt ex vna parte figuras, GFSO, 8&pf, ducantur ex alia parte oppositæ tangentes, FD, &℞, ita vt incidant duæ, GO, FD, plano, BD, in punctis, O, D, & duæ, 8f, &℞, plano, Q℞, in punctis, f, ℞, sint autem iunctæ, OD, f℞. Similiter figurarum, HMPL, VZdY, sint ductæ oppositæ tangentes præfatis regulis, GO, 8f, parallelæ, planis, BD, Q℞, occurrentes in punctis, K, N; ug, iungantur autem, KN, ug, & ita cæterarum sic producibiliũ figurarum intelligantur ductæ oppositæ tangentes ipsis, GO, 8f, parallelæ, & productæ vsq; ad plana, BD, Q℞, punctaq; occursuum iuncta rectis lineis, per quarum omniũ extrema transeant lineæ, BO, CD, Qf, R℞. Cum ergo, GO, 8f, sint homologarum regulę, ac oppositæ tangentes figurarum similium, OGFS, f8&p, incidant autem illis ad eundem angulum ex eadem parte, OD, f℞, & sit, GO, ad, f8, vt, OD, ad, f℞, ideò, OD, f℞, erunt incidentes similium figurarũ, OGFS, f8&p, & oppositarum tangentium, GO, FD, 8f, &℞.

Iuxta def. 10. huius.

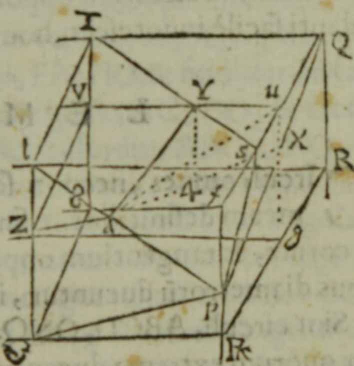
23. huius.

24. huius.

Simi-



Similiter in figuris, HMPL, VZdY, ostendemus esse ipsarum incidẽtes, ac oppositarum tangentium, HK, MN, Vu, Zg, ipsas, KN, ug, si .n. iungeremus, MK, Zu, probaretur, MH, ad, HK, esse vt, ZV, ad, Vu, (sunt .n. similes figuræ, HMPL, VZdY; necnon, LPK, Ydu, circumstant autem latera proportionalia angulos æquales, MHK, ZVu, & ideò ostenderemus triangula, MHK, ZVu, esse similia, vnde pateret angulos, HKM, VuZ, esse æquales, sed etiam, HKN, Vug, sunt æquales, ergo pateret angulos, MKN, Zug, esse æquales, sunt autem etiam æquales, MNK, Zgu, ergo triangula, MKN, Zug, essent æquiangula, vnde, MN, ad, Zg, esset vt, KN, ad, ug, incidunt autem, KN, ug, oppositis tangentibus, HK, MN, Vu, Zg, ad eundem angulũ ex eadem parte, ergo ipsarum tangentium, ac figurarum sunt incidẽtes, KN, ug, cum verò, KN, ad, ug, sit vt, MK, ad, Zu, idest vt, MH, ad, ZV, vel vt quoduis solidorum latus homologum ad quoduis latus homologum, idest vt, GO, ad, 8f, idest vt, OD, ad, f℞; OD, autem ad, f℞, sit vt, BO, ad, Qf, ideò, KN, ad, ug, erit vt, BO, ad, Qf, & diuidunt similiter ad eandem



6. Sex. Ele.

24. huius.

partem ipsas, BO, Qf, in punctis, Ku, quæ incidunt ipsis, BC, OD, Qf, r℞, ad eundem angulum ex eadem parte, sunt .n. anguli, BOD, Qf℞, æquales, quod & de cæteris incidentibus probabitur, ergo figuræ, BODC, Qf℞R, quæ capiunt omnes dictas incidentes, sunt similes, & earum homologæ ipsæ incidẽtes, quarum omnium regulæ sunt, OD, f℞, & sunt ipsæ figuræ, BD, Q℞, æquè ad eandem partem ipsis basibus inclinatæ, cum sint in planis figurarum, oOS, sfp, ergo dicta solida sunt etiã similia iuxta def. 11. huius. Quod si plana, GOø, 8fs, non essent in ambitu similium dictorum solidorum, facilè tamen ostenderemus portiones solidorum vltra eadem plana existentes esse similes, ac ipsarum, & oppositorum tangentium planorũ iam dictorum incidentes reperiri in planis figurarum, BD, Q℞, cum eisdem integrantes figuras incidentes integrorum similium solidorum, ac dictorum oppositorum tangentiũ, quod speculanti facilè innotescet, hoc autem erat ostendendum.

Defin. 10. huius.

Lem. 1.

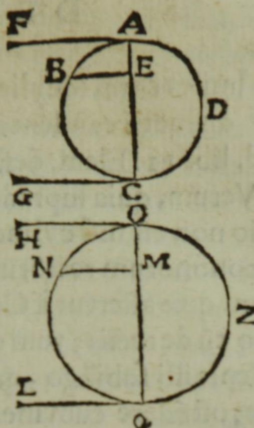
LEMMA.

Circuli omnes, necnon semicirculi sunt similes iuxta meam definitionem similium planarum figurarum, & eorum, & tangentium oppositarum, quæ ab extremitatibus diametrorũ ducuntur, incidentes sunt ipsi diametri.

Sint circuli, ABCD, ONQ, quorum diametri, AC, OQ, per quorum extrema ducantur tangentes, FA, GC, HO, LQ. Dico hos circulos esse similes iuxta meam definitionem similium planarum figurarum, & eorum, & ductarum oppositarum tangentium incidentes esse ipsas diametros, AC, OQ, quæ etiam de semicirculis verificantur. Diametri ergo, AC, OQ, diuidantur similiter ad eandem partem in punctis, E, M, à quibus vsq; ad circumferentiam ducantur ipsæ, EB, MN, parallelæ dictis tangentibus, quæ cum ad angulos rectos diametros diuidant, etiam ipsæ, BE, NM,

erunt

erunt illis perpendiculares, igitur quadratum, BE, erit æquale rectangulo, AEC, ſicuti quadratum, NM, æquale rectangulo, OMQ, rectangulum autem, AEC, ad quadratum, EC, eſt vt, AE, ad, EC, ideſt vt, OM, ad, MQ, ideſt vt rectangulum, OMQ, ad quadratum, MQ, ideſt vt quadratum, NM, ad quadratum, MQ, ergo quadratum, BE, ad quadratum, EC, eſt vt quadratũ, NM, ad quad. MQ, (quæ autem hic ſupponuntur, vel petantur ex Eucl. lib. Elem. vel ex ſequenti meo lib. in quo, quæ hic aſſumuntur independenter ab hoc lẽmate demonſtratur) ergo, BE, ad, EC, erit vt, NM, ad, MQ, permutando, BE, ad, NM, erit vt, EC, ad MQ, vel vt, AC, ad, OQ, igitur, quæ æquidiſtant ipſis tangentibus, FA, HO, & ſimiliter ad eandem partem vtcumq; diuidunt ipſas, AC, OQ, & iacent inter ipſas, & circuitus ſemicirculorum, ABC, ONQ, ad eandem partem, eodem ordine ſumptæ, ſunt vt ipſæ, AC, OQ, quæ dictis tangentibus incidunt ad eundem angulum ex eadem parte, quæ ideò ſunt earum incidentes, ergo ſemicirculi, ABC, ONQ, ſunt figuræ planæ ſimiles iuxta meam definitionem, quarum & oppoſitarum tangentium, quæ ab extremitate diametrorum ducuntur, incidentes ſunt ipſi diametri; ſic etiam patebit ſemicirculos, ADC, OZQ, necnon circulos, AC, OQ, eſſe ſimiles, iuxta eandem definitionem; quod oſtendendum erat.



1. Sex. Ele.

8 lib. 2. ſequen. vel 20. Sexti Elem

Def. 10.

THEOREMA XXVIII. PROP. XXXI.

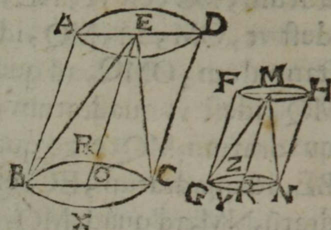
POſitis infraſcriptis definitionibus ſimilium cylindrorum, & conorum, ſequitur definitio generalis, quam de ſimilibus ſolidis ipſe attuli.

DE-

DEFINITIO.

SImiles coni, & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri eandem inter ſe proportionem habent. Euclid. lib. 11. Elem. def. 24.

Verum, quia ſupradicta definitio non eſt niſi cylindrorum, & cononorum rectorum, ideò aliam, quæ affertur à Commandino tũ de rectis, tum etiam de ſcalenis illi ſubiũgo, quam ſufficiet oſtẽdere cum mea ſupradicta cõcordare, nam hęc Commandini eam, quam Euclides attulit, inuoluit.



DEFINITIO.

SImiles coni, & cylindri, ſiue recti, ſiue ſcaleni ſunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos baſibus, communes ſectiones eorum, & baſium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter ſe, quam axes, proportionem habent: Commandinus loco definitionis ſupra citatæ.

Sint coni, BEC, GMN, & cylindri, AC, FN, ſimiles iuxta proximam definitionem. Dico eoſdem eſſe ſimiles iuxta meam ſupradictam. Vt autem inſimul pro conis, & cylindris fiat demõſtratio, ſupponantur coni, & cylindri iam dicti eſſe in eiſdem baſibus, & circa eoſdem axes; ducãtur ergo in ipſis plana per axes, qui ſint, EO, MR, quoniam ergo latera cylindrorum ſunt ſuis axibus parallela, ideò dicta plana tranſibunt per latera cylindrorum, ſiue cylindricorum, AC, FN, & per latera conorum, ſiue conicorum, EBC, MGN, quia per eorum vertices intra ipſos ducũtur, ſint autem dicta plana ea, quæ ſint ad rectos angulos baſibus,

Def. 11. (margin, beside "ta proximam definitionem")

Ex def. 3. & 4. Cor. (margin, beside "cta plana transibunt")

bus,

bus, quorum & basium communes sectiones, quæ sint, BC, GN, cum axibus æquales angulos continentes eandem inter se, quam axes proportionem habeant, vt fert definitio, fient igitur in cylindricis parallelogramma, vt, AC, FN, & in conicis triangula, vt, BEC, GMN, & quia anguli, BOE, GRM, sunt æquales, ideò etiam ipsi, BCD, GNH, sunt æquales, & est, BC, ad, CD, vt, GN, ad, NH, ideò parallelogramma, AC, FN, & triangula, BEC, GMN, erunt similia iuxta definitionem Euclidis, & ideò etiã iuxta meam, & quia ipsæ, AD, BC, FH, GN, tangunt figuras, AC, FN, quibus incidunt ad eundem angulum ex eadem parte, EO, MR, & quæ diuidunt ipsas, EO, MR, similiter ad eandem partem existẽtes parallelæ ipsis, BC, GN, sunt vt ipsæ, EO, MR, ad eandem partem eodem ordine inter ipsas, & circuitum dictarum figurarum compræhensæ, quia quæ sunt ex vna parte sunt æquales ipsis, BO, GR, & quæ ex alia ipsis, OC, RN, in triangulis autem sunt, vt ipsæ, BO, GR, vel, OC, RN, .i. vt, OE, RM, & ideò, earum incidentes, & oppositarum tangentium dictarum erunt ipsæ, EO, MR, quæ tangentes sunt regulæ homologarum similium figurarum, AC, FN, vel, EBC, MGN. Vlterius, quia, BXC, GYN, sunt semicirculi, erunt figuræ planæ similes iuxta meam definitionem, quarum & tangentiũ, quæ per extrema, BC, GN, ducuntur erunt incidentes ipsi diametri, BC, GN, vt probatum fuit, veluti idem patet de semicirculis, BIꝶC, GZN, & de quibuscunq; alijs, quæ diuident ipsas, EO, MR, similiter ad eandem partẽ, & consequenter diuidunt etiam altitudines eorundem respectu basium sumptas similiter ad eandem partem, & de ijs, quæ per extrema, E, M, ducuntur, habemus igitur cylindros, AC, FN, siue conos, BEC, GMN, quorum ducta sunt plana opposita tangentia dictorum solidorum homologis figuris parallela, quæ sunt plana, BIꝶCX, AD; GYNZ, FH, quibus inciderunt duo plana ad æquales angulos ex eadem parte, illa nempè, in quibus

Ex Cor. 5. & ex 16. huius.

27. huius.

B. definit. 10.

Ex Lem. ant.

17. Vndec. Elem.

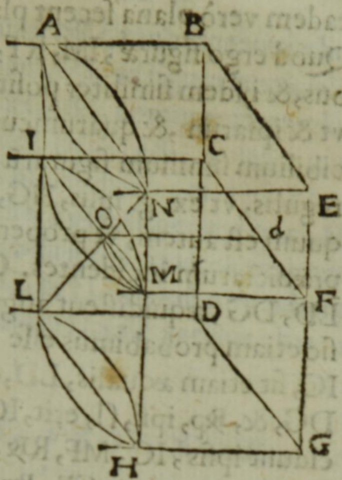
sunt

ſunt ipſa parallelogramma, AC, FN, vel triangula, BEC, quia ſunt recta ad baſes .i. ad dicta tangentia, ipſæ autem figuræ .i. parallelogramma, vel triangula inuenta ſunt eſſe ſimilia, quarum homologarum regulæ oppoſitæ tangētes, AD, BC; FH, GN, quarum ſunt incidentes, EO, MR, earum autem lineæ homologæ, ſumptæ regulis dictis tāgentibus, repertę ſunt eſſe incidentes figurarum planarum ſimilium, quæ diuidunt altitudines dictorum ſolidorum iam dictas ſimiliter ad eandem partem, & oppoſitarum tangentium, quæ omnes ijs, quæ ducuntur per extrema, BC, GN, tangentes circulos, B℞CX, GYNZ, ſunt æquidiſtantes, vt facilè conſideranti patebit, ergo cylindri, AC, FN, vel coni, Def 11. BEC, GMN, ſunt ſimiles iuxta meam definitionem generalem ſimilium ſolidorum, quod oſtendere opus erat.

THEOREMA XXIX. PROP. XXXII.

DEfinitio mea ſimilium conicorum, & cylindricorum concordat cum definitione generali ſimilium ſolidorum.

Sint cylindrici quicunque, AH, KY; ſeu conici in ijſdem baſibus, & altitudinibus (vt vna vice vtriuſq; demonſtrationem abſoluamus) NLH, VXY, ſimiles iuxta definit. 7. huius. Dico eoſdem etiam eſſe ſimiles iuxta definit. 11. Quoniam ergo vtraque prædicta ſolida ſunt ſimilia, erunt Def. 7. baſes, LH, XY, ſimiles, ducantur earum oppoſitæ tangen- Coro. pri. tes, quæ ſint homologarum regulæ, ipſæ, LD, HG, Xf, YI, B. def 10. quarum, & prædictarum ſimilium figurarū incidentes ſint ipſæ, DG, fI, quæ etiam pro regulis aliarum homologarum Corol 23. ſumi poterunt, ſint ergo duæ quæcunq; homologæ parallelæ incidentibus, DG, fI, ipſæ, LH, XY, ſi ergo per has, & latera cylindricorum, vel conicorum iam dictorum exten- Def. 7. dantur plana, ab ijs producentur in cylindricis ſimilia paralle-



rallelogramma, & in conicis similia triangula, quæ etiam erunt ad bases æquè ad eandem partem inclinata. Extendantur ergo per oppositas tangentes, LD, HG; Xf, Yl, plana tangentia tam cylindricos, quam conicos iam dictos, & hæc simul cum planis basium indefinitè producantur ad partes incidẽtium, DG, fl, & tandem per, DG, fl, cum sint parallelæ, extendantur plana ipsis, AH, KY, parallela secãtia iam producta plana in rectis, DG, GE, EB, BD, DE, fl, l&, &Z, Zf, f&, erunt ergo parallelepipeda, AG, Kl, & prismata, LNGD, XVlf, ergo erit parallelogrammum, BG, simile ipsi, AH, &, Zl, simile, KY, quæ cum sint inter se similia, etiam, BG, Zl, erunt similia, sic etiam ostendemus triangula, EDG, &fl, esse similia, subintellige iuxta definitionem Euclidis, ergo erunt etiam similia iuxta defin. 10. Ducantur duo plana oppositis tangentibus intermedia, ac parallela, altitudines dictorũ solidorum respectu basiũ, LH, XY, sumptas, similiter ad eandem partem diuidentia, quæ in cylindricis producãt figuras, IM, RT, in conicis verò, OM, ST, secent verò plana tangentia in rectis, IC, MF, Od, rV, Tp, So, istæ ergo erunt ad inuicem parallelæ, & tangent figuras, IM, RT, OM, ST,



Defin. 11. Vnd. Ele.

24 Vnd. Elem.

27. huius.

16. Vnd. Elem. Corol. 9.

Corol 18. eadem verò plana secent plana, BG, Zl, in rectis, CF, ℞p,
Quod ergo figuræ, IM, RT, vel, OM, ST, sint similes basi-
12. & 19. huius. bus, & ijsdem similiter positæ iam ostensum fuit, ex quo fit,
vt & ipsarum, & quarumcunq; sic in præfatis solidis produ-
cibilium similium figurarũ homologæ duabus quibusdam
regulis, vt ex. g. ipsis, HG, Yl, semper æquidistent. Reli-
quum est autem, vt probemus, CF, ℞p, vel, dF, op, esse
prædictarum incidentes. Cum ergo duæ, IC, CF, duabus,
10. Vndec. Elem. LD, DG, æquidistent anguli, ICF, LDG, æquales erunt;
sic etiam probabimus esse æquales, R℞p, Xfl, cum verò,
IC, sit etiam æqualis, LD, &, R℞, ipsi, Xf, necnon, CF, ipsi,
DG, &, ℞p, ipsi, fl, erit, IC, ad, R℞, vt, CF, ad, ℞p, & in-
cidunt ipsis, IC, MF, R℞, Tp, ad eundem angulum ex ea-
dem parte, ergo, CF, ℞p, erunt incidentes similium figu-
24. huius. rarum, IM, RT, & oppositarum tangentium, IC, MF; R℞,
Tp, eadem ratione demonstrabimus, dF, op, esse inciden-
tes similium figurarum, OM, ST, & oppositarum tangen-
tium, Od, MF; So, Tp, est autem, dF, ad, op, vt, dE, ad, o&,
scilicet, vt, DE, ad, f&, nam, DE, f&, sunt similiter ad ean-
17. Vndec. Elem. dem partem diuisæ in punctis, d o, (etenim altitudines di-
ctorum solidorum per plana, IF, Rp, similiter ad eandem
partem diuiduntur) ergo, dF, op, æquidistantes oppositis
tangentibus, BE, DG, Z&, fl, sunt homologæ figurarum
similium, EDG, & fl, quarum & oppositarum tangentium
incidentes erunt ipsæ, ED, &f. Eodem modo ostendemus,
CF, ℞p, esse homologas similium figurarum, BG, Zl, qua-
rum & oppositarum tãgentium, BE, DG, Z&, fl, inciden-
tes sunt ipsæ, BD, Zf, hæc autem etiam in cæteris traiectis
planis; vt dictum est contingere ostendemus, ergo, BG, Zl,
EDG, &fl, erunt figuræ incidentes similium cylindrico-
rum, seu conicorum iam dictorum, & oppositorũ tangen-
tium planorum, AE, LG, K&, XL, ergo in his solidis ad-
sunt omnes conditiones def. 11. vt recolenti easdem pate-
fiet, igitur erunt iuxta eandem pariter similia. Aduerte

au-

autem, quod suppoſui planum, NG, tangere tam cylindricum, quam conicum, vt etiam, VI, ne figura nimis cõfunderetur, & vt fierent latera, EG, &I, communia parallelogrammis, BG, ZI, & triangulis, DEG, f&I, valebit tamen eadem demonſtratio etiamſi plana ducta per, HG, YI, tangentia cylindricos, diuerſa ſint à planis per eaſdem, HG, YI, tranſeuntibus, ac tangentibus ipſos conicos, fient enim ſemper ſimilia triangula, EDG, & fI, etiamſi non adiaceãt lateribus, EG, &I, vt conſideranti facilè patebit, hæc autem nobis oſtendenda erant.

THEOREMA XXX. PROP. XXXIII.

SI ſolidum rotundum ſecetur plano per axem, producta in eo figura erit, quæ per reuolutionem ipſum genuit.

Sit ſolidum rotundum, cuius axis, AM, baſis circulus, HDEF, hoc autem plano per axem, AM, ducto ſecetur, quod in eo producat figuram, ACDFG. Dico hanc eſſe eam, quæ per reuolutionem ipſum ſolidum genuit. Intelligatur reuolui circa, AM, figura, quæ dictum ſolidum genuit, donec reperiatur poſita in plano figuræ, ACDFG, igitur vel harum figurarum perimetri congruunt, vel non, ſi ſic ex illis facta erit vna figura, ea nẽpè, quę per reuolutionem generat dictum ſolidum, ſi verò non congruant, aliquis punctus alterius ambituum dictarum figurarum non reperietur in reli quæ ambitu, ſit is punctus, B, qui reperiatur in ambitu figuræ, quæ per reuolutionem Def. 6.



dictum ſolidum deſcripſit, quæ ſit ipſa, ABDFG, & non in ambitu figuræ, ACDFG, cuius ambitus eſt cõmunis ſectio plani ducti per axem, & ſuperficiei dictum ſolidũ ambientis, quia igitur, B, non eſt in communi ſectione iam dicta, & eſt in plano figuræ, ACDFG, igitur erit intra, vel extra ſuperficiem ambientem dictum ſolidum, eſt autem in ambitu figuræ, quæ tali ambitu dictam ſuperficiem deſcribit, ergo erit in ipſa ſuperficie ambiente, & non erit, quod eſt abſurdum, non igitur aliquis punctus ambitus figuræ, quæ dictam ſolidum per reuolutionem generat eſt extra ambitum figuræ, ACDFG, igitur iſti ambitus, & conſequenter ipſæ figuræ ſibi inuicem congruunt, & fit vna figura, ea ſcilicet, quæ per reuolutionem dictum ſolidum rotũdum generat, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXXI. PROP. XXXIV.

SI ſolidum rotundum ſecetur plano ad axem recto, fiet concepta in ipſo figura circulus, cuius centrum erit in axe.

Sit ſolidum rotundum, cuius axis, AC, & figura, quæ ipſum per reuolutionem genuit ipſa, ABCD, ſecetur autem plano ad axem recto, ex quo in ipſo producatur figura, MBND. Dico hanc eſſe circulũ, cuius centrum erit in axe, vt, E, ſit autem communis ſectio plani recti ad axem, & figuræ, ABCD, recta, BD, quia ergo figura, ABCD, eſt circa axem, ipſa autem, BD, quæ rectè axim ſecat, vna eſt ex ordinatim ad ipſam axim applicatis, ideò ab ea bifariam diuiditur in puncto, E, ducatur nunc aliud pla-

Defin. 6.



num

num per axem, quod in dicto solido producat figuram, AM CN, quæ secet figuram, MBND, in recta, MN, erit ergo hæc figura eadem ei, quæ per reuolutionem dictum genuit solidum, & ideò erit figura circa axem, ad quam ordinatim applicatur, MN, cum ipsa rectè axem, AC, diuidat, ergo, MN, bifariam diuiditur in, E, eodem pacto quascumq; alias communes sectiones figurarum per axem, AC, transeuntium, & figuræ, BNDM, ostendemus bifariam diuidi in, E. Vlterius, quia figuræ, ABCD, AMCN, sunt eædem illi, quæ per reuolutionem generat solidum, ABCD, &, BD, MN, transeunt per idem punctum axis, AC, rectè eundem secantes, ideò si ipsa, AMCN, reuolueretur, donec esset in plano figuræ, ABCD, illi congrueret, &, MN, ipsi, BD, vnde, MN, BD, sunt æquales, & ideò earum dimidiæ, NE, EB; ME, ED, erunt æquales, eodem pacto ostendemus quascumq; ductas à puncto, E, ad lineam ambientem, MB ND, esse æquales cuilibet ipsarum, BE, EN, ED, EM, ergo figura, MBND, erit circulus, cuius centrum, E, in axe reperitur, quod erat ostendendum. Ex antec.

COROLLARIVM.

Colligimus autem ipsas, BD, MN, communes sectiones figurarum per axem ductarum, & circulorum, qui per sectionem dicti solidi per plana ad axem recta in eo producuntur, esse eorum diametros, cum per centrum transeant.

THEOREMA XXXII. PROP. XXXV.

SI quicunq; conus secetur plano basi æquidistante concepta in cono figura erit circulus centrum in axe habens.

Si conus sit rectus patet hoc ex antecedenti Prop. cæterum si sit scalenus, qualis sit conus, ACFD, qui secetur plano basi, CFD, æquidistante, quod in eo producat figuram, BRE. Dico ipsam esse circulum, centrum in axe habentem. Secetur ergo plano per axem, quod in eo pducat triangulum, ACD, cuius & circuli, CFD, communis sectio sit, CD, quæ erit diameter dicti circuli; eius autem & figuræ, BRE, communis sectio, BE; sunt igitur trianguli, ABI, ACN, similes, quia, BI, æquidistat ipsi, CN, ergo, CN, ad, NA, erit, vt, BI, ad, IA, eodem modo ostendemus, AN, ad, ND, esse vt, BI, ad, IE, ergo, ex æquo, CN, ad, ND, erit vt, BI, ad, IE, sed, CN, est æqualis, ND, ergo &, BI, ipsi, IE. Ducatur nunc aliud planum per axem, quod producat triangulum, ANF, quodq; secet figuram, BRE, in, IR, fient ergo trianguli, AIR, ANF, æquianguli, ergo, FN, NA, NC, erunt lineæ in eadem proportione cum ipsis, RI, IA, IB, ergo, ex æquo, FN, ad, NC, erit vt, RI, ad, IB, sed, FN, est æqualis ipsi, NC, ergo, RI, erit æqualis ipsi, IB, eodem modo ostendemus quascunq; ductas à puncto, I, ad lineam ambientem, BRE, esse æquales ipsi, BI, ergo figura, BRE, erit circulus, cuius centrum, I, quod ostendere oportebat.



16. huius.

6. Sex. Ele.

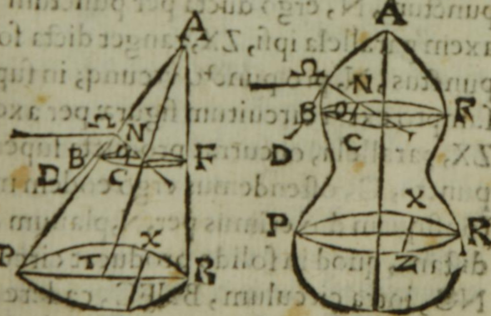
COROLLARIVM.

Hinc patet ipsam, BE, communem sectionem trianguli per axem ducti, & circuli, BRE, esse eiusdem diametrum, cum per eius centrum transeat.

THEOREMA XXXIII. PROP. XXXVI.

SI solidum rotundum, vel conus scalenus secentur plano per axem, deinde secetur solidum rotundum (nisi basim habeat, quæ circulus erit) plano ad axem recto circulum producente, in cuius plano, & illius, qui est coni basis perpendicularis ducta sit basi figurę per axim ductæ; deinde sumpto puncto in ambitu figuræ per axem, per illum æquidistans dictæ perpendiculari ducta fuerit recta linea, hęc tanget dicta solida, at si sumptus punctus sit extra talem ambitum, sed in superficie ambiente dicta solida, quæ per ipsum ducitur eidem æquidistans intra dicta solida cadet, & producta vsq; ad superficiem ambientem à figura ducta per axem bifariam diuidetur.

Sit solidum rotundum, ABTF, vel conus scalenus, APR, in basi circulo, PXRZ, quorum axis, AT, & si solidum rotundum non habeat basim, secetur plano recto ad axem, quod in eo producat circulum, PXRZ, secentur autem ambo planis per axē, quæ producant in solido rotundo figuram, APTF, & in cono triangulum, APR, deinde in plano circuli, PZRX, du-



catur ipſi, PR, communi ſectioni dicti circuli, & figuræ per axem, perpendicularis, ZX, & ſumpto puncto in ambitu figuræ per axem, vt, Ω, per ipſum ducatur recta linea parallela ipſi, ZX. Dico hanc tangere dicta ſolida, ſi enim non tangit ſecet, veluti, DΩN, in puncto, N, igitur punctus .n. erit extra planũ figuræ per axem, nam ipſa, DΩN, eſt parallela ipſi, ZX, quæ eſt ad rectos angulos figuræ per axem tranſeunti, & ideò etiam, DΩN, eſt illi ad rectos angulos, occurrit autem illi in puncto, Ω, ergo non occurret illi in alio puncto, ergo, N, eſt extra planum figuræ per axem, ducatur per, N, planum æquidiſtans plano, PXRZ, circuli, quod producat circulum, BNFC, & ſit, BF, communis ſectio ipſius circuli, & figuræ per axem, quæ erit ipſius circuli diameter, &, N, non erit aliquis punctorũ, BF, ergo ſi ab, N, duxerimus ipſi, ZX, parallelam, vt, NC, cum etiam, BF, ſit parallela ipſi, PR, continebũt angulos æquales, ſed, ZX, ſecat perpendiculariter, PR, ergo, NC, ſecabit perpendiculariter, BF, ducta non ab extremitate diametri, ergo intra circulum, BCFN, erit, & bifariam ſecabitur ab ipſa, BF, ergo non tranſibit per circuitum figuræ per axem ductæ, & per ipſum tranſit, DΩN, ergo, NC, NΩD, ſunt duæ rectæ lineæ eidem, ZX, parallelæ, ergo etiam inter ſe erunt parallelæ, quod eſt abſurdum, cum tranſeãt per idem punctum, N, ergo ducta per punctum ambitus figuræ per axem parallela ipſi, ZX, tanget dicta ſolida: Sit nobis nunc punctus, N, pro puncto vtcunq; in ſuperficie ambiente, ſumpto extra circuitum figuræ per axem, à quo ducta ipſi, ZX, parallela, occurrat producta ſuperficiei ambienti in puncto, C, oſtendemus ergo eodem modo ſupra adhibito (poſtquam duxerimus per, N, planum circulo, PXRZ, æquidiſtans, quod in ſolido producat circulum, BNFC,) ipſam, NC, intra circulum, BNFC, cadere, & bifariam diuidi à recta BF, ſiue à figura per axem ducta (nam eſt, NC, perpendicularis ipſi, BF,) quod oſtendere opus erat.

8. Vndec. Elem.

34. huius.

Corol. 34. huius.

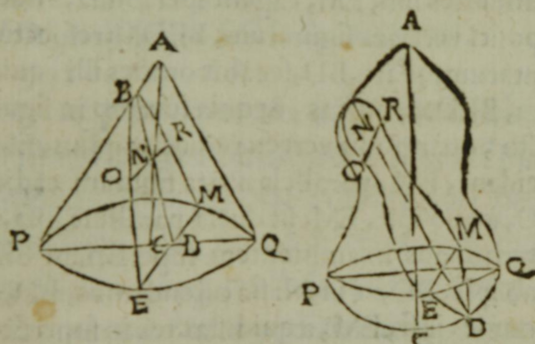
10. Vndec. Elem.

THEO-

THEOREMA XXXIV. PROP. XXXVII.

SI solidum rotundum, vel conus ſcalenus, ſecentur plano per axem, & deinde alio plano ſecentur, cuius, & vnius planorũ rectè axem ſecantium communis ſectio ſit recta linea perpendicularis communi ſectioni eiuſdem, & plani per axem; figura à ſecundo ſecante plano in ſolido producta erit circa axem, in cono ſcaleno autem erit circa axem, vel diametrum, & axis, vel diameter erit comunis ſectio per dicta ſecantia plana productarum figurarum.

Sit ſolidum rotundum, APCQ, & conus ſcalenus, APEQM, vtraque autem ſecentur plano per axem, quod producat figuram, APCQ, in ſolido, & triangulum, APQ, in cono, deinde ſecentur altero plano, cuius, & plani recti ad axem (quo productus ſit circulus, PMQE,) communis ſectio ſit, EM, perpendicularis ipſi, PQ, communi ſectioni eiuſdem, & plani per axem ducti. Dico figuram, BEDM, in ſolido rotundo eſſe circa axem, & in cono circa axem, vel diametrũ, & axẽ, vel diametrum eſſe, BD, comunem ſectionem pruductarum figurarum. Si ergo ſecundò producta figura per axem pariter ducta eſſet, manifeſtum eſt in ſolido rotundo fore figuram talem circa axem, & in cono fore triangulum, in quo axis, AC, ſi ſecaret æquidiſtantes baſi talis trianguli ad angulos



6. Defin.
33. huius.
16. huius.

rectos, cum illas bifariam diuidat, esset talis triangulus figura circa axem, si verò ad angulos non rectos, esset figura circa diametrum, nempè circa, AC. Sed non transeat hæc secunda figura per axem, sint autem puncta, B, D, extrema communis sectionis primæ, & secundæ figuræ, idest ipsius, BD, ergo in solido rotundo (& in cono, dum triangulus, APQ, per axem ductus transit etiam per ductam à vertice, A, perpendicularem ipsi basi, PEQM, idest cum triangulus, APQ, est erectus basi, PEQM,) ipsa, EM, communis sectio secundi plani secantis, &, PQ, plani rectè axim secantis, cum sit perpendicularis, PQ, communi sectioni planorum, PEQM, APQ, ad inuicem erectorum, erit etiam perpendicularis plano per axem, & ideò erit perpẽdicularis ad omnes per eam in tali plano transeuntes, ideò, BD, rectè secabit ipsam, EM, & quæ ducuntur per extrema, BD, æquidistantes ipsi, EM, tãgent ipsa solida, vnde, B, D, erunt oppositi vertices figurarum, BEDM, respectu ipsius, EM, sumptarum, quare, BD, secabit omnes illi equidistantes in figura, BEDM, ductas, & quia sumpto in figura, BEDM, puncto, qui non sit vertex respectu ipsius, EM, & ab eo ducta eidem, EM, parallela intra figuram cadit, sit is punctus, O, à quo ipsi, EM, sit ducta parallela ipsa, OR, igitur, OR, terminans in ambientem superficiem bifariam diuidetur ab ipsa, BD, vt in, N: sic ostendemus, BD, diuidere cæteras omnes ipsi, EM, æquidistantes in superficiem ambientem hinc inde terminatas, & quia, BD, secat, EM, ad angulos rectos, cæteras omnes iam dictas bifariam, & ad angulos rectos secabit, igitur tunc figura, BEDM, erit circa axem, BD, siue in solido rotundo, siue in cono: Si autem triangulus, APQ, non transeat per ductam ipsi plano perpendicularem, tunc eodem modo, quo supra ostendemus, BD, secare omnes æquidistantes ipsi, EM, bifariam, & quia triangulus, APQ, non transit per perpendicularem basi, neque erit erectus ipsi basi, PEQM, ergo angulus, EDB, non erit

4. Defin. Vnd. Elc.

1. Defin.

Coroll. 2. 4. huius.

Coroll. 1. 4. huius.

Ex antec.

rectus,

rectus, nam si esset rectus, cum sit etiam rectus, EDP, planum circuli, PEQM, esset erectum triangulo, APQ, & ille huic, quod est contra suppositum, igitur, BD, secabit, EM, & consequenter cæteras iam dictas illi æquidistantes bifariam, & ad angulos non rectos, igitur figura, EBM, tunc erit circa diametrum, & erit diameter ipsa, BD, siue axis, in supradicto casu tum in cono, tum etiam in solido rotundo, quod erat ostendendum. 4. Vndec. Elem.

COROLLARIVM.

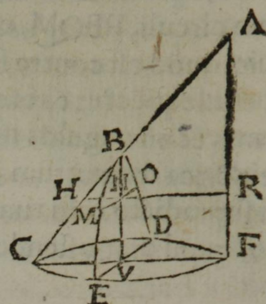
Hinc colligitur in cono, si triangulus per axem ductus sit erectus basi, fieri dictam figuram circa axem; si verò non sit erectus, sed inclinatus eidem, fieri figuram circa diametrum; in solido rotundo autem fieri semper figuram circa axem.

THEOREMA XXXV. PROP. XXXVIII.

SI conus secetur plano per axem, secetur deinde altero plano secãte basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis, cuius & trianguli per axem communis sectio sit parallela vni laterum trianguli per axem; quadrata ordinatim applicatarum ad axim, vel diametrum figuræ in cono secundo plano productæ, æquidistantium eiusdem, & basis communi sectioni erunt inter se, vt absciss æ per easdem ordinatim applicatas versus verticem sumptæ ab eisdem axibus, vel diametris iam dictis.

Sit conus, cuius vertex, A, basis circulus, CEFD, sece-

tur autem prius plano per axem, quod in eo producat triangulum,
16. huius. ACF, secetur deinde altero plano basim secante secundum rectam, ED, perpendicularem ipsi, CF, cuius in cono concepta sit figura,
Ex antec. BED, erit ergo hæc figura circa axem, vel diametrum, BV, quæ sit parallela ipsi, AF, cuius vertex respectu ipsius, ED, erit, B; ducatur à puncto, M, qui non sit punctus, B, sed vtcunque sumptus in linea, EBD, extra basim, ED, ipsi, ED, recta æquidistans, MO, producta vsque ad ambientem superficiem, cui occurrat in, O, igitur hæc erit vna ex ordinatim applicatis ad axim, vel diametrum, BV, æquidistans ipsi, ED, quæ bifariam diuidetur ab ipsa, BV, in puncto, N, ducatur per, N, ipsi, CF, parallela, HR, est verò etiã, MO, ipsi,



15. Vndec. Elem. ED, parallela, ergo planum transiens per, HR, MO, æquidistabit basi, CEFD, & quatuor puncta, H, M, R, O, erunt
35. huius. in circuli periphæria, cuius diameter, HR, quem secat, MO, perpendiculariter, nam angulus, HNM, æquatur angulo,
34 Secun. Elem. CVE, qui rectus est, ergo quadratum, MN, æquatur rectangulo, HNR, & quadratũ, EV, rectangulo, CVF, est autem rectangulum, CVF, ad rectangulum, HNR, (quia eorum altitudines, VF, NR, sunt æquales, cum sint parallelogrammi, NF, opposita latera) vt basis, CV, ad, HN, ex prima Sexti Elem. vel ex quinta lib. sequentis independenter ab hac demonstrata, & quia, HN, est parallela ipsi, CV, trian-
4. Sexti Elem. guli, BHN, BCV, sunt æquianguli, ideò, vt, CV, ad, HN, ita, VB, ad, BN, ergo rectangulum, CVF, ad rectangulum, HNR, idest quadratum, EV, ad quadratum, MN, erit vt, VB, ad, BN, est autem quadratum, ED, quadruplum qua-
4. Secundi Elem. drati, EV, nam est æquale quadratis, EV, VD, & rectangulis sub, EVD, bis, idest duobus quadratis, EV, quæ cum

præ-

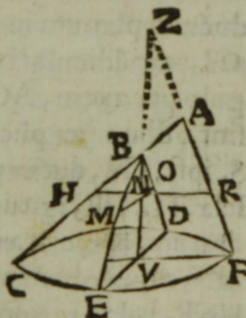
prædictis conficiunt quatuor quadrata, EV, & eadem ratione quadratum, MO, eſt quadruplum quadrati, MN, ergo quadratum, ED, ad quadratum, MO, erit vt, VB, ad, BN, quæ ſunt abſciſſæ ab ipſa axi, vel diametro, BV, verſus verticem, B, per ipſas, ED, MO, ordinatim ad ipſam, BV, applicatas, quod oſtendere opus erat; hæc autem vocatur ab Apollonio Parabola.

THEOREMA XXXVI. PROP. XXXIX.

Iſdem poſitis, præterquam quod, BV, ſit parallela ipſi, AF, ſed poſito, quod concurrat cum eodem latere, FA, verſus verticem producto, vt in, Z. Dico quadratum, ED, ad quadratum, MO, eſſe vt rectangulum, ZVB, ad rectangulum, ZNB.

Quia enim quadratum, EV, eſt æquale rectangulo, CVF, & quadratum, MN, rectangulo, HNR, ideò quadratũ, EV, ad quadratum, MN, erit vt rectangulum, CVF, HNR, rectangulum verò, CVF, ad HNR, habet rationem compoſitam ex ea, quam habet, CV, ad, HN, (vt infra independenter ab hac Propoſit. probatur) .i. VB, ad, BN, quia trianguli, CVB, HNB, ſunt æquianguli, & ex ea, quã habet, VF, ad, NR, ideſt, VZ, ad, ZN, quia trianguli, VFZ, NRZ, ſunt æquianguli, duæ verò rationes, VB, ad, BN, &, VZ, ad, ZN, componunt rationem rectanguli, ZVB, ad rectangulum, ZNB, ergo rectangulum, CVF, ad rectangulum, HNR, .i. quadratum, EV, ad quadratũ, MN,

14 Secun. Elem.



Ex Sexta lib. 2 ſeq. vel ex 23. Sexti Ele.

Ex Sexta lib. 2 ſeq. vel ex 23. Sexti Ele.

vel

vel quadratum, ED, ad quadratum, MO, erit vt rectangulum, ZVB, ad rectangulum, ZNB, quod ostendere opus erat; hæc autem ab Apollonio vocatur Hyperbola.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. LX.

TAndem eisdem positis, præterquam dicto concursu, posito, inquam, BV, concurrere cum vtroq; latere trianguli per axem, & productum, etiam cum basi trianguli per axem conuenire, vt in, Ω. Dico quadratum, RD, ad quadratum, MO, esse vt rectangulum, VSB, ad rectangulum, VNB.

Sit ergo talis hic appositum schema, in quo planum figuræ, BRVD, (cuius axis, vel diameter secat vtraq; latera, AC, AF, & producta incidit in basim, CF, productam in, Ω,) extensum indefinitè secat basis productum planum in recta, ΩZ, perpendiculari triangulo per axem, ACF, & sint adhuc per puncta, N, S, ipsi, CF, ductæ parallelæ, TL, HR, igitur quadratum, RS, erit æquale rectangulo, TSL, & quadratum, MN, æquale rectangulo, HNR, at rectangulum, TSL, ad, HNR, habet rationem compositam ex ea, quam habet, TS, ad, HN, .i. SB, ad, BN, quia trianguli, BTS, BHN, sunt æquianguli, & ex ea, quam habet, SL, ad, NR, .i. SV, ad, VN, quia pariter trianguli, SVL, NVR, sunt æquianguli, duæ autem rationes, SB, ad, BN, &, SV, ad, VN, componunt

14. Secun. Elem.

Ex Sexta lib. 2. seq. vel ex 23. Sex. Elem.

rationem rectanguli, BSV, ad rectangulum, BNV, ergo rectangulum, TSL, ad, HNR, .i. quadratum, BS, ad quadratum, MN, vel quadratum, BD, ad quadratum, MO, erit vt rectangulum, VSB, ad rectangulum, VNB, quod ostendere opus erat; hæc autem ab Apollonio vocatur Ellipsis. Ex Sexta lib. 2. seq. vel ex 23. Sexti Ele.

SCHOLIVM.

HÆc circa sectiones conicas apposui, tum vt quod mihi mente succurrit in lucem proferrem, tum vt elucescat quam facilè passiones, quæ ab Apollonio in Elementis conicis circa eandem diametros, vel axes quoscũq; demonstrantur, circa eos, qui axes, vel diametri principales, siue ex generatione vocantur modo supradicto ostendantur. His tamen contenti ex Apollonio recipiemus pro dictarum sectionum axibus, vel diametris quibuscumque, quod ipse colligit ad finem Prop. 51. primi Conicorum, scilicet:

In Parabola vnamquamq; rectarum linearum, quæ diametro ex generatione ducuntur æquidistãtes, diametrum esse: In hyperbola verò, & ellipsi, & oppositis sectionibus vnamquamq; earum, quæ per centrum ducuntur, & in parabola quidem applicatas ad vnamquamq; diametrum, æquidistantes cõtingentibus, posse rectangula ipsi adiacentia: In hyperbola, & oppositis posse rectangula adiacentia ipsi, quæ excedunt eadem figura: In ellipsi autem, quæ eadem deficiunt: Postremò quæcumq; circa sectiones adhibitis principalibus diametris demõstrata sunt, & alijs diametris assumptis eadem contingere.

Tres autem proximæ Propositiones etiam in meo Speculo Vstorio descriptæ fuerunt, cum & ibi ijsdem indigerem, has verò hic repetere volui, vt qui meum illud Speculum non viderunt, etiam ijsdem potiri possint: Aliqua tamen ex infrascriptis nunc ex Archimede, & eiusdem Commentatoribus sumemus, vt iam ostensa, ne has demonstrationes, quæ apud præfatos Auctores videri possunt, frustra repetamus.

THEO-

THEOREMA XXXVIII. PROP. XLI.

SI sphæra, vel sphæroides, conoides parabolicum, vel hyperbolicum planis secentur ad axem rectis, communes sectiones erunt circuli diametros in eadem figura ducta per axem (quæ est illa, quæ per reuolutionem creat dictum solidum) sitas habentes.

Patet hæc propositio, nam supradicta sunt solida rotunda, nascuntur .n. ex reuolutione figurarum circa axem.

Defin. 6. 34. huius.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLII.

SI conoides parabolicum plano secetur non quidem per axem, neq; æquidistanter axi, neq; ad rectos angulos cum axe, communis sectio erit ellipsis, diameter verò ipsius maior erit linea concepta in conoide ab intersectione facta planorum, eius scilicet, quod secat figuram, & eius, quod ducitur recto per axem ad planum secans, minor verò diameter æqualis erit distantiæ linearum ductarum æquidistanter axi ab extremis diametri maioris.

Hæc ostenditur ab Archimede lib. de Conoidibus, & Sphæroidibus p. 13.

THEOREMA XL. PROPOS. XLIII.

SI conoides hyperbolicum plano secetur coincidente in omnia coni latera conoides com-

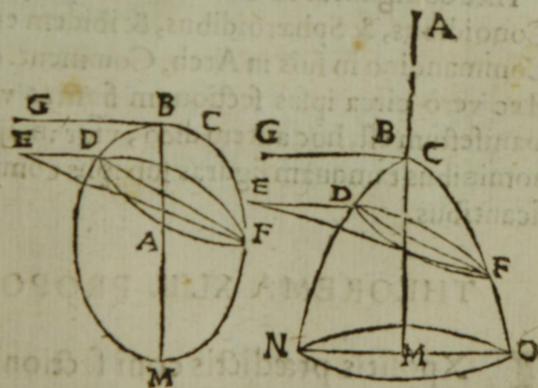
præ-

prȩhendentis non recto ad axem; sectio erit ellipsis, diameter verò maior ipsius erit concepta in conoide à sectione facta planorũ, alterius quidem secantis figuram, & alterius acti per axem recto ad planum secans. Archim. ibid. Prop. 14.

THEOREMA XLI. PROP. XLIV.

SI sphæroides plano secetur nõ recto ad axem, sectio erit ellipsis, diameter verò ipsius maior erit concepta in sphȩroide sectio duorum planorum, eius scilicet, quod secat figuram, & eius, quod ducitur per axem recto ad planũ secans. Arch. ibid. Prop. 15.

Minor verò diameter sic habetur. Sit Sphæroides, vel conoides hyperbolicum, BDMF, axis, BM, centrum, A, ellipsis verò p axem trãsiens in sphæroide, BDMF, in conoide verò hyperbola, NCO. Secetur autem sphæroides, vel conoides plano nõ recto ad axẽ, sed erecto figuræ, BDMF,



ex quo fiat in ipsis sectio, DF, hæc erit ellipsis, cuius maior diameter, DF. Inueniatur nunc vertex ellipsis, seu hyper-

bolæ, BDMF, respectu ipsius, DF, qui sit, C, & iungatur, CB, ac per, B, agatur, BG, tangens in, B, ipsam ellipsim, seu hyperbolam, tandem à puncto, D, parallela ipsi, BG, & à puncto, F, parallela ipsi, CB, producantur, DE, FE, quæ inuicem concurrent vt in, E. Dico igitur, quod erit, ED, minor diameter eiusdem ellipsis, DF.

Hoc autem demonstrat ibid. Dauid Riualtus in Commentarijs in Archim. ad Prop. 14. & 15.

THEOREMA XLII. PROPOS. XLV.

SI sphæroides, vel conoides parabolicum, seu hyperbolicum secentur quomodocūq; planis parallelis ad axem rectis, siue inclinatis, communes sectiones similes erunt, & diametri eiusdem rationis erunt omnes in eadem figura per axem transeunte, rectè easdem secante.

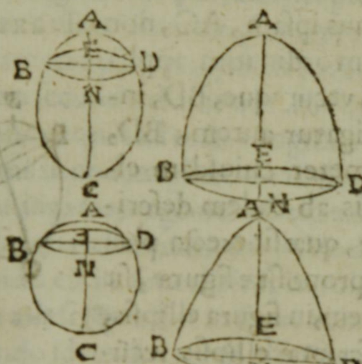
Hæc colliguntur in Coroll. 2. Prop. 15. lib. Arch. de Conoidibus, & Sphæroidibus, & ibidem etiam à Federico Commandino in suis in Arch. Comment. demonstrantur. Hæc verò circa ipsas sectionum figuras verificari pariter manifestum est, hoc autem dico, vtor .n. ijsdem sectionum nominibus tamquam figuras sub ipsis comprehensas significantibus.

THEOREMA XLIII. PROPOS. XLVI.

EXpositis prædictis coni sectionibus, Circulo nempè, Ellipsi, Parabola, & Hyperbola, si, quę ad earundem axes ordinatim applicantur, diametri esse intelligantur circulorum ab ip-

ſis deſcriptorum, qui ſint erecti planis ipſarum figurarum, periphæriæ deſcriptorum circulorum in ſectione, quæ eſt circulus, erunt omnes in ſuperficie ſphęræ, in Ellipſi verò in ſuperficie ſphæroidis, in Parabola in ſuperficie conoidis parabolici, & in Hyperbola in ſuperficie conoidis Hyperbolici.

Sint prædictæ ſectiones figuræ ſcilicet, ipſæ, ABCD, earum axes, AC, vna ex ordinatim ad axim applicatis, BD, quę intelligatur eſſe diameter ab ea deſcripti circuli, BNDE. Dico circumferentiam, BNDE, eſſe in dicta ſuperficie. Intelligantur dictę figuræ reuolui circa ſuos axes, vt ex circulo fiat ſphæra, ex ellipſi ſphæroides, ex parabola conoides parabolicum, & ex hyperbola hyperbolicum, ſecentur autem planis ad axem rectis, eundem axem ſecantibus in eodem puncto, in quo deſcriptus circulus eum ſecat, producetur ergo ab hoc ſecante plano in ipſis ſolidis circulus centrum in axe habens, cuius diameter erit, BD, habemus igitur duos circulos in eodem plano, circa eandem diametrum, ergo illi erunt congruentes, periphæria autem circuli dicto ſecante plano in dicto ſolido producti eſt in ſuperficie ambiente dictum ſolidum, ergo & periphæria circuli, BNDE, deſcripti, vt dictum eſt, erit in tali ſuperficie, ſcilicet in ſuperficie ſphæræ in figura circuli, ſphæroidis in figura ellipſis, conoidis parabolici in figura parabolæ, & hyperbolici



34. huius.

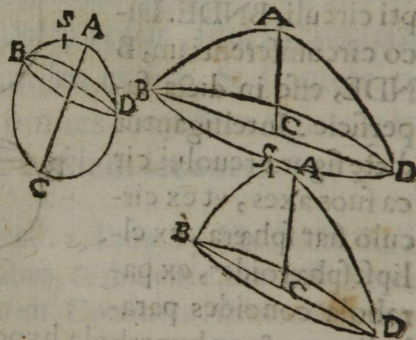
Corol. 34. huius.

bolici in figura hyperbolæ, idem ostendemus de alijs quibuscunq; sic descriptis circulis ab ordinatim applicatis ad dictos axes tanquam à diametris, qui sint erecti eisdem sectionibus, igitur quod proponebatur demonstratum fuit.

THEOREMA XLIV. PROP. XLVII.

INfrascriptis positis, eadem adhuc sequi ostendemus.

Ijsdem enim expositis figuris, præter circulum, supponamus ipsam, AC, non esse axem, sed diametrum, & ad ipsam ordinatim applicari vtcumque, BD, intelligatur autem, BD, diameter cuiusdam ellipsis ab eadem descriptæ, quæ sit erecta plano propositæ figuræ, sit autem, in figura ellipsis, descriptæ ellipsis secũda diameter perpendicularis ipsi, BD, & æqualis ductæ à puncto, B, parallelæ tangenti ellipsim, ABC D, in extremitate eiusdem axis (quæ tangat in, S,) interie-



44. huius. ctæ inter, BD, & eam, quæ ducitur à puncto, D, parallela iungenti puncta, S, A. In figura verò hyperbolæ sit secunda diameter perpendicularis, BD, & æqualis ei, quæ ducitur à puncto, D, parallela tangenti hyperbolam in extremitate axis (vt in, S,) interiectæ inter, BD, & eam, quæ ducitur à puncto, B, parallela iungenti puncta, S, A, & tandem in parabola sit secũda diameter perpendicularis quo-
42. huius. que ipsi, BD, & æqualis distantiæ parallelarum eiusdem axi, quæ ducuntur ab extremitatibus ipsius, B, D. Intelligã-

tur

tur deinde cōſtituta conoides, & ſphęroides, in quibus planis per eorum axes ductis, productæ ſint figuræ iam dictæ, ſecentur deinde planis ad axem obliquis, ſed erectis ad dictas figuras, & ſint eadem plana deſcriptarum ellipſium dicta ſolida ſecantia, erūt ergo ex his ſecantibus planis conceptæ in ipſis figuræ pariter ellipſes, quarū diametri erunt, BD, quidem prima, ſecunda autem in ſphæroide æqualis ductæ à puncto, B, parallelæ tangenti ellipſim in, S, interiectæ inter ipſam, BD, & ductam à puncto, D, parallelam iungenti puncta, S, A, (in cæteris autem ſolidis eadem ſuo modo verificabūtur) ergo in ſphæroide ipſa, BD, eſt prima diameter dictæ ellipſis, quæ à dicto ſecante plano producitur, & eſt etiam prima diameter ellipſis, quæ deſcribitur modo ſupradicto, ſunt autem ſecundæ diametri vtriuſq; ellipſis æquales, immo cōmunes, quia ad rectos angulos ſecāt ipſam, BD, ergo habemus in eodem plano duas ellipſes circa eaſdem diametros coniugatas, ergo neceſſariò erunt cōgruentes, ſed linea ellipſis, quæ eſt communis ſectio dicti plani, & ſuperficiei ſphæroidis eſt in ſuperficie ſphæroidis, ergo & linea ellipſis vt ſupra deſcriptæ erit in ſuperficie dicti ſphæroidis. Eodem modo idem de cęteris ellipſibus ſimiliter deſcriptis demonſtrabimus tum in ſphæroide, tum etiam in conoidibus parabolicis, & hyperbolicis, quæ oſtendere opus erat.

44. huius.

Elicietur ex Corol. 25. huius.

COROLLARIVM.

Hinc patet propoſito aliquo ex ſupradictis ſolidis, eoq; ſecto planis vtcumq; parallelis ad axem rectis, ſiue obliquis figuras, quæ ex ſectione planorum in ipſis ſolidis producuntur, eaſdem eſſe illis, quæ deſcribuntur lineis rectis, tamquam homologis diametris, & primis, ijs, inquam, quæ ſunt communes ſectiones dictarum æquidiſtātium figurarum, & figuræ, quæ produceretur ducto plano per axem rectè eas ſecante, quæ deſcribentes eſſent, quæ

ordi-

ordinatim applicantur ad axes, vel diametros dictarũ figurarum, secundis autem diametris descriptarum figurarum existentibus, ijs, quæ supra dictæ sunt, prout postulat varietas solidorum, iuxta Prop. 42. 43. & 44. huius.

SCHOLIVM.

ADuerte tamen licet supra vocentur diametri, quæ dictas figuras describunt, debere tamen intelligi semper esse axes descriptarum figurarum, cum .n. nomen diametri sit commune diametro, & axi, aliquando vice axis vtimur nomine diametri, vt in circulo apparet, cuius tamen omnes diametri sunt axes: Insuper sciendum est etiam, quæ circa hyperbolam hic habentur, circa sectiones oppositas, quarum communes sunt dictæ passiones, quoq; intelligi posse. Eadem verò nedum in dictis integris solidis, sed etiam in eorum portionibus, siue in portionibus sectionum coni abscissis per lineas ad earum axim, vel diametrum ordinatim ductas, pariter verificari manifestum est.

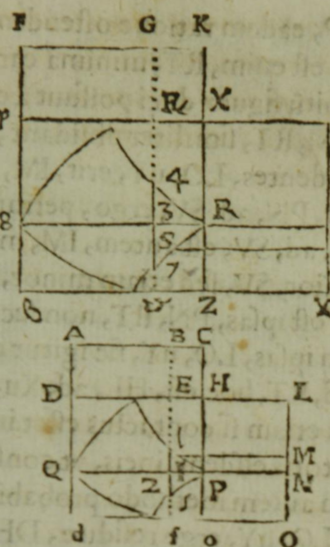
LEMMA.

PRopositis duabus quibuscunq; similibus figuris, duæ quæuis rectæ lineæ earum homologę poterunt esse incidentes, vel in ipsis productis reperientur saltem earum incidentes, & oppositarum tangentium, quibus ipsæ incidunt ad eundem angulum ex eadem parte, erunt autem dictæ homologæ semper inuentarum incidentium partes proportionales.

Sint duæ quæcunq; similes figuræ planæ, lQsP, 487R, in eisque duæ quælibet homologæ, ls, 47. Dico has esse vel incidentes, vel in eisdem productis reperiri posse incidentes prædictarum figurarum, & oppositarũ tangentium, quibus occurrant ipsæ homologæ, productæ, ad eundem angulum ex eadem parte, quales sint, DL, dO; pu, gY.

Du-

Ducantur autem vlterius oppositæ tangẽtes, quæ sunt regulæ homologarum, ls, 47, ipsæ, Ad, Co; Fg, KZ, quarũ & dictarum figurarum incidẽtes sint, AC, FK, parallelæ ipsis, DL, pu, hoc.n. fieri potest; erũt autem etiam ipsæ, dO, gY, regulæ homologarum, cum faciant angulos æquales cum regulis, dA, gF, vt suppono, & inueniri poterũt earum, & dictarum figurarum incidentes parallelæ eisdem, Ad, Fg, sint ipsæ, LO, uY, tales incidentes: Vel ergo homologæ datæ, ls, 47, terminãtur ad oppositas tangentes, DL, dO; pu, gY, vel non, & tunc producantur, & ipsis incidant in punctis, E, f; ℞, &, & vlterius productæ vsq; ad, AC, FK, secent ipsas in punctis, B, G. Vlterius vel, Ho, XZ, tangunt se totis, vel aliqua tantũ sui parte, vel in vno puncto tantum, prædictas figuras, tangant in punctis tantum, P, R, & ab ipsis ducantur parallelæ regulis, dO, gY, ipsæ, PN, RT, occurrentes incidentibus, LO, uY, in punctis, N, T, dico, LN, uY, similiter ad eandem partem secari in, N, T, si .n. hoc non sit, diuidatur, LO, in, M, similiter ad eandem partem, ac diuiditur, uY, in, T, & per, M, extendatur, MI, parallela, dO, incidentes ambitui figuræ in, I, & rursus secetur, uY, in, V, similiter ad eandem partem, vt secatur, LO, in, N, quia ergo, N, est intra puncta, M, O, etiam, V, erit inter puncta, T, Y; ducatur tandem, VS, parallela, gY, incidens ambitui figuræ in, S. Quia igitur, MI, non incidit in punctum contactus rectæ, Ho, cum figura, erit, MI, maior,



Corol. 19. & p. 24.

23. huius.

Coroll. 2. 19. & p. 24.

ior, NP, eadem ratione oſtendemus, SV, fore maiorem ipſa, RT, eſt enim, RT, minima earũ, quæ ab incidente, uY, ad ambitũ figuræ duci poſſunt æquidiſtanter ipſi, gY. Cum verò, IM, RT, ſimiliter diuidant, & ad eandem partem ipſas incidentes, LO, uY, erit, IM, ad, RT, vt, LO, ad, uY, ideſt vt, PN, ad, SV, ergo, permutando, IM, ad, PN, erit vt, RT, ad, SV, eſt autem, IM, maior, PN, ergo etiam, RT, erit maior, SV, ſed etiam minor, quod eſt abſurdum, ergo falſum eſt ipſas, PN, RT, non ſecare ſimiliter ad eandem partem ipſas, LO, uY, ſic igitur eaſdem diuidunt, eritque, PN, ad, RT, hoc eſt, HL, ad, Xu, vt, LO, ad, uY, idẽ oſtendemus etiam ſi contactus eſſet in parte linearum, Ho, XZ, ſeu in totis eiſdem lineis, vt conſideranti facilè innoteſcet. Eadem autem methodo probabimus etiam, DL, pu, eſſe vt ipſas, LO, uY, ergo reſiduæ, DH, pX, hoc eſt, AC, FK, erunt vt, LO, uY, ideſt vt, E4, ℞&, ſed, AC, FK, ſimiliter ſunt diuiſæ ab homologis, s l, 7 4, productis, in punctis, B, G, ergo, AB, ad, FG, ideſt, DE, ad, p℞, erit vt, AC, ad, FK, ideſt vt, E4, ad, ℞&. Extendantur, NP, TR, quæ diuidunt, LO, uY, ſimiliter ad eandem partem, ſecentque ipſos, E4, ℞&, in punctis, 2, 3, incidat autem, NQ, in, Q, punctum contactus lineæ, Ad, cum figura, oſtendemus, vt factũ eſt circa ipſas, NP, TR, etiam, T8, incidere in punctum contactus rectæ, pg, cum figura, quod ſit ipſum, 8, quoniam ergo probatum eſt, DE, ad, p℞, eſſe vt, E4, ad, ℞&, erit etiam, Q2, ad, 8 3, vt, E4, ad, ℞&. Similiter probabimus, 2P, ad, 3R, eſſe vt, E4, ad, ℞&, & diuidunt ipſas, E4, ℞&, ſimiliter ad eandem partem, à quibus viciſſim ſecantur ad eundem angulum ex eadem parte, cum, E4, ℞&, ſint parallelæ ipſis, LO, uY, ergo, E4, ℞&, erunt incidentes ſimilium figurarum, PlQs, R487, & oppoſitarum tangentium, DH, do, pX, gZ, quod etiam verificaretur de ipſis homologis, l s, 4 7, ſi fuiſſent ad oppoſitas tangentes terminatæ in punctis, E, 4, ℞, &. Modò etiam ſi ad illa puncta non termi-

Defin. 10. huius.

Defin. 10. huius.

24. huius.

minentur dico tamen, ls, ad, E4, esse vt, 47, ad, ℞&, etenim, ls, ad, 47, est vt, AC, ad, FK, idest vt, LO, ad, uY, vel vt, E4, ad, ℞&, vt probatum est, ergo permutando, ls, ad, E4, erit vt, 47, ad, ℞&, quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM.

ET quoniam probatum est, ls, ad, 47, esse vt, E4, ad, ℞&, seu vt, LO, ad, uY, vt autem, LO, ad, uY, ita duæ homologæ, QP, ad, 83, ideò duæ homologæ, ls, 47, sunt inter se, vt duæ homologæ, QP, 8R, & cum oppositæ tangentes, DL, dO, pu, gY, ductæ sint vtcumque, licet ad eundem angulum ex eadem parte cum ipsis, E4, ℞&, ideò duæ homologæ, ls, 47, erunt vt quæcūq; aliæ duæ homologæ quibusuis regulis assumptæ, vel vt earum incidentes, immo & ipsæ incidentes, erunt inter se, vt quæuis aliæ duæ incidentes, ostensum .n. est, AC, ad, FK, esse vt, LO, ad, uY.

THEOREMA XLV. PROPOS. XLVIII.

SI sint duæ similes figuræ planæ, quarum sint ductæ oppositæ tangentes, quæ sunt homologarum earundem regulæ, per quas extendantur duo plana vtcūq; inuicem parallela æquè ad eandem partem ijsdem inclinata, deinde sumptis duabus quibuslibet homologis illæ describere intelligantur figuras planas similes, ductis primò planis æquidistantes, ita vt sint similiter descriptæ, & describentes earum lineæ, vel latera homologa, idem autem contingat cæteris homologis, etiam si omnes figuræ descriptæ seorsim in vnaquaq; propositarum figurarum non essent similes; Solida, quæ ab ijsdem tanguntur oppositis

planis, in quibus ex traiectione planorum præfatis oppositis tangentibus æquidistantium eædem figuræ produci possunt, erũt similia, & figuræ descriptæ eorundem homologæ figuræ, & earum regulæ ipsa opposita tangentia plana, quorum & dictorum solidorum figuræ incidentes erunt primò propositæ figuræ.

Defin. 11. huius. Hæc Propositio manifesta est, inuoluit .n. requisita omnia definitionis similium solidorum; nam hic habemus duo solida, ea nempè, quæ secantur planis dictarum figurarum, quorum duo extremo, siue primò ducta æquidistantia plana talia sunt, vt illis incidant duo plana (in quibus nempè reperiuntur propositæ figuræ similes, quarũ homologarum regulæ sunt communes sectiones earum, & dictorum oppositorum planorum tangentium) ad eundem angulum ex eadem parte, sunt autem figuræ planæ descriptæ lineis, vel lateribus homologis propositarum figurarum inter se similes, illæ .s. quæ secant incidentes propositarum figurarum, 37 Vndec. Elem. & subinde altitudines dictorum solidorũ similiter ad eandem partem, & æquidistant dictis tangentibus planis, respectu quorum altitudines dictas assumptas intelligo; & quia supponimus omnium descriptarum similium figurarum latera homologa describentia esse lineas, vel latera homologa similium figurarum, quæ omnia sunt inter se æ- Coroll. 23. huius. quidistantia, ideò omnes earum lineæ homologæ duabus quibusdam regulis æquidistabunt, & ipsa latera describentia erunt etiam lineæ incidentes, vel in eisdem productis saltem reperiri poterunt incidentes descriptarũ similium figurarum, & oppositarum tangentium duabus quibusdam semper æquidistantium, scilicet eis, quæ cũ dictis incidentibus angulos continent æquales (erunt autem dicta latera homologa incidentes, si dictæ tangentes transeant per

extrema laterum describentium, si autem non, poterunt tamen in ipsis lateribus productis assumi earũdem incidentes, quæ erunt, vt ipsa latera homologa) & cum ipsæ propositæ figuræ sint similes, subinde etiam erunt similes illæ, quæ capient omnes dictas incidentes, si fortè accidat ipsa latera homologa describentia nõ esse incidentes, vt dictum est, igitur adsunt hic omnes conditiones definitionis meæ similium solidorum, ergo solida, in quibus dictæ similes descriptæ figuræ ex traiectione dictorum planorum producuntur, erunt similia, & regulæ figurarum homologarum erunt dicta plana tangentia, & eorum, ac dictorum solidorum figuræ incidentes, propositæ primò figuræ, vel aliæ in eisdem planis inuentæ, illæ scilicet, in quibus iacent omnium similium descriptarum figurarum lineæ incidentes, quod ostendere opus erat. Ex Lem. antec.

COROLLARIVM.

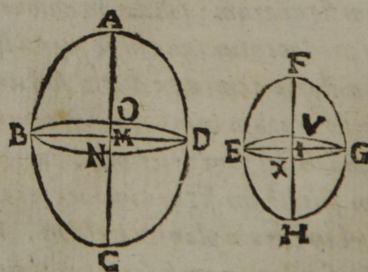
Hinc apparet si descriptæ figuræ omnes sint inter se similes, dicta solida pariter esse similia. Vnde si intelligamus similes coni sectionum portiones, siue easdem integras, circa axes, vel diametros, & ab ordinatim applicatis ad axim, vel diametrum, earundem describi similes figuras planas eisdem sectionum portionibus erectas, tanquam à lineis, vel lateribus homologis descriptarum figurarum; solida, in quibus descriptæ figuræ ex traiectis planis producentur (quæ in sequenti libro dicuntur, solida ad inuicem similaria genita ex dictis sectionum portionibus) erunt similia, & figurarum homologarum eorundem regula opposita tangentia plana dictis iam descriptis figuris æquidistantia, quorum & dictorum solidorum figuræ incidentes erunt dictæ sectionum portiones, vel in earum planis iacebunt. Vnde colligimus omnes sphæras esse similes, nam si secentur planis per axem, conceptæ figuræ fiunt similes, id est circuli, quod si secentur adhuc planis ad horum circulorum plana erectis, productæ figuræ fiunt pariter circuli de- C. Def. 8. lib. 2. Lẽma 31. huius. pr. 33. huius.

34. huius. *ſcripti tanquam diametris eiſdem rectis lineis, in quibus coinci-*
Lẽma 31. huius. *dunt circulis per axem ductis, quæ diametri ſunt etiam incidentes eorundem deſcriptorum circulorum, & oppoſitarum tangentium per eorum extrema ductarum, quæ tangentes omnes inter ſe æquidiſtant, vt facilè patet, & ſunt iſtæ incidentes, ſiue diametri de-*
Lẽma 31. huius. *ſcriptorum circulorum, quæ axem diuidunt ſimiliter ad eandem partem, vt ipſi axes, igitur ſphæræ omnes ſunt ſimiles, & ductis duobus planis oppoſitis tangentibus vtcunque, & per axem, qui iungit puncta contactuum ductis planis, hinc effecti circuli erunt figuræ incidentes dictorum tangentium, & ſphærarum, & dicta plana tangentia erunt regulæ homologarum figurarum earũdem, vnde tandem patet quoſuis circulos in ſphæris per centrũ tranſeuntes poſſe eſſe figuras incidentes earũdem ſphærarum, & planorum oppoſitorum tangẽtium ſphæras in extremis punctis diametrorum quorumuis dictorum circulorum per centrum tranſeuntium.*

THEOREMA XLVI. PROP. XLIX.

POſita definitione particulari ſimilium ſphę-roidum, ſequitur & generalis ſimilium ſo-lidorum.

Sint ſimiles ſphęroides iuxta definitionem particularem de ipſis allatam, ABCD, FEHG. Dico has eſſe ſimiles iuxta definitionem generalem ſimilium ſolidorum; ductis enim planis per axes, AC, FH, producantur in eiſdem ellipſes, ABC
33. huius. D, FEHG, quæ erunt eædem illis, ex qua-
28. huius. rum reuolutione circa axes, AC, FH, oriuntur dictæ ſphęroides, & proinde erunt ſimiles tum iuxta definit. Apollonij,



nij, tum iuxta definit. 10. huius. Et quoniam si secentur planis ad axem rectis in dictis sphæroidibus gignuntur circuli, vt ex. g. BNDO, EXGV, (qui secent axes, AC, FH, similiter ad eandem partem in pũctis, M, I,) quorum diametri sunt communes sectiones cum figuris per axem transeuntibus, vt ipsæ, BD, BG, ideò istæ erunt incidentes ipsorum circulorum, BNDQ, EXGV, & oppositarũ tangentium in punctis, B, D; E, G; quod etiam de cæteris intelligemus. Ergo si per axium, AC, FH, extrema ducta sint duo opposita tangentia plana, quæ erunt circulis, BNDO, EXGV, parallela, habebimus plana ellipsium, ABCD, FEHG, illis incidentia ad eundem angulum ex eadem parte, nam ad illa sunt erecta, in quibus reperientur similes figuræ, ellipses nempè iam dictæ, & homologarum earundem regulæ erunt communes sectiones earũdem productorum planorum cum oppositis tangentibus planis, quæ homologæ erunt incidentes homologarum figurarum (quarum regulæ sunt dicta tangentia plana) & oppositarum tangentium per earundem extrema ductarum, quæ semper duabus quibusdam regulis æquidistabunt. Ergo dictæ sphæroides similes erunt iuxta defin. 10. huius, & earum, ac dictorum oppositorum tangentium planorũ figuræ incidentes erunt eædẽ ellipses, ABCD, FEHG, per axes trãseũtes, quod, &c.

34. huius.

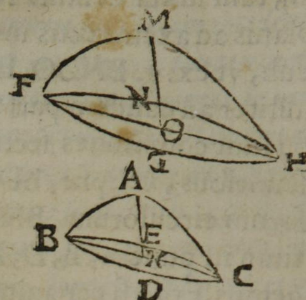
Lẽma 31. huius.

THEOREMA XLVII. PROPOS. L.

POsita definitione similium portionum sphærarum, vel sphæroidum, aut conoidum, siue earundem portionum, sequitur etiam definitio generalis similium solidorum.

Sint solida, FMH, BAC, similes portiones sphærarum, vel sphæroidum, vel similes conoides, seu conoidum portiones

Def. 9. tiones iuxta particularem definitionem de illis allatam. Dico eadem esse similia iuxta definitionem generalem similium solidorum. Bases ergo erunt vel circuli, vel similes ellipses, nempè, FGHN, BDCE, ductis autem planis per axes ad rectos angulos basibus fiant in ipsis figuræ, FMH, BAC, quæ erunt similes



sectionum coni portiones, & earum bases, FH, BC, erunt axes basium eorundem solidorum, ipsarum nempè figurarũ, FGHN, BDCE, sunt .n. solida rotunda, & plana, FMH, BAC, per axes transeuntia sunt basibus erecta. Sint autem solidorum iam dictorum axes, necnon axes, seu diametri figurarum, FMH, BAC, ipsæ, OM, XA. Quia ergo figuræ, FMH, BAC, sunt similes portionũ coni sectiones, quarum bases, siue ad earum axes, vel diametros, MO, AX, ordinatim applicatæ sunt, FH, BC, erunt homologarum earũdem regulæ, ac tangentes ipsas figuras ex vna parte, ex alia verò, quæ per vertices, M, A, eisdem ducentur æquidistantes, earundem verò oppositarum tangentium, ac ipsarum figurarum incidentes, MO, AX, eritque, FH, ad, BC, vt, MO, ad, AX. Si ergo bases, FGHN, BDCE, sint circuli erunt figuræ similes, quarum & oppositarum tangentium per extrema, FH, ductarum incidentes fient diametri, FH, BC. Si verò sint similes ellipses, quoniam, FH, BC, sunt axes, facilè probabimus, sicut pro circulo factum est ad Lemma Prop. 31. huius, auxilio Prop. 40. huius, ipsas, FH, BC, esse incidentes similium figurarum, FGHN, BDCE, & oppositarum tangentium, quæ per puncta, F, H; B, C, ducuntur (quæ ipsis, FH, BC, existent perpendiculares, cũ sint axes earũdem figurarum.) Et eodem modo si dicta solida secentur alijs planis præfatis basibus parallelis (ita tamen vt illa

Elicitur ex 37. huius.

28. huius.

Lẽma 31. huius.

diui-

diuidant similiter ad eandem partem ipsas, MO, AX, & subinde etiam altitudines ipsorum solidorũ respectu dictarum basium assumptas) ostendemus & productas in solidis figuras esse similes, & earum, ac oppositarum tangentiũ (æquidistantium tanquam regulis duabus oppositis tangentibus basium, FH, BC, per extrema, F, H; B, C, iam ductarum) incidentes esse communes ipsarum sectiones cum figuris, FMH, BAC, quæ omnes erunt lineæ homologæ similium figurarum, FMH, BAC, quarum regulæ, FH, BC. Ergo, ductis per, M, A, duobus planis basibus parallelis, quæ ipsa solida contingent, incidunt hisce oppositis tãgentibus planis ad eundem angulum ex eadem parte plana figurarum, FMH, BAC, sectis autem solidis planis parallelis, vt dictum est, fiunt in ipsis similes figuræ planæ, & earum incidentes capiuntur omnes in similibus figuris, FMH, BAC, quarum sunt homologæ, earumq; regulæ ipsæ, FH, BC, & lineæ homologæ figurarum homologarum duabus quibusdã regulis, vtpotè oppositis tangentibus basium, FGHN, BDCE, iam dictis, omnes æquidistant, ergo solida, FMH, BAC, sunt similia iuxta def. 11. huius, & earum, ac oppositorum tangentium planorum iam dictorum, figuræ incidentes sunt ipsæ, FMH, BAC, quod erat ostendendum. 17. Vndec. Elem.

COROLLARIVM I.

Hinc etiam non difficile intelligi potest, propositis duabus coni similibus sectionibus, FMH, BAC, quarum axes, vel diametri sint, MO, AX, ac posito ipsas, FH, BC, tanquam axes describere circulos, seu similes ellipses erectas planis figurarum, FMH, BAC, & cæteras omnes ordinatim applicatas ad ipsas, MO, AX, vel circulos, vel semper similes ellipses describere, vt dictum est, solida in cuius superficie capiuntur omnes periphæria circulorum, vel similium ellipsium, esse similes portiones sphærarum, vel similes sphæroides, vel conoides, earumuè portiones, similes inquam

nedum

nedũ iuxta def. 11. huius, hoc.n. habetur ex 48. huius, sed etiam iuxta def. 9. habentur .n. hic omnes istius conditiones, vt examinanti facilè apparebit, quod est conuersum eius, quod in præsenti Theor. propositum fuit. Hoc autem conuersum etiam in reliquis Theorematibus, in quibus definitiones particulares similium planarum, vel solidarum figurarum cum generalibus ostẽdimus concordare, poterat demonstrari, sed cum in sequẽtibus libris vel nullam, vel saltem nõ necessariam occasionem viderem me huius habiturum esse, & cum etiam facilè hoc studiosus, qui rectè priores propositiones intellexit, deducere posit, propterea ne lõgior fierem, consultò hoc prætermisi, quod tamen verum esse minimè dubito, & propterea hoc etiam pro vero supposito infrascriptum Corollarium subiungere volui.

COROLLARIVM II.

VLterius ergo cum hucusq; satis manifestum sit, definitiones particulares similium planarum, vel solidarum figurarum, cum definitionibus generalibus 10. nempè, & 11. huius concordare, ideò in sequentibus vtriusq; definitionis, tam particularis .s. quam generalis, prout libuerit, hypotesi nos vti posse ex hoc colligemus.

SCHOLIVM.

NE miretur autem Lector si in hoc quasdam propositiones assumpserim tamquam veras, quæ in sequẽti Libro demonstrantur, quales præcipuè esse potuerunt Prop. 5. 6. 7. & 8. lib. sequentis, has .n. accepi tamquam in Elementis iam demonstratas, licet potuissent etiam desumi ex seq. Lib. 2. cum ipsæ non penderent ex hic demonstrandis, ne fieret petitio principij, vt suis locis admonui in præsenti Libro; placuit tamen easdem Prop. noua mea methodo indiuisibilium etiam demonstrare, vt ex ea, tamquam ex herculeo cornu, quanta sit manans demonstrationum affluentia passim digito demonstrarem.

Finis Primi Libri.

GEOMETRIÆ CAVALERII LIBER SECVNDVS.

In quo de Triangulo præcipuè, & Parallelogrammo, ac Solidis ab eisdem genitis plura demonstrantur, necnon aliæ quædam Propositiones lemmaticæ pro sequentibus Libris ostenduntur.

DEFINITIONES.

I.



SI per oppositas tangentes cuiuscunq; datæ planæ figuræ ducãtur duo plana inuicem parallela, recta, siue inclinata ad planum datæ figuræ, hinc inde indefinitè producta; quorum alterũ moueatur versus reliquum eidem semper æquidistans donec illi congruerit: singulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes Post Secũ. lib. 1.

 sectio-

ſectiones plani moti, & datæ figuræ, ſimul collectæ vocentur: Omnes lineæ talis figuræ, ſumptæ regula vna earundem; & hoc cum plana ſunt recta ad datam figuram: Cum verò ad illam ſunt inclinata vocentur. Omnes lineæ eiuſdem obliqui tranſitus datæ figuræ, regula pariter earundem vna; libeat tamen, cũ expediet, etiam prædictas vocare, recti tranſitus, ſicuti has, obliqui tranſitus, eius nempè, qui fit in tali æquidiſtãtium planorum ad datam figuram inclinatione.

B Defin. Sec. I 1.

COROLLARIVM.

Coro. Prī. I 1.

Hinc patet, quoniam oppoſitæ tangentes regula quacunq; in data figura duci poſſunt, etiam omnes lineas datæ figuræ regula quacunq; recta linea propoſita haberi poſſe, tum recti, tum etiam eiuſdem obliqui tranſitus.

II.

Coro. Prī. I 1.

SI, propoſito quocunq; ſolido, eiuſdem oppoſita plana tangentia regula quacunq; ducta fuerint, hinc inde indefinitè producta, quorum alterum verſus reliquum moueatur ſemper eidem æquidiſtans, donec illi congruerit; ſingula plana, quæ in toto motu concipiuntur in propoſito ſolido, ſimul collecta, vocentur: Omnia plana propoſiti ſolidi, ſumpta, regula eorundem vno.

Poſt. Sec. I 1.

B Defin. Sec. I 1.

CO-

COROLLARIVM.

Hinc etiam discimus, veluti propositi solidi opposita tangentia plana quacunq; regula duci possunt, ita eiusdem omnia plana regula quocunq; plano haberi posse. Coro. Pri. l. 1.

III.

SI oppositis tangentibus planis occurrant interius duæ rectæ lineæ, vna perpendiculariter, reliqua obliquè; puncta, quæ sunt communes sectiones propositæ lineæ perpendiculariter incidentis, & singulorum planorum, quæ collecta dicuntur, omnia plana (ita tamen producta, vt easdem secare possint) siue puncta, quæ sunt cõmunes sectiones eiusdem, & moti plani, fiuntq; in toto motu, simul collecta vocentur: Omnia puncta recti transitus propositæ lineæ perpendiculariter incidentis; quæ in obliquè incidente vocentur, eiusdem obliqui transitus.

COROLLARIVM.

Ex hoc habetur singula puncta recti transitus, vel obliqui, incidentis lineæ, nedum esse communes sectiones illius, & singulorum, quæ collecta dicuntur, omnia plana propositi solidi, sed etiam, si per talem incidentem extendatur planum, esse communes sectiones illius, & singularum, quæ collectæ dicuntur: Omnes lineæ planæ figuræ, cuius opposita tangẽtes sunt communes sectiones plani eiusdem figuræ, & oppositorum tangentium dicti solidi: nam motum planum designat in plano secante rectam lineam, & insimul punctum in incidente, quod reperitur in illa recta linea,

& ideò idem punctum est communis sectio tum moti plani, & rectæ incidentis, tum vnius earum, quæ dicuntur omnes lineæ datæ figuræ planæ (ita tamen productæ, vt has incidẽtes secare possint) & eiusdem incidentis.

IV.

SI inter alterum extremorum punctorum propositæ rectæ lineæ, & singula puncta, quæ simul collecta dicuntur omnia puncta recti, vel eiusdem obliqui transitus eiusdem, sumamus interiacentes lineas, dicantur istæ simul collectæ: Omnes abscissæ propositæ lineæ, quas (etiã si non exprimatur) vocari supponemus recti transitus, si puncta sint recti transitus, vel eiusdẽ obliqui transitus, si puncta sint eiusdem obliqui transitus.

V.

REctæ lineæ verò in antecedẽtis definitionis proposita linea inter eadem puncta, & reliquum extremorum interiacentes, dicentur: Residuæ omnium abscissarum propositæ lineæ recti transitus, si puncta sint recti transitus, vel eiusdem obliqui transitus, si sumpta puncta sint eiusdem obliqui transitus.

COROLLARIVM.

HInc liquet cuilibet abscissæ in proximis definitionibus propositæ lineæ respondere vnam ex residuis, ita vt tot sint illæ, quæ dicuntur residuæ omnium abscissarũ propositæ lineæ, quot illæ, quæ dicuntur eiusdem omnes abscissæ, siue recti, siue eiusdem obliqui

obliqui transitus, nam residuæ omnium abscissarum propositæ lineæ interiacent inter reliquum extremum eiusdem punctum, & eadem illa puncta, inter quæ, & extremum primò dictum, interiacent omnes abscissæ.

VI.

SI pro qualibet earum, quæ dicuntur omnes abscissæ propositæ rectæ lineæ, ipsa proposita linea, siue eidem æqualis, semel assumpta intelligatur, istæ simul collectæ dicentur: Maximæ omnium abscissarum propositæ lineę, vel subintelligentur semper esse omnium, etiam si dicerentur solummodò: Maximæ abscissarum.

COROLLARIVM.

ET quia omnes abscissæ tot sunt, quot omnes residuæ, maximè verò omnium abscissarum tot sunt, quot omnes abscissæ, nam cuilibet abscissæ respondet vna maximarũ, ideò maximæ omnium abscissarum propositæ lineæ tot erunt, quot etiam residuæ omnium abscissarum, quotcunq; sint omnes abscissæ, vel residuæ; idest pro qualibet residua habebimus quoq; vnam maximarum; ijs semper recti, vel eiusdem obliqui transitus assumptis.

VII.

SI cuilibet omnium abscissarum propositæ rectæ lineæ adiuncta intelligatur alia recta linea cuidam æqualis, compositæ ex omnibus abscissis, & adiunctis, simul collectæ dicẽtur: Omnes abscissæ propositæ lineæ adiuncta tali, nempè adiuncta illa, cui, quæ adiungũtur, sunt æquales: si verò fieret hæc adiunctio residuis, vel maximis

om-

omnium abſciſſarũ, pariter dicerentur: Reſiduæ, vel Maximæ omnium abſciſſarũ adiuncta eadem; recti ſemper, vel eiuſdem obliqui tranſitus.

A

A. VIII.

PRopoſita quacunq; plana figura, & in ea ducta vtcunq; recta linea vſq; ad ambitum hinc inde terminata, ſi ipſa recta linea deſcribere quamcũq; figuram planam intelligatur, non exiſtentem in plano propoſitæ figuræ, ac deinde reliquæ earum, quæ dicuntur omnes lineæ propoſitæ figuræ, ſumptæ regula iam ducta linea (& recti tranſitus ſi deſcripta figura ſit erecta plano propoſitæ, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi illi ſit inclinata, eius nempè tranſitus, qui fit in tali inclinatione) deſcribere intelligãtur figuras planas ſimiles, ac ſimiliter poſitas, & æquidiſtantes primò deſcriptæ, ita vt omnes deſcribentes ſint deſcriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa; omnes deſcriptæ figuræ ſimul ſumptæ dicẽtur: Omnes figuræ planæ ſimiles talis propoſitæ figuræ, ſumptæ regula earũ vna, vel regula etiam ipſa linea, vel latere deſcribente; vt ſi deſcriptæ figuræ eſſent quadrata, hæ dicerentur. Omnia quadrata talis propoſitę figurę, vel ſi eſſent triangula æquilatera dicerentur. Omnia triangula æquilatera eiuſdem.

So-

B. B

Solidum, cuius omnes descriptæ figuræ similes sunt omnia plana, dicetur: Solidum similare genitum ex proposita figura iuxta eãdem regulam, iuxta quam sumptæ omnes dictæ figuræ similes fuerunt, quæ igitur ex figuris propositis, vt sic generantur, dicentur absq; alio addito: Solida similaria genita ex propositis figuris iuxta regulas omnium similium figurarum, quæ ipsorũ euadunt omnia plana, propositæ autem figuræ, eorundem genitrices figurę vocabuntur.

C. C

Cum verò duarum genitricium vtcunq; figurarum omnes descripę figurę nedum similes erũt, quæ reperientur in earum vnaquaque, sed etiam quæ sunt vnius, inueniẽtur similes omnibus figuris similibus alterius propositę figurę, fuerint autem in vtroque solido figuræ ęquè eleuatę super plana genitricium figurarum, tunc solida genita ex propositis figuris iuxta regulas eas, quę sunt regulę omnium similium figurarum earundem propositarum genitricium figurarum, dicentur solida inter se, vel ad inuicem similaria, genita ex dictis figuris iuxta dictas regulas, vel intelligentur semper esse inter se, seu ad inuicem similaria, licet hoc non exprimatur, quotiescunq; contrarium aliquid non adijciatur.

D. D

Cum autem duas figuras in eodem plano habue-

buerimus in eadem altitudine existentes, rectangula sub singulis earum, quę dicuntur omnes lineæ vnius propositarum figurarum, & illis in directum respondētibus in alia figura simul sumpta sic vocabimus, nempè Rectangula sub eisdem figuris, regula eadem, quę est omnium sumptarum linearum regula.

E.

Cum verò propositarum figurarum altera fuerit parallelogrammum, cuius basis, iuxta quam altitudo sumitur, sit sumpta pro regula, dicta rectangula vocabuntur etiam: Omnia rectangula reliquę figurę ęquè alta ac eorum vnum.

APPENDIX
Pro antecedentium Definitionum explicatione.

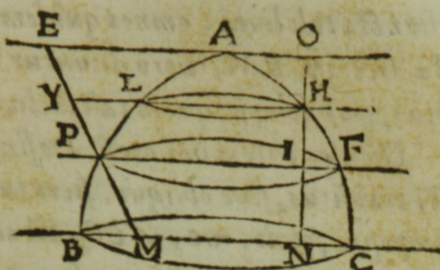
SIt figura plana quæcunque, ABC, duæ eiusdem oppositæ tangentes vtcunq; ductæ, EO, BC, intelligantur autem per, EO, BC, indefinitè extensa dua plana inuicem parallela, quorum quod transit per, EO, ex. g. moueatur versus planum per, BC, semper illi æquidistans, donec illi congruat, igitur communes sectiones talis moti, siue fluentis plani, & figuræ, ABC, quæ in toto motu fiunt, simul collectæ à me vocantur: Omnes lineæ figuræ, ABC, quarum aliquæ sint ipsæ, LH, PF, BC, sumptæ regula earū vna, vt, BC, recti transitus, cum plana parallela rectè secant figuram, ABC, eiusdem obliqui transitus, cum illam obliquè secant,

Coro. Pri. l. 1.

Defin. 1. huius

eius

eius ſcilicet tranſitus, qui in tali inclinatione fit.



Intelligamus nũc ABC, eſſe ſolidũ, cuius duo oppoſita plana tangentia ſint, quæ tranſeunt per, EO, BC, moueatur autem adhuc planum, per, EO, extenſum, verſus planũ per, BC, ſemper illi æquidiſtãs, igitur huius plani moti, ſiue fluentis conceptæ in ſolido, ABC, figuræ, quæ in toto motu fieri intelliguntur, voco: Omnia plana ſolidi, ABC, ſumpta regula eorum vno, quarum aliqua repræſentare poſſunt plana, LH, PF, BC. Definit. 2. huius.

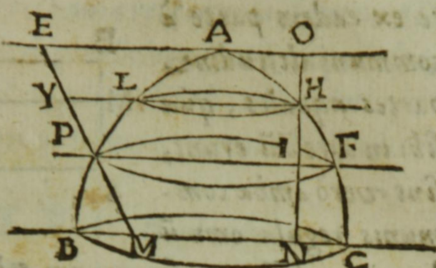
Vlterius duæ rectæ lineæ, ON, EM, occurrant planis per, EO, BC, tranſeuntibus iam dictis in punctis, O, N; E, M, quarum, ON, perpẽdiculariter, EM, verò obliquè illis incidat, puncta igitur, quæ ſunt communes ſectiones omnium planorum ſolidi, ABC, productorum, ſi opus ſit, & rectæ, ON, vocantur ipſius omnia puncta recti tranſitus, quarum aliqua ſunt puncta, H, I, N, quæ inter ipſa, & extremum punctum, O, continentur, vt ipſæ, OH, OI, ON, dicuntur abſciſſæ, quæ inter eadem puncta, & aliud extremum, quod eſt, N, continentur, vt ipſæ, NI, NH, NO, reſiduæ omnium abſciſſarũ; tot æquales ipſi, ON, quot ſunt omnes abſciſſæ, ſiue reſiduæ omnium abſciſſarũ, ON, dicuntur maximæ abſciſſarum, ſiue omnium abſciſſarum, ON, quibus ſi adiungatur aliqua recta linea, dicuntur abſciſſæ, reſiduæ, ſiue maximæ Def. Tert. huius. Def. Qua huius. Def Qui. huius. Def. Sexta huius. Def. Sept huius.

adiuncta tali linea, omnes quidem recti transitus in recta, ON, in, EM, verò dicuntur eiusdem obliqui transitus, eius nempè, qui in tali inclinatione fit.

Dicitur autem in Coroll. Defin. 3. eadem puncta recti transitus, siue obliqui, fieri tum ab omnibus planis propositi solidi, vt, ABC, tũ ab omnibus lineis plani per easdem incidentes extensi, vt ex.g. plani, quod transit per, EO, BC, quod quidem etiam transeat per ipsas, ON, EM, idem .n. planum, quod in solidum, ABC, producit figuram, LH, in figura plana, ABC, producit rectam, LH, & in recta, ON, punctum, H, in, EM, verò punctum, Y, quod transit, HL, producta, & ideò dico puncta H, Y, posse dici etiam effecta à recta, YH, & sic omnia puncta recti transitus quæ nempè sunt in, ON, nedum fieri à dictis planis parallelis, sed etiam à lineis parallelis figuræ, ABC, productis si opus sit, idem intellige in recta, EM, cuius omnia puncta dicuntur eiusdem obliqui transitus, eius nempè, qui in tali inclinatione fit.

Pro intelligentia Defin. 8. supponatur in figura plana proposita, ABC, vtcunq; recta, BC, quæ describat figuram planã, BC, eleuatam super, ABC, singulæ autem lineæ, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, ABC, sumptæ regula, BC, recti transitus, si figura, BC, sit erecta figuræ, ABC, vel eiusdem obliqui transitus (qui nempè in inclinatione descriptæ figuræ ad planum, ABC, fit, si figura, BC, sit inclinata ad figuram, ABC,) describere intelligantur figuras planas similes, similiter positas, & æquidistantes ipsi figuræ, BC, ita vt describentes sint descriptarum figurarũ lineæ, vel latera homologa, qua- D. Defin. 10. l. 1.

rum



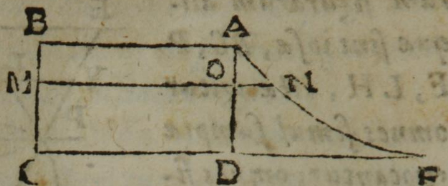
rum figurarum aliquæ sint ipsæ, BC, PF, LH, istæ igitur omnes simul sumptæ vocantur, omnes figuræ similes ipsius figuræ, ABC, sumptæ regula figura, BC, vel linea, aut latere, BC. A. Def. 8. huius.

Solidum, cuius omnes dictæ figuræ similes ipsius, ABC, sunt omnia plana dicitur, solidum similare genitum ex figura plana, ABC, iuxta regulam ipsam figuram, vel lineam, BC, & ipsa figura, ABC, appellatur genitrix eiusdem solidi, quod esse intelligatur ipsum, ABC. B. Def. 8. huius.

Si verò adsit alia figura plana, cuius omnes lineæ, quadam regula sumptæ, describant similes figuras planas, & similiter positas, omnes vni cuidam æquidistantes, & similes figuræ, BC, & æquè eleuatas super plana genitricium figurarum, solida similaria genita ex istis figuris, iuxta dictas regulas vocabuntur vlterius inter se, vel ad inuicem similaria, licet cum dicemus, solida similaria genita ex talibus, & talibus figuris, & hoc etiam sine alio addito, intelligemus semper ea esse inter se, vel ad inuicem similaria, etiam si non exprimatur, hoc autem nisi aliter explicetur. C. Def. 8. huius.

Pro declarandis D. & E. Defin. 8. exponantur duæ figuræ in eodem plano, & in eadem altitudine, quæ sint BCDA, ADE, sit autem altitudo figuræ, ABCD, sumpta respectu ipsius rectæ, CD, & altitudo figuræ, ADE, respectu ipsius, DE, quæ intelligantur abscinde-

re ex eadem parte à communi altitudine partes æquales, quæ sibi in directũ erunt, sint verò ambæ communis regula omniũ



linearum dictarum figurarum, & sit ducta alia vtcũq; eidem, CE, parallela, MN, cuius portio manens in figura, BD, sit, MO, & manens in figura, ADC, sit, ON; rectangula igitur, CDE, MON, & reliqua rectangula, quæ sub qualibet earum, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, BD, (regula, CE, vel, CD,) & illi in directum posita in figura, ADE, continentur (erit autem semper aliqua eidem in directum, præterquam fortè illi, quæ tangit figuram, vt, BA, potest .n. in figura, ADE, illi vice lineæ vnum punctum tantum respondere, vt, A, hoc tamen rectangulum non computatur, quia nihil illis adiungit, erit inquam hæc linearum respondentia in figura, ADE, eis, quæ sumuntur in, BD, nam sunt in eadem altitudine sumpta aspectu earundem linearum, sub quibus rectangula continentur) simul sumpta vocamus: Rectangula sub figuris, BCDA, ADE.

Definit.1. huius.

D. Def.8. huius.

Si verò contingeret altera earundem figurarum esse parallelogrammum, & regulam omnium eiusdem linearum esse vnum eiusdem laterum, vt, CD, respectu cuius sumitur altitudo, tunc quia illæ, quæ æquidistant ipsi, CD, in parallelogrammo, BD, sunt eidem, CD, æquales, & sunt latera dictorum rectangulorum, ideò dico, nos ea vocare posse nedum rectangula sub his figuris, sed

etiam

etiā sic appellare, nempè: Omnia rectangula figuræ, ADE, (quæ non est necessariò parallelogrammū) æquè alta, ac vnū eorum .i. ac rectangulum, CDE, altitudinis scilicet æqualis ipsi, CD, prout libuerit autem nominentur.

POSTVLATA.

I.

Congruentium planarum figurarum omnes lineæ, sumptæ vna earundem vt regula communi, sunt congruentes; Et cōgruentium solidorum omnia plana, sumpta eorum vno, vt regula communi, sunt pariter congruentia. Def. 1. & 2. huius.

II.

Omnes figuræ similes alicuius figuræ planæ sunt omnia plana solidi, quod terminatur superficie, in qua iacent perimetri omnium dictarum similium figurarum. A. Def. 8. huius.

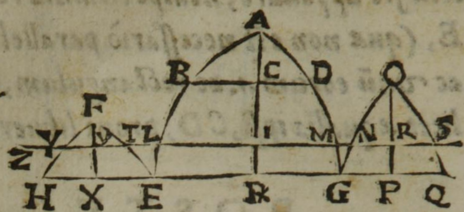
THEOREMA I. PROPOS. I.

Qvarumlibet planarum figurarum omnes lineæ recti transitus; & quarumlibet solidarum omnia plana, sunt magnitudines inter se rationem habentes.

Sint duæ planæ vtcunq; figuræ, EAG, GOQ, quarū regulæ, EG, GQ, vtcunque, sit autem figuræ, EAG, altitudo sumpta respectu, EG, ipsa, AR, & figuræ, GOQ, altitudo sumpta respectu, GQ, ipsa, OP. Dico ergo omnes lineas recti transitus figuræ, EAG, sumptas cum regula, EG, ad

omnes

omnes lineas recti trãsitus figuræ, GOQ, sũptas cum regula, GQ, rationem habere. Cõstituantur regulæ, EG, GQ, sibi in directum, & sint totæ figuræ su-



pra ipsas regulas in eodẽ plano, vel igitur altitudines, AR, OP, sunt æquales, vel non, supponamus primò ipsas esse æquales, abscindantur nunc ab altitudinibus, AR, OP, ex hypotesi æqualibus, portiones, IR, RP, æquales versus regulas, EG, GQ, si ergo per punctum, I, duxerimus regulæ, EG, parallelam, LM, hæc producta transibit per punctum, R, fiet ergo, LM, quæ clauditur perimetro figuræ, EAG, vna ex ijs, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, EAG, &, NS, clausa perimetro figuræ, GOS, vna ex omnibus lineis figuræ, GOQ, sumptis omnibus lineis iam dictis, regula communi, EQ, & recti transitus, vti semper intelligemus, nisi aliter explicetur, etiamsi id non exprimatur. Quoniam igitur si recta, NS, sit minor recta, LM, potest indefinitè producta aliquando fieri maior, si hoc intelligamus fieri de cæteris lineis, quæ ab altitudinibus portiones abscindunt æquales versus regulas, EG, GQ, patet, quod singulæ, quæ erunt in figura, GOQ, productæ fiẽt maiores iis, quæ erunt in figura, EAG, sit aũt ita facta productio cuiusuis omnium linearum figuræ, GOQ, regula, EQ, vt quæ illi in directum constituitur in figura, EAG, sit portio eiusdem productæ, vt ex. g. ita sit producta, SN, versus, ML, vt ipsam pertrãseat perueniens verbi gratia vsq; ad, T, ita vt, LM, sit portio ipsius, TS, patet ergo, quod omnes lineæ figuræ, EAG, erunt pars omnium linearum figuræ, GOQ, sic productarum, & istæ erunt totum, nam illæ istis claudentur, siue in his totæ reperientur, & aliquid amplius .s. quod de omnibus lineis figuræ, GOQ, sic productis manet extra figurã,

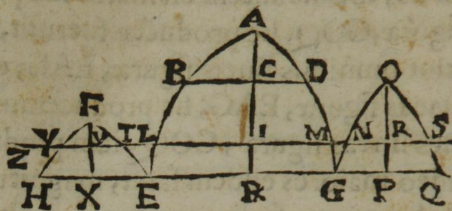
EAG,

EAG, totum autem eſt maius ſua parte, ergo omnes lineæ figuræ, GOQ, ſic productæ fuerunt, vt maiores effectæ fuerint omnibus lineis figuræ, EAG; eadem methodo omnes lineas figuræ, EAG, ſic producemus, vt complectãtur omnes lineas figuræ, GOQ, iam productas, vt dictum eſt, & ideò maiores eiſdem fiant, magnitudines autem rationem habere inter ſe dicuntur, quæ multiplicatæ ſe inuicem ſuperare poſſunt, ergo patet omnes lineas figurarum, EAG, GOQ, cum altitudines, AR, OP, fuerint æquales, inter ſe rationem habere. Diffin. 4. l. 5. Elem.

Non ſint autem æquales, ſed altitudo, AR, ſit maior altitudine, OP, & ab, AR, ſit abſciſſa verſus, EG, ipſa, CR, æqualis ipſi, OP, & per, C, ducta, BD, parallela, EG, intelligatur per, BD, à figura, EAG, abſciſſa figura, BAD, & ea conſtituta, vt, HFE, ita vt ſit in eodem plano ad eãdem partem cũ figuris, EBDG, (quæ remanſit) &, GOQ, exiſtente, HE, in directũ ipſi, EQ, quod ſi adhuc altitudo, FX, ſit maior altitudine, OP, abſcindatur illi æqualis, & ſic ſẽper fiat, & diſponãtur figuræ reſiduæ, vt earũ baſes ſint in directum ipſi, EQ, & figuræ conſtitutæ in eodem plano, & ad eãdem partem cũ figuris, EAG, GOQ, in altitudinibus vel æqualibus, vel non maioribus altitudine, OP. Intelligatur nũc ducta vtcunq; in figura, GOQ, recta, NS, parallela, GQ, quæ erit vna ex omnibus lineis figuræ, GOQ, regula, GQ, producaturq; ita, vt pertranſeat oẽs ſic diſpoſitas figuras, vt vſq; in, Z, complectetur ergo, SZ, ipſas, LM, YT, & ſic quæuis omnium linearũ figuræ, GOQ, hac lege producta, complectetur eas, quæ de ipſa manent in figuris iam diſpoſitis, ergo omnes lineæ figuræ, GOQ, ſic productæ complectentur omnes lineas figurarum ſic diſpoſitarum, ergo erũt ad illas ſimul ſumptas, vt totum ad partem, nam illæ in his reperientur, & aliquid amplius, ergo erunt illis maiores, omnes lineæ autem figurarum ſic diſpoſitarum ſunt nõ minores omnibus lineis figuræ, EAG, ex qua deſumptæ ſunt,

ergo

ergo omnes lineæ figuræ, GOQ, ſic productæ ſunt, vt effectę fuerint maiores omnibus lineis figuræ, EAG; eodem pacto oſtẽdemus nos poſſe vice verſa,



iſtas illis efficere maiores, ergo omnes lineæ figurarum, EAG, GOQ, ſumptæ cum regulis vtcunq; ſuppoſitis, cuiuſuis ſint altitudinis ſumptæ iuxta eaſdem regulas, ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes, quod ſi ſubter rectam, HQ, adhuc eſſent portiones conſideratarum à nobis figurarum, EAG, GOQ, eodem modo oſtenderemus omnes lineas earundem ſumptas, cum ijſdem regulis eſſe magnitudines rationem inter ſe habentes, vnde integrarum figurarum omnes lineæ eſſent magnitudines inter ſe rationem habentes, quod in fig. planis oſtẽdere opus erat.

Diffin. 4. l. 5. Elem.

In figuris autem ſolidis conſimiliter procedemus; nam ſi in ſuperiori figura intellexerimus, EAG, GOQ, eſſe figuras ſolidas, & pro rectis lineis æquidiſtantibus intellexerimus plana æquidiſtãtia, vt pro rectis, EG, GQ, plana, EG, GQ, quibus plana, LM, NS, ſint æquidiſtanter ducta, ſumptis pro regulis planis, EG, GQ, ijſq; in directum ſibi conſtitutis .i. ita vt iaceant regulæ in eodem plano, oſtẽdemus nos poſſe ita producere omnia plana ſolidæ figuræ, GOQ, vt eadem complectantur omnia plana figuræ, EAG, (ſi ſint eiuſdem altitudinis dictæ figuræ) integræ exiſtentis, vel (ſi non ſint) diuiſæ in figuras ſolidas, ex. g. EBDG, BAD, ſic diſpoſitas, vt baſes, ſiue regulæ iaceant in eodem plano, & ita, vt omnia plana dictarum figurarum ſolidarum, vel ſint intra oppoſita plana dictas figuras tangentia, vel nihil eorum extra, vnde omnia plana figuræ ſolidæ, GOQ, ſic producta fiẽt totum, & portiones ab eiſdem captæ in figura ſolida, EAG, integra, vel diuiſa, vt dictum eſt .i. omnia

plana figuræ, EAG, fient pars omnium planorum figuræ, GOQ, sic productorum, nam hæc in illis tota reperientur, & aliquid amplius, vnde omnia plana figuræ, GOQ, sic producta erunt, vt effecta sint maiora omnibus planis figuræ, EAG; eodem modo ostendemus nos posse sic producere omnia plana figuræ, EAG, vt fiant maiora omnibus planis figuræ, GOQ, ita productis, & sic deinceps; ergo omnia plana solidarum figurarum, EAG, GOQ, sunt magnitudines inter se rationem habentes, quod ostendere opus erat. Diffin. 4. l. 5. Elem.

SCHOLIVM.

Posset fortè quis circa hanc demonstrationem dubitare, non rectè percipiens quomodo indefinita numero lineæ, vel plana, quales esse existimari possunt, quæ à me vocantur, omnes lineæ, vel omnia plana talium, vel talium figurarum possint ad inuicem comparari: Propter quod innuendum mibi videtur, dum considero omnes lineas, vel omnia plana alicuius figuræ, me nō numerum ipsarum comparare, quem ignoramus, sed tantum magnitudinem, quæ adæquatur spatio ab eisdem lineis occupato, cum illi cōgruat, & quoniam illud spatiū terminis comprehenditur, ideò & earum magnitudo est terminis eisdem comprehensa, quapropter illi potest fieri additio, vel subtractio, licet numerum earundem ignoremus; quod sufficere dico, vt illa sint ad inuicem comparabilia, alioquin neq; ipsa spatia figurarum essent ad inuicem comparabilia: Vel enim continuū nihil aliud est præter ipsa indiuisibilia, vel aliquid aliud, si nihil est præter indiuisibilia, profectò si eorū congeries nequit comparari, neq; spatium, siue continuum, erit comparabile, cum illud nihil aliud esse ponatur, quam ipsa indiuisibilia: Si verò cōtinuum est aliquid aliud præter ipsa indiuisibilia, fateri æquū est hoc aliquid aliud interiacere ipsa indiuisibilia, habemus ergo continuum disseparabile in quædam, quæ continuum componunt, numero adhuc indefinita, inter qualibet enim duo indiuisibilia æquum est interiacere aliquid illius, quod dictum est esse aliquid

aliud in ipso continuo præter indiuisibilia, qua enim ratione tolleretur à medio duarũ, à medijs quoq; cæterarum tolleretur; hoc cum ita sit comparare nequibimus ipsa cõtinua, siue spatia adinuicem, cum ea, quæ colliguntur, & simul collecta comparantur, scilicet, quæ continuum componunt, sint numero indefinita, absurdum autem est dicere continua terminis comprehensa non esse ad inuicem comparabilia, ergo absurdum est dicere congeriem omnium linearum, siue planorum, duarum quarumlibet figurarum non esse ad inuicem comparabilem, non obstante, quod quæ colliguntur, & illam congeriem componunt sint numero indefinita, veluti hoc non obstat in continuo, siue ergo continuum ex indiuisibilibus componatur, siue non, indiuisibilium congeries sunt adinuicem comparabiles, & proportionem habent.

Non inutile autem mihi videtur esse animaduertere pro huius confirmatione, hoc pro vero supposito, quam plurima, quæ ab Euclide, Archimede, & alijs ostensa sunt, à me pariter fuisse demonstrata, measq; conclusiones ad vnguem cum illorum cõclusionibus concordare, quod euidens signum esse potest, me in principijs vera assumpsisse, licet sciam & ex falsis principijs sophisticè vera aliquando deduci posse, quod tamen in tot, & tot conclusionibus, methodo geometrica demonstratis mihi accidisse absurdum putarem: Hoc tamen addo, non tanquam præfata veritatis legitimum fundamentum, sed vt non negligendum, immò summè expendendum illius argumẽtum, quod sequentia percurrenti continuò magis, ac magis elucescet.

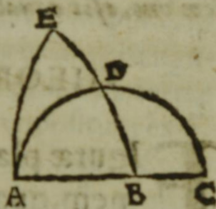
THEOREMA II. PROPOS. II.

AEqualium planarum figurarum omnes lineæ sunt æquales, & æqualium solidarum omnia plana sunt æqualia, regula quauis assumpta.

Sint

Sint duæ æquales planæ figuræ, ADC, AEB, in figura, ADC, ſit regula, AC, vtcunque, & in figura, AEB, regula vtcunq; ſit, AB. Dico omnes lineas figuræ, ADC, regula, AC, æquales eſſe omnibus lineis figuræ, AEB, regula, AB; intelligatur figuram, AEB, ita ſuperponi figuræ, ADC, vt regulæ ſint ad inuicem ſuperpoſitæ, velut eſt, AB, in, AC, vel ſaltem æquidiſtent, vel ergo tota figura congruit toti, vel pars parti, congruat pars parti, ergo congruentium harum partium omnes lineæ erunt pariter congruentes, ſcilicet omnes lineæ, ADB, partis figuræ, AEB, erunt congruentes omnibus lineis, ADB, partis figuræ, ADC, ſuperponantur adhuc reſiduæ harum figurarum partes, hac lege tamen, vt omnes earundem lineæ regulis, AB, AC, ſiue regulæ communi, AB, vel, AC, ſemper ſituentur æquidiſtantes, & hoc ſemper fiat, donec omnes reſiduæ partes ad inuicem ſuperpoſitæ fuerint, quia ergo integræ figuræ ſunt æquales erunt dictæ partes ſuperpoſitæ inuicem congruentes, ergo & eorum omnes lineæ erunt pariter congruentes, magnitudines autem cõgruentes ſunt ad inuicem æquales, ergo omnes lineæ partium figuræ, AEB, ſimul ſumptarum .ſ. omnes lineæ figuræ, AEB, ſumptæ regula, AB, erunt æquales omnibus lineis partium figuræ, ADC, quibus prædictæ partes congruerunt, ſimul ſumptarum .i. omnibus lineis figuræ, ADC, ſumptis, regula, AC, quod in figuris planis oſtendendum erat.

Poſtul. 1. huius.



Ita ſuperpoſitis æqualibus figuris ſolidis, ita vt duæ in ipſis aſſumptæ vtcunq; regulæ ſint ad inuicem ſuperpoſitæ, vel æquidiſtantes, & reſiduorum facta ſemper ſuperpoſitione ita, vt omnia eorũ plana regulis iam ſuperpoſitis æquidiſtent, tandem, quia figuræ ſunt æquales, dictæ partes erũt ad inuicem congruentes, & conſequenter integræ quoque figuræ erunt cõgruentes, ergo earum omnia plana ſumpta

cum dictis regulis erunt ad inuicem congruentia, ergo & æqualia, quod in figuris solidis ostendere quoq; opus erat.

COROLLARIVM.

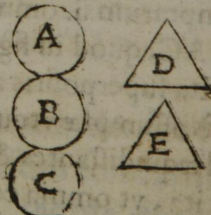
Hinc patet in eadem figura plana, omnes lineas sumptas cũ quadam regula aquari omnibus lineis sumptis cum alia quauis regula; & in figuris solidis omnia plana vnius sumpta cum quadam regula aquari omnibus planis eiusdem, regula quauis assumpta; vnde ex. g. secto planis cylindro aquidistanter axi, qua sectione in ipso creantur parallelogramma, & secto eodem planis aquidistanter basi ductis, qua sectione creantur in eodem circuli, patet ex hoc, omnia parallelogramma dicti cylindri, regula eorundem vno, esse aqualia omnibus circulis eiusdem, regula basi.

Coroll. 6. l. 1.
Corol. 12. l. 1.

THEOREMA III. PROPOS. III.

Figuræ planæ habent inter se eandem rationem, quam eorum omnes lineę iuxta quamuis regulam assumptæ; Et figuræ solidæ, quam eorum omnia plana iuxta quamuis regulam assumpta.

Sint figuræ planæ vtcunque, A, D. Dico, A, figuram ad figuram, D, esse vt omnes lineæ figuræ, A, iuxta quamuis regulam assumptę ad omnes lineas figuræ, D, iuxta quamuis regulam assumptas. Intelligantur ergo omnes lineæ figuræ, A, & , D, assumptæ iuxta quasdã regulas, deinde capiantur quotcunq; figuræ, BC, singulæ æquales figuræ, A, & figuræ, D, quotcunq; æquales figuræ, vt, E; nunc, si continuum componitur ex indiuisibilibus, patet absque



alia

alia demonstratione figuram, A, ad figuram, D, esse vt omnes lineæ figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, tunc enim comparare continuum ad continuum non esset nisi ipsa indiuisibilia comparare; sed esto, quod hoc sit falsum, vel quod, etiamsi verũ sit, tamen legitima ratione ad hoc probandum nondum peruenti fuerimus; nihilominus adhuc dico ipsa indiuisibilia .s. omnes lineas figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, esse vt figuram, A, ad figuram, D. Quoniam ergo assumpsimus figuras, B, C, singulas æquales figuræ, A, &, E, æqualem figuræ, D, omnes lineæ singularũ figurarum, A, B, C, erunt æquales omnibus lineis figuræ, A, sumptis iuxta dictam regulam (quacunque regula dictæ omnes lineæ sint assumptæ) & ideò quotuplex erit compositum ex figuris, ABC, figuræ, A, totuplex erit compositum ex omnibus lineis figurarum, ABC, omnium linearũ figuræ, A, & ideò habebimus æquèmultiplicia primæ, & tertiæ vtcunq; sumpta; similiter ostendemus compositum ex figuris, E, D, æquè multiplex esse figuræ, D, ac compositum ex omnibus lineis figurarum, E, D, multiplex est omnium linearum figuræ, D, quæ sunt æquèmultiplicia secundæ, & quartæ vtcunq; sumpta, quia ergo si multiplex primæ .s. cõpositum ex figuris, ABC, superauerit multiplex secundæ, .s. compositum ex figuris, DE, etiam multiplex tertiæ .s. compositum ex omnibus lineis figurarum, ABC, superabit multiplex quartæ .s. compositum ex omnibus lineis figurarum, DE, & si multiplex primæ fuerit æquale multiplici secundæ, etiam multiplex tertiæ erit æquale multiplici quartæ, scilicet si compositum ex figuris, ABC, fuerit æquale composito ex figuris, DE, etiam eorundem compositorum omnes lineæ erunt æquales, & si minus, minus, ideò prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, scilicet figura, A, ad figuram, D, erit vt omnes lineæ figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, sumptas iuxta datas regulas .s. iuxta quascunq; regulas, quod in fig. planis erat ostendedũ.

Per antecced.

Elicitur ex antec.

Defin. 5. Qui. Ele.

Coroll. 2. huius.

Ve-

Verum si intellexerimus, A, D, esse figuras solidas, assumentes, C, B, singulas æquales ipsi, A, &, E, ipsi, D, ostendemus compositum ex figuris, ABC, tam multiplex esse figuræ, A, ac compositum ex omnibus planis figurarum, A, B, C, multiplex est omnium planorũ figuræ, A, & sic compositum ex figuris, D, E, tam multiplex esse figuræ, D, ac compositum ex omnibus planis figurarum, DE, multiplex est omnium planorum figuræ, D, & tãdem per antecedentem Propositionem ostendemus, si multiplex primæ superauerit multiplex secundæ, etiam multiplex tertiæ superaturum multiplex quartæ, & si minus, minus, vel si æquale, & æquale fore, ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, scilicet figura solida, A, ad figuram solidam, D, erit vt omnia plana, A, ad omnia plana, D, cum quibusuis regulis assumpta, quod & in figuris solidis ostendere opus erat.

Def. Qui. 5. Elem.

COROLLARIVM.

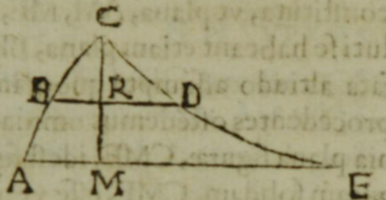
Liquet ex hoc, quod, vt inueniamus, quam rationem habeant inter se duæ figuræ planæ, vel solidæ, sufficiet nobis reperire, quam, in figuris planis, inter se rationem habeant earũdem omnes lineæ, &, in figuris solidis, earundem omnia plana iuxta quamuis regulam assumpta, quod noua huius meæ Geometriæ veluti maximum iacio fundamentum.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI duæ figuræ planæ, vel solidæ, in eadem altitudine fuerint constitutæ, ductis autem in planis rectis lineis, & in figuris solidis ductis planis vtcumq; inter se parallelis, quorum respectu prædicta sumpta sit altitudo, repertum fuerit du-

ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, seu ductorum planorum portiones figuris solidis interceptas, esse magnitudines proportionales, homologis in eadem figura semper existentibus, dictæ figuræ erunt inter se, vt vnum quodlibet eorum antecedentium, ad suum consequens in alia figura eidem correspondens.

Sint primò duæ figuræ planæ in eadem altitudine constitutæ, CAM, CME, in quibus duæ vtcunq; rectæ lineę inuicem parallelæ ductę intelligantur, AE, BD, respectu quarum cõis altitudo assumpta intelligatur, sint aũt portiones figuris interceptę



ipsæ, AM, BR, in fig. CAM, &, ME, RD, in fig. CME, reperiatur autem, vt, AM, ad, ME, ita esse, BR, ad, RD. Dico figuram, CAM, ad figuram, CME, esse vt, AM, ad, ME, vel, BR, ad, RD, quoniam enim, BD, AE, vtcumq; ductæ sunt inter se æquidistantes, patet, quod quælibet earum, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, CAM, sumptæ regula altera, ipsarum, AM, BR, ad eam, quæ illi indirectum iacet in figura, CME, erit vt, BR, ad; RD, vel vt, AM, ad, ME, vt igitur, AM, ad, ME, vnum.s. antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnia antecedentia, nempè omnes lineæ figuræ, CAM, regula, AM, ad omnia consequentia, .s. ad omnes lineas figuræ, CME, regula, ME; indefinitus .n. numerus omnium antecedentium, & consequentium, qui pro vtrisq; hic idem est, quicunq; sit (& hoc nam figuræ sunt in eadem altitudine, & cuilibet antecedenti in figura, CAM, assumpto respondet suũ consequens illi in directum in alia figura constitutum) non obstat quin omnes lineæ fi-

gurȩ,

guræ, CAM, ſint cōparabiles omnibus lineis figuræ, CME,
1. huius. cum ad illas rationem habeant, vt probatum eſt, & ideò omnes lineæ figuræ, CAM, regula, AM, ad omnes lineas figuræ, CME, regula, ME, erunt vt, AM, ad, ME, verum, vt omnes lineæ figuræ, CAM, ad omnes lineas figuræ, CME,
3. huius. ita fig. CAM, eſt ad figuram, CME, ergo figura, CAM, ad figuram, CME, erit vt, BR, ad, RD, vel, AM, ad, ME, quod in figuris planis oſtendere opus erat.

Si verò ſupponamus, CAM, CME, eſſe figuras ſolidas, & vice rectarum, AM, BR, ME, RD, plana intelligamus figuris, CAM, CME, intercepta inuicem parallela, & ita conſtituta, vt plana, AM, ME, iaceant in eodem plano, veluti ſe habeant etiam plana, BR, RD, reſpectu quorum præfata altiudo aſſumpta quoq; intelligatur, eadem methodo procedentes oſtēdemus omnia plana figuræ, CAM, ad om-
3. huius. nia plana figuræ, CME, ideſt figuram ſolidam, CAM, ad figuram ſolidam, CME, eſſe vt planum, BR, ad planum, RD, vel vt planum, AM, ad planum, ME, quod & in ſolidis oſtendere opus erat.

COROLLARIVM.

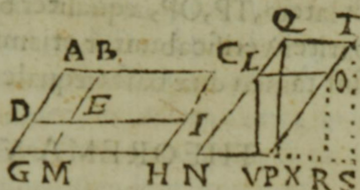
Colligitur ex hoc in figuris planis, vel ſolidis, ſi magnitudines comparatæ ſint lineæ rectæ, vel plana, ſint autem illæ, quæ dicuntur omnes lineæ, vel omnia plana dictarum figurarum, de illis quoq; verificari, vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita eſſe omnia antecedentia ad omnia conſequentia; & in ſupradictis figuris planis omnes lineas vnius ad omnes lineas alterius, vel in ſolidis omnia plana vnius ad omnia plana alterius, eſſe vt vnum antecedentium ad vnum conſequētium, iuxta quæ, tanquam regulas, dictæ omnes lineæ, vel omnia plana intelliguntur aſſumpta.

THEO-

THEOREMA V. PROPOS. V.

Parallelogramma in eadem altitudine existētia inter se sunt, vt bases; & quæ in eadē basi, vt altitudines, vel, vt latera æqualiter basibus inclinata.

Sint parallelogramma quæcunque, AM, MC, in eadem altitudine cōstituta, sumpta altitudine iuxta bases, GM, MH. Dico parallelogrammum, AM, ad parallelogrammum, MC, esse vt, GM, ad, MH. Ducatur



quæcūq; intra parallelogramma, AM, MC, parallela ipsis, GM, MH, cuius portiones parallelogrammis, AM, MC, interceptæ sint, DE, EI. Quoniã ergo, DM, est parallelogrammum, sicut &, EH, erit, DE, æqualis ipsi, GM, &, EI, ipsi, MH, erit igitur, GM, ad, MH, vt, DE, ad, EI, &, DE, EI, ductæ sunt vtcunq; parallelæ ipsis, GM, MH, ergo parallelogramma, AM, MC, erunt ex genere figurarum Theorematis anteced. ergò, AM, ad, MC, erit vt, DE, ad, EI, vel vt, GM, ad, MH, quæ sunt eorundem bases. Hæc autem verificabūtur ēt si altitudines æquales fuerint, vt facilè patet.

Sint nunc parallelogramma, QP, LP, in eadem basi, NP, constituta. Dico eadem esse, vt altitudines sumptæ iuxta basim, NP, demittantur ergo, OR, TS, altitudines in, NP, productam, in punctis, RS, illi occurrentes (nisi fortè, TP, OP, essent ipsæ altitudines, vel intra parallelogramma inciderent basi, NP,) & à punctis, Q, L, illis parallelæ, QX, LV, in punctis, V, X, basi, NP, incidentes, sunt igitur parallelogramma, QS, LR, in æqualibus altitudinibus, QT, LO, sumptis iuxta bases, TS, OR, ergo parallelogramma, QS, LR, erunt inter se, vt bases, TS, OR, est autem parallelogrammum, QS, æquale parallelogrammo, QP, &, LR, ipsi, Ex prima parte huius Prop.

ipſi, LP, ergo parallelogramma, QP, LP, erunt inter ſe, vt, TS, OR, quæ pro ipſis ſunt altitudines ſumptæ iuxta baſim, NP. Si autem latus, OP, extenderetur ſuper latus, PT, ideſt latera, OP, PT, eſſent æqualiter inclinata communi baſi, NP, tunc ſumptis pro baſibus ipſis, TP, OP, haberemus parallelogramma, QP, LP, in eadem altitudine ſumpta iuxta baſes, TP, OP, & ideò eſſent, vt ipſæ baſes, TP, OP, ideſt vt latera, TP, OP, æqualiter baſi, NP, inclinata, hæc autem pariter verificabuntur etiamſi baſis, NP, non ſit cõmunis, ſint tamen duæ baſes æquales, quæ oſtendere opus erat.

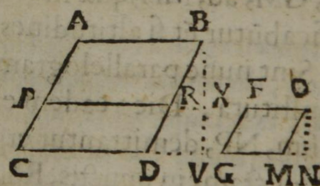
Ex prima par. huius Propoſ.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

PArallelogramma habent rationem compoſitam ex ratione baſium, & altitudinũ iuxta eaſdem baſes ſumptarum, ſiue laterum æqualiter baſibus inclinatorum, cum ſcilicet illa ſunt æquiangula.

Sint parallelogramma vtcunque, AD, FM. Dico eadem habere inter ſe rationem compoſitam ex rationibus baſium, quæ ſint, CD, GM, & altitudinum, quæ ſint, BV, ON, ſumptæ iuxta baſes, CD, GM, illiſq; productis, ſi opus ſit, in punctis, V, N, occurrentes, ſiue ex ratione laterum, BD, OM, ſi ſint æquiangula: Abſcindatur à, BV, verſus, V, ipſa, XV, æqualis ipſi, ON, & per, X, ducatur, XP, parallela, CD, ſecans, BD, in, R, vt fiat parallelogrammum, PD, in eadem altitudine cum parallelogrãmo, FM, & in eadem baſi cum parallelogrammo, AD. Parallelogrammum ergo, AD, ad parallelogrammum,

Defin. 12. l. 1.



mum, FM, ſumpto medio de foris parallelogrammo, PD, habet rationem compoſitam ex ratione parallelogrammi, AD, ad parallelogrammum, PD, ideſt ex ratione, quā habet, BV, ad, VX, vel, ON, ſiue, BD, ad, DR, quoniam, AD, PD, ſunt æquiangula, ideſt ex ratione, BD, ad, OM, & hoc quotieſcunque, PD, FM, ſint pariter æquiangula, & inſuper eſt compoſita ex ea, quam habet parallelogrammum, PD, ad parallelogrammum, FM, ideſt ex ea, quam habet, CD, ad, GM, ergo parallelogrammum, AD, ad parallelogrammum, FM, habet rationem compoſitam ex ea, quam habet, BV, ad, ON, quæ ſunt altitudines, vel etiam ex ea, quam habet, BD, ad, OM, ſi, AD, FM, ſint æquiangula; & ex ea, quam habet, CD, ad, GM, quod oſtendere opus erat.

Defin. 12. l. 1.

Ex ſecun. par. antec.

Ex prima par. anteced.

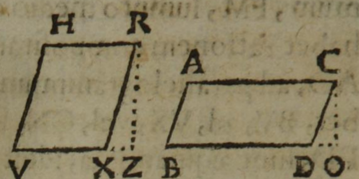
THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Parallelogramma, quorum baſes altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis, reciprocantur, ſunt æqualia, & quæ ſunt æqualia, baſes habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis, reciprocas.

Sint parallelogramma, HX, AD, quorum baſes, VX, BD, reciprocentur eorum altitudinibus, CO, RZ, vel lateribus, CD, RX, quotieſcunq; ſint æqualiter baſibus inclinata. Dico hæc parallelogramma eſſe æqualia; etenim parallelogrammum, HX, ad parallelogrammum, AD, habet rationem compoſitam ex ea, quam habet, VX, ad, BD, &, RZ, ad, CO, ſiue, RX, ad, CD, cum illa ſunt æquiangula, eſt autem, vt, VX, ad, BD, ita, CO, ad, RZ, vel, CD, ad, RX, cum illa ſunt æquiangula, ergo parallelogrammum, HX, ad parallelogrammum, AD, habet rationem compoſitam ex ea, quam habet, CO, ad, RZ, &, RZ, ad, CO, ſiue ex ea,

Ex antecced.

quam habet, CD, ad, RX, &, RX, ad, CD, quæ est eadem ei, quam habet, CD, ad, CD, vt illa est eadem ei, quam habet, CO, ad, CO, suntq; proportiones æqualitatis, ergo parallelogrammum, HX, erit æquale parallelogrammo, AD.



Defin. 12. l. 1.

Sit nunc parallelogrammũ, HX, æquale parallelogrammo, AD. Dico, vt, VX, ad, BD, ita esse, CO, ad, RZ, vel, CD, ad, RX, cum sunt æquiangula. Quoniam ergo parallelogrammum, HX, est æquale parallelogrammo, AD, erit ad illud, vt, CO, ad, CO, vel vt, CD, ad, CD, idest (de foris sumpto, RZ, vel pro secunda ratione, RX,) in ratione composita ex ea, quam habet, CO, ad, RZ, & ex ea, quam habet, RZ, ad, CO, vel ex ea, quam habet, CD, ad, RX, &, RX, ad, CD, verum, HX, ad, AD, habet etiam rationem cõpositam ex ea, quam habet, VX, ad, BD, &, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD, cum sunt æquiangula, ergo duæ rationes, CO, ad, RZ, &, RZ, ad, CO, vel, CD, ad, RX, &, RX, ad, CD, componunt eandem rationem, quam istæ duæ .s. VX, ad, BD, &, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD, est autem communis ratio, quam habet, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD, ergo reliqua ratio .s. quam habet, VX, ad, BD, erit eadem ei, quam habet, CO, ad, RZ, vel, CD, ad, RX, cum sunt æquiangula, ergo æqualia parallelogramma bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocas, quod ostendere opus erat.

Defin. 12. l. 1.

Ex antec.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Similia parallelogramma sunt in dupla ratione laterum homologorum.

Sint similia parallelogramma, AC, EG. Dico eadem esse in



se in dupla ratione laterum homologorum: Quoniam enim sunt similia illa sunt æquiangula, sint anguli, BCD, FGH, æquales, & latera homologa, BC, FG; CD, GH, si ergo pro basibus sumpserimus ipsas, BC, FG, erit, AC, ad, EG, in ratione composita ex ea, quam habet, BC, ad, FG, & ex ea, quam habet, DC, ad, HG, quæ est eadem ei, quam habet, BC, ad, FG, vel, FG, ad tertiam proportionalem duarum, primæ nempè, BC, & secundæ, FG, ergo, AC, ad, EG, erit vt, BC, ad tertiam proportionalem duarum primæ, nempè, BC, & secundæ, FG, .i. erit in dupla ratione eius, quam habet, BC, ad, FG, vel, CD, ad, GH, quod ostendere opus erat. Iux. diff. 1. Sex. Elem. 6. huius. Defin. 10. 5. Elem.

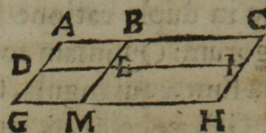
COROLLARIVM.

Hinc patet, quæ de parallelogrammis in superioribus Propositionibus ostensa sunt, eadem de eorundem omnibus lineis cum quibusuis regulis assumptis pariter verificari, nam illa sunt, vt ipsa parallelogramma. 3. huius.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

Parallelogrammorum in eadem altitudine existentium omnia quadrata, regula basi, iuxta quam altitudo sumpta est, sunt inter se, vt quadrata basium. A. Def. 8. huius.

Sint igitur parallelogramma, AM, MC, in eadem altitudine. Dico omnia quadrata parallelogrammi, AM, ad omnia quadrata parallelogrāmi, MC, regula, GH, esse vt quadratum, GM, ad quadratum, MH. Sit intra parallelogramma, AM, MC, ducta vtcunque, DI, parallela ipsi, GH, cuius portio, DE, maneat in, AM, &, EI, in, BH, quoniam A. Def. 8. huius.



ergo, DE, est æqualis ipsi, GM, figuræ autem planæ similes descriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus sunt ęquales, & ideò quadratum, DE, erit æquale quadrato, GM, & quadratum, EI, quadrato, MH, ergo, vt quadratum, GM, ad quadratum, MH, ita erit quadratum, DE, ad quadratum, EI, & quia, DI, vtcunq; ducta est parallela ipsi, GH, ideò, vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia .i. vt quadratum, GM, ad quadratum, MH, ita erunt omnia quadrata parallelogrammi, AM, ad omnia quadrata parallelogrammi, MC, regula, GH, quod erat ostendendum.

25. l. 1.

Coroll. 4. huius.

COROLLARIVM.

Hinc patet, si vice quadratorum sumamus alias quascunque figuras similes, quod eodem pacto ostendemus omnes figuras similes parallelogrammi, AM, ad omnes similes figuras parallelogrammi, MC, vt ex. g. omnes circulos parallelogrammi, AM, ad omnes circulos parallelogrammi, MC, esse vt similes figuras ab ipsis basibus, GM, MH, descriptas, nam figuræ planæ similes quacunque, vt dictum est, descriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus sunt æquales; omnibus pariter assumptis figuris similibus, regula eadem, GH.

A. Def. 8. huius.

25. l. 1.

THEOREMA X. PROPOS. X.

PArallelogrammorum in eadem basi existentium omnia quadrata, regula ipsa basi, sunt vt altitudines, vel vt latera, quæ æqualiter basi sunt inclinata, si illa sint æquiangula.

Sint parallelogramma, AD, BD, in eadem basi, CD, existentia, quorum sint altitudines iuxta basim, CD, sumptæ, AO,

AO, CN. Dico omnia quadrata parallelogrammi, AD, ad omnia quadrata parallelogrammi, BD, regula, CD, esse vt, AO, ad, CN, vel etiam vt, AC, ad, CB, si parallelogramma, BD, DA, fuerint æquiangula; producantur autem, CA, CB, indefinitè ad partes oppositas, ex quibus sumantur quotcunq; partes æquales, AI, IH, nempè æquales ipsi, CA, &, BP, æqualis ipsi, BC, & compleantur parallelogramma, AM, IK, BQ; sunt igitur parallelogramma, CF, AM, IK, in æqualibus altitudinibus, ac basibus, & ideò singulorum omnia quadrata regulis eisdem basibus, erunt æqualia, & pari ratione omnia quadrata parallelogrammorum, BQ, CQ, erunt æqualia, regula, CD, altitudines autem parallelogrammorũ, CF, AM, IK, sunt æquales ipsi, AO, & altitudines parallelogrammorum, CE, BQ, sunt æquales, nempè ipsi, CN, habemus ergo æquèmultiplices primæ, & tertiæ .s. compositum ex altitudinibus parallelogrammorum, CF, AM, IK, quod tam multiplex est altitudinis, AO, quam cõpositum ex omnibus quadratis, CF, AM, IK, multiplex est omnium quadratorum parallelogrammi, CF, & sic compositum ex altitudinibus parallelogrammorum, CE, BQ, tam multiplex est altitudinis, CN, ac compositum ex omnibus quadratis parallelogrammorum, BQ, CE, multiplex est omnium quadratorum, CE; idest quam multiplicia sunt omnia quadrata parallelogrammi, HD, omnium quadratorum parallelogrammi, AD, tam altitudo parallelogrammi, HD, multiplex est altitudinis parallelogrammi, AD, siue tam ipsa, CH, multiplex est ipsius, CA, dum sunt æquiangula, & quam omnia quadrata parallelogrammi, PD, multiplicia sunt omnium quadratorum parallelogrammi, BD, tam altitudo parallelogrammi, PD, multiplex est altitudinis, CN, vel tam, PC, multiplex est ipsius, CB: Si autem multiplex primæ fuerit æquale multiplici secundæ, etiam multi- 9. huius.



plex

plex tertiæ erit æquale multiplici quartæ, si maius maius, & si minus minus, nam si altitudo parallelogrammi, HD, fuerit æqualis altitudini parallelogrammi, DP, omnia quadrata, H D, erunt æqualia omnibus quadratis, D P, nam parallelogramma, HD, DP, sunt in eadem basi, CD, si illa maior, & hæc maiora, & si minor minora, ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, nempè vt altitudo parallelogrammi, AD, ad altitudinem parallelogrãmi, DB, .i. AO, ad, CN, vel, AC, ad, CB, dum sunt æquiangula, ita erunt omnia quadrata, AD, ad omnia quadrata, DB, sunt ergo, vt altitudines ipsorum parallelogrammorum, vel vt latera æqualiter basi inclinata, cum nempè parallelogramma sunt æquiangula: hæc autem etiam verificarentur si parallelogramma essent in æqualibus basibus, quod ostendere opus erat.

Ex antec.

5. Quinti Elem.

COROLLARIVM.

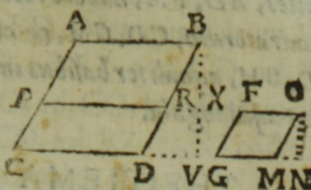
EAdem ratione, si vice quadratorum sumamus alias figuras similes, ostendemus omnes figuras similes parallelogrammorum in eadem basi existentium esse, vt altitudines, vel vt latera basi æqualiter inclinata, dum illa sunt æquiangula.

A. Def. 8. huius.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

QVorumlibet parallelogrammorum omnia quadrata regulis duobus quibusuis in eisdem assumptis lateribus, habent inter se rationem compositam ex ratione quadratorum dictorum laterum, & altitudinum, vel laterum, quæ cum prædictis æqualiter inclinãtur, si illa sint æquiangula.

Sint parallelogramma vtcunque, AD, FM, in quibus regulæ extent latera vtcunque, CD, GM, altitudines autem iuxta dictas regulas sumptæ, BV, ON. Dico omnia quadrata, AD, ad omnia



quadrata, FM, habere rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, CD, ad quadratum, GM, & ex ea, quam habet, BV, altitudo ad altitudinem, ON, vel etiam, BD, ad, OM, si illa sint æquiangula, lateraque, BD, OM, æqualiter sint inclinata cum lateribus, CD, GM; abscindatur à, BV, versus, V, ipsa, XV, æqualis, ON, & per, X, ducatur, XP, parallela ipsi, CD, secans, BD, in, R, erit autem, DR, æqualis ipsi, OM, si sint æquiágula, quod facilè probari potest, erit etiam parallelogrammum, PD, in eadẽ basi cum parallelogrammo, AD, sed in eadem altitudine cum parallelogrammo, FM, omnia ergo quadrata parallelogrammi, AD, ad omnia quadrata, FM, habent rationem composi- Defin. 12. l 1. tam ex ea, quam habent omnia quadrata, AD, ad omnia quadrata, DP, .i. ex ea, quam habet, BV, ad, VX, siue, ON, vel ex ea, quam habet, BD, ad, DR, siue, OM, si sint Ex antec. æquiangula parallelogramma, AD, DP; & componitur ex ea, quam habent omnia quadrata, PD, ad omnia quadrata, FM, .i. ex ea, quam habet quadratum, CD, ad quadra- 9. huius. tum, GM, ergo omnia quadrata, AD, ad omnia quadrata, FM, habent rationem compositam ex ea, quam habet, BV, ad, ON, vel, BD, ad, OM, cum sunt æquiangula, & ex ea, quam habet quadratum, CD, ad quadratum, GM, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

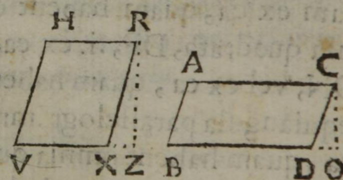
Hinc patet, si vice quadratorum sumamus alias figuras planas similes, quod eodem pacto ostendemus omnes figuras

similes, AD, FM, habere inter se rationem compositam ex ratione quadratorum, CD, GM, & altitudinum, BV, ON, vel laterum, BD, OM, æqualiter basibus inclinatorum, cum parallelogramma sunt æquiangula.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

PArallelogrammorum, quorum basium quadrata altitudinibus iuxta easdē bases sumptis reciprocantur, vel lateribus æqualiter dictis basibus inclinatis; omnia quadrata, regulis eisdem basibus, sunt æqualia: Et quorum parallelogrammorum, regulis basibus, omnia quadrata sunt æqualia, basium quadrata altitudinibus, vel lateribus æqualiter dictis basibus inclinatis, reciprocantur.

Sint parallelogramma, HX, AD, quorum basium, VX, BD, quadrata altitudinibus iuxta ipsas bases sumptis, vel lateribus, RX, CD, si hęc basibus, VX, BD, æqualiter sint inclinata, reciprocentur. Dico omnia quadrata parallelogrammorum, HX, AD, esse inter se æqualia. Nam omnia quadrata, HX, ad omnia quadrata, AD, habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, VX, ad quadratum, BD, .i. ex ea, quam habet, CO, ad, RZ, vel, CD, ad, RX, cum sunt æquiangula, & ex ea, quam habet, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD, quæ duæ rationes cōponunt rationem, CO, ad, CO, vel, CD, ad, CD, quæ est ratio æqualitatis, & ideò omnia quadrata, HX, erunt æqualia omnibus quadratis, AD.



Ex antecced.

Sint

Sint nunc omnia quadrata, HX, æqualia omnibus quadratis, AD, regulis eisdem, VX, BD. Dico quadratum, VX, ad quadratum, BD, esse vt, CO, ad, RZ, vel, CD, ad, RX, cũ sunt æquiangula, etenim, CO, ad, CO, habet rationem cõpositam ex ea, quam habet, CO, ad, RZ, &, RZ, ad, CO, Defin. 12. & sic, CD, ad, CD, ex ea, quam habet, CD, ad, RX, &, RX, l. 1. ad, CD, quia verò omnia quadrata, HX, sunt æqualia omnibus quadratis, AD, ideò sunt ad illa, vt, CO, ad, CO, vel vt, CD, ad, CD, i. in ratione composita ex ratione, CO, ad, RZ, &, RZ, ad, CO, vel, CD, ad, RX, &, RX, ad, CD, sunt autem omnia quadrata, HX, ad omnia quadrata, AD, in ratione composita ex ea, quam habet quadratum, VX, Ex antec. ad quadratum, BD, &, RZ, ad, CO, siue, RX, ad, CD, cum sunt æquiangula, ideò duæ rationes, CO, ad, RZ, &, RZ, ad, CO, siue aliæ duæ rationes, CD, ad, RX, &, RX, ad, CD, cõponunt eandem rationem, quam istæ duæ .s. ratio quadrati, VX, ad quadratum, BD, &, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD, est autem communis ratio, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD, ergo reliqua ratio, quam habet quadratum, VX, ad quadratum, BD, erit eadem reliquæ, quam nempè habet, CO, ad, RZ, vel, CD, ad, RX, cum sunt æquiangula, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

IDem eodem modo de omnibus figuris similibus quibusuis parallelogrammorum, HX, AD, regulis ijsdem, VX, BD, ostendi posse ex superiori methodo colligitur.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SImilium parallelogrammorũ omnia quadrata, regulis homologis lateribus, sunt in tripla ratione laterum homologorum.

Iux diff 1. Sex. Elem.

Sint similia parallelogramma, AC, EG, quorũ latera homologa, BC, FG, sint sumpta pro regula. Dico omnia quadrata, AC, ad omnia quadr. EG, esse in tripla ratione eius, quam habet, BC, ad, FG. Quoniam enim parallelogramma, AC, EG, sunt similia, ideò sunt æquiangula, & circa æquales angulos latera habẽt proportionalia, &, BC, CD; FG, GH, sunt latera ad inuicem æqualiter inclinata, quorum, BC, FG, sunt regulæ, ideò omnia quadrata, AC, regula, BC, ad omnia quadrata, EG, regula, FG, sunt in ratione composita ex ratione quadrati, BC, ad quadratum, FG, & ex ratione, DC, ad, HG, siue, BC, ad, FG, .i. in ratione composita ex tribus rationibus, BC, ad, FG, .i. habent eandem rationem, quam, BC, ad quartam proportionalem duarũ, quarum prima, BC, secunda est, FG, .i. sunt in tripla ratione eius, quam habet, BC, ad, FG, quod erat ostendendum.



Ex def. 1. Sex. Elem.

11. huius.

Defin. 11. Quin. El.

Defin. 11. Quin. Ele.

COROLLARIVM.

Hinc patet, quod eodem modo idem ostendemus de omnibus quibusuis alijs figuris similibus parallelogrammorũ, AC, EG, vice quadratorum sumptis, regulis eisdem, ex superioribus Corollarijs id deducentes.

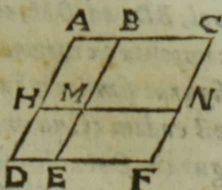
THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

A. Def. 8. huius.

SI duo parallelogramma fuerint in eadem altitudine constituta, omnes figuræ similes vnius ad omnes figuras similes alterius, etiãsi sint dissimiles primò dictis, regulis basibus, iuxta quas altitudo sumitur, erunt, vt figura descripta à basi parallelogrammi primò dicti ad figuram descriptam à basi parallelogrammi secundò dicti.

Sint

Sint parallelogramma in eadem altitudine cõſtituta, AE, EC. Dico omnes figuras ſimiles parallelogrammi, AE, ad omnes figuras ſimiles parallelogrammi, EC, etiamſi ſint diſſimiles prædictis, eſſe vt figura deſcripta à, D E, ad figuram deſcriptã ab, EF, quæ ſunt baſes, iuxta quas ſumitur dictorum parallelogrammorum altitudo .ſ. ex. g. omnia quadrata, AE, ad omnes circulos, EC, eſſe vt quadratum, DE, ad circulum deſcriptum ab, EF. Ducta enim ipſa, HN, vtcunq; parallela, DF, reperiemus, vt figura, DE, ad figuram, EF, ita eſſe figuram, HM, ad figuram, MN, quia quæ deſcribũtur lateribus, HM, DE, æqualibus ſunt æquales, veluti deſcriptæ à lateribus, MN, EF, pariter ſunt æquales, & ideò, vt vnum ad vnum, ſic omnia ad omnia .ſ. vt figura deſcripta à, DE, ad figuram deſcriptam ab, EF, ſic erunt omnes figuræ ſimiles parallelogrammi, AE, ſimiles, inquam, figuræ deſcriptæ à, DE, ad omnes figuras ſimiles parallelogrammi, EC, ſimiles, inquam, figuræ deſcriptæ ab, EF, quod oſtendere opus erat.



A. Def. 8. huius.

15. l. 1.

Coroll. 4. huius.

COROLLARIVM.

Hinc in figura Propoſ. 11. colligemus omnes figuras ſimiles parallelogrammi, AD, ad omnes figuras ſimiles parallelogrammi, FM, etiam tamen diſſimiles prædictis, habere rationem compoſitam ex ratione figurarum, quæ à baſibus, CD, GM, deſcribuntur, & altitudinum, vel laterum æqualiter baſibus inclinatorum; quia omnes figuræ ſimiles, AD, ad omnes figuras ſimiles, FM, diſſimiles prædictis, habent rationem compoſitam ex ea, quam habent omnes figuræ ſimiles, AD, ad omnes figuras ſimiles, FM, ideſt compoſitam ex ratione figuræ deſcriptæ à, CD, ad ſibi ſimilem figuram deſcriptam à, GM, & ex ratione, BV, ad, ON, vel,

Defin. 12. l. 1.

Coroll. 11. huius.

vel, BD, ad, OM, cum ſunt parallelogramma æquiangula, & eſt compoſita ex ratione omnium figurarum ſimilium, FM, ad omnes figuras ſimiles ipſius, FM, diſsimiles tamen proximè dictis, quæ eſt eadem ei, quam habet figura, GM, ſimilis figuræ, CD, ad figuram, GM, vltimò deſcriptam, duæ verò rationes figuræ, CD, ad figuram, GM, ſibi ſimilem, & huius ad figuram, GM, ſibi diſsimilem componunt rationem figuræ, CD, ad figuram, GM, ſibi diſsimilem, & ideò habebimus omnes figuras ſimiles AD, ad omnes figuras ſimiles ipſius, FM, diſsimiles tamen prædictis habere rationem compoſitam ex ea, quam habet figura ipſius, CD, ad figuram, GM, ſibi diſsimilem, & ex ea, quam habet, BV, ad, ON, vel, BD, ad, OM, cum parallelogramma ſunt æquiangula. Conſimili methodo in figura Prop. 12. colligemus omnes parallelogrāmi, HX, figuras ſimiles, omnibus figuris ſimilibus parallelogrammi, AO, etiamſi prædictis ſint diſsimiles, eſſe tamen æquales; Et ſi ſint æquales, figuras deſcriptas ab, VX, BD, licet diſsimiles, altitudinibus, CO, RZ, vel lateribus, CD, RX, baſibus æqualiter inclinatis, reciprocè reſpondere.

Ex ſuper. prop.

Defin. 12. l. 1.

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

OMnes figuræ planæ ſimiles ſunt inter ſe in dupla ratione linearum, ſiue laterum homologorum, earundem.

A. DEMONSTRATIONIS SECTIO I.

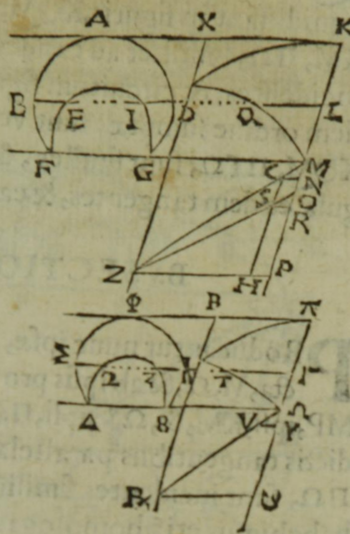
Sint duæ quæcunque figuræ planæ ſimiles, ABD, ΦΣΛ. Dico eaſdem eſſe in dupla ratione linearū, vel laterum homologorum, earundem. Ducantur ipſarum oppoſitæ tangentes, AK, FM, figuræ, ABD, &, ΦΠ, ΔΩ, figuræ, ΦΣΛ, quæ homologis earum lineis æquidiſtent, deinde ſint intra dictas oppoſitas tangentes ductæ, KM, ΠΩ, taliter, vt illæ ſint incidentes dictarum ſimilium figurarū, & tangentium,

Coroll. 1. l. 1.

Coroll. 2. 9 l. 1.

hoc

hoc facto, diuidantur ipsæ incidentes, KM, ΠΩ, similiter, & ad eandem partem vtcunq; in punctis, L, Γ, per quæ pũcta sint ductæ ipsæ, BL, ΣΓ, quarum portiones figuris interceptæ sint, BE, ID, in figura, ABD, &, Σ2, 3Λ, in figura, ΦΣΛ, sumatur autem ex, BL, recta æqualis vtrisq; simul, BE, ID, terminans in, KM, quę sit, QL, & pariter ipsis, Σ2, 3Λ, sit sumpta æqualis, TΓ, terminans in, ΠΩ, & in puncto, Γ, sicq; fiat de cæteris, quæ ipsis tangentibus æquidistant, & manent intra figurarum ambitum, quibus nempè in eadem rectitudine sumantur rectæ æquales in ipsis, KM, ΠΩ, terminatæ, erunt igitur omnium inuentarũ linearum reliqui termini in alia quadam linea, quæ incipiet in puncto, K, & desinet in, M, pro figura, ABD, & quæ incipiet in, Π, & desinet in, Ω, pro figura, ΦΣΛ, sint istæ lineæ, KQM, ΠTΩ; patet igitur figuram, KQM, esse æqualem ipsi, ABD, & ΠTΩ, ipsi, ΦΣΛ, nam omnes earum lineæ sumptæ regulis, FM, ΔΩ, sunt æquales, quod ex ipsa cõstructione patet; dicantur autem istæ constructiones, trãslationes omnium linearum figurarum, ABD, ΦΣΛ, in figuras, KQM, ΠTΩ, ipsi, KM, ΠΩ, adiacentes, effectæ regulis dictis tangentib. Patet vlterius figuras, KQM, ΠΓΩ, esse similes, nã homologæ figurarum, ABD, ΦΣΛ, (quia illæ sunt similes) sunt vt incidẽtes, KM, ΠΩ, eædem autem in figuras, KQM, ΠTΩ, modo dicto, translatæ sunt (simul in vnam rectam coniunctis, quæ diuisæ erant, veluti, BE, ID, iunctæ sunt in linea,



3. huius.

Coroll. 1. 22. l. 1.

QL, &, Σ2, 3Λ, in linea, TΓ,) ergo quæ tangentibus dictis æquidistant in figuris, KQM, ΠΤΩ, & diuidunt incidentes, KM, ΠΩ, similiter ad eandem partem, & iacent inter ipsas incidentes, & circuitum figurarum ad eandem partem eodem ordine sumptæ, sunt vt ipsæ incidentes, ergo figuræ, KQM, ΠΤΩ, sunt similes, & earundem homologarum regulæ eædem tangentes, & earum incidentes ipsæ, KM, ΠΩ.

Defin. 10. l. 1.

B. SECTIO SECVNDA.

PRoducantur nunc ipsæ, KM, ΠΩ, indefinitè versus pũcta, M, Ω, & ab ipsis productis sumãtur partes æquales, MP, ipsi, KM, &, Ω&, ipsi, ΠΩ, & per puncta, P, &, ducantur dictis tangentibus parallelæ, ZP, ℞&, quoniam ergo, KM, ΠΩ, sunt incidentes similiũ figurarum, KQM, ΠΤΩ, ideò habebimus etiã homologas earũdem regulis ipsis incidentibus, KM, ΠΩ, ductis ergo ex opposito tangentib. easdem figuras, KQM, ΠΓΩ, parallelis ipsis, KP, Π&, quæ sint, XZ, β℞, poterimus transferre omnes lineas figurarum, KQM, ΠΤΩ, in figuras ipsis, ZP, ℞&, adiacentes, translatione facta regulis, KP, Π&, fiant ergo dictæ translationes, vnde resultẽt figuræ, MZP, Ω℞&, quæ erunt æquales ipsis, KQM, ΠΤΩ, & subinde ipsis, ABD, ΦΣΛ, probabimus autẽ etiam easdem esse similes (veluti in figuris, KQM, ΠΤΩ, factum est) &, ZP, ℞&, esse dictarum figurarum incidentes, & homologarum regulas ipsas, MP, Ω&, patet autem ex cõstructione integras esse in figuris, MZP, Π℞&, tum quæ æquidistant ipsis, ZP, ℞&, tum ipsis, MP, Ω℞, nam ex prima translatione integras habuimus, quę in figuris, KQM, ΠΓΩ, ipsis, FM, ΔΩ, erant æquidistantes, & subinde etiam integras, quæ in figuris, MZP, Ω℞&, ipsis, ZP, ℞&, æquidistãt, ex secunda translatione verò integras habuimus eas, quæ ipsis, MP, Ω&, æquidistant, & hæc per constructionem, quæ omnia seruare opus est.

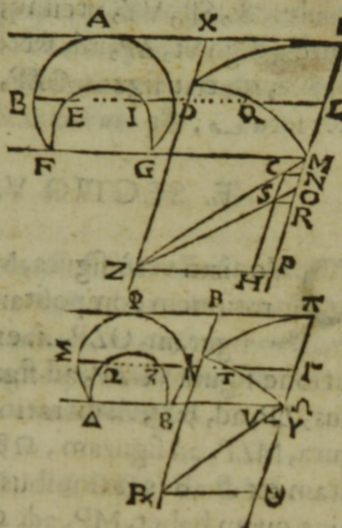
Corol. 23. l. 1.

Iux. Sec. A huius, & pos. 3. huius.

C. SE-

C. SECTIO III.

NVnc in figuris, MZP, Ω℞&, à maiori homologarum, MP, Ω&, quæ ſit, MP, abſcindatur, OP, æqualis ipſi, Ω&, & vt, MP, ad, PO, ita ſit quęlibet in figura, MZP, parallela ipſi, MP, ad eius portionem, & portionum termini ſint ex vna parte in recta, ZP, ex alia verò in linea, ZO, erit ergo, vt vna ad vnam .i. vt, MP, ad, PO, ita omnia ad omnia, .ſ. ita omnes lineæ figuræ, MZP, ad omnes lineas figuræ, OZP, regula, MP, & ideò vt, MP, ad, PO, vel ad, Ω&, ita figura, MZP, ad figuram, OZP, quod etiam ſerua. Coroll. 4. huius. 4. huius.



D. SECTIO IV.

VLterius ab ipſis, OP, Ω&, abſcindantur partes æquales, OR, ΩY, & per puncta, R, Y, ducantur ipſis, ZP, ℞&, æquidiſtantes, SR, VY, & per, S, vbi, RS, ſecat lineam, ZO, ducatur, HC, æquidiſtans ipſi, MP, & per, C, vbi, HC, ſecat lineam, ZM, ducatur, CN, parallela ipſi, ZP, ſecans, MP, in, N; eſt igitur vt, MP, ad, PO, ita, CH, ad, HS, per conſtructionem .i. ita, NP, ad, PR, & permutando, vt, MP, ad, PN, ita, OP, ad, PR, diuidendo, vt, MN, ad, NP, ita, OR, ad, RP, .i. ita, ΩY, ad, Y&, igitur ipſæ, CN, VY, æquidiſtant regulis homologarum, quæ ſunt, ZP, ℞&, & diuidunt ad eandem partem ſimiliter ipſas incidẽtes, MP, Ω&,

Corol. 23. l. 1. (si .n. ZP, ℞&, statueris regulas homologarũ ipsæ, MP, Ω&, sunt incidentes, si verò has statueris regulas, illæ erunt incidentes, ambæ .n. terminant in oppositas tangentes, quæ sunt regulæ homologarum earundem) ergo, CN, ad, VY, erit vt, MP, ad, Ω&, .i. vt, ZP, ad, ℞&, & sunt, CN, SR, æquales, &, SR, VY, vtcunq; ductæ ipsis, ZP, ℞&, æquidistantes, ergo vt, ZP, ad, ℞&, ita, SR, ad, VY, ergo vt, ZP, 4. huius. ad, ℞&, ita erit figura, OZP, ad figuram, Ω℞&, quod pariter seru.....

E. SECTIO V. ET VLTIMA.

Defin. 12. l. 1. QVoniam verò figura, MZP, ad figuram, Ω℞&, habet rationem compositam ex ratione figuræ, MZP, ad figuram, OZP, .i. ex ratione, MP, ad, Ω&, & ex ratione figuræ, OZP, ad figuram, Ω℞&, .i. ex ratione ipsius, ZP, ad, ℞&, .i. ex ratione ipsius, MP, ad, Ω&, ideò figura, MZP, ad figuram, Ω℞&, habebit rationem compo- Defin. 10. Quin El. sitam ex duabus rationibus ipsius, MP, ad, Ω&, .i. duplam eius, quam habet, MP, ad, Ω&, siue, KM, ad, ΠΩ, quæ illis sunt æquales, sed & figuræ, ABD, ΦΣΛ, sunt æquales figuris, MZP, Ω℞&, ergo figura, ABD, ad figuram, ΦΣΛ, duplam rationem habebit eius, quam habet, KM, ad, ΠΩ, quia B. Def. 10. l. 1. verò, KM, &, ΠΩ, sunt incidentes similium figurarũ, ABD, ΦΣΛ, ideò, vt, KM, ad, ΠΩ, ita erit, BEID, simul ad, Σ2, Corol. 1. 22. l. 1. 3Λ, simul, vel ita, BE, ad, Σ2, siue, ID, ad, 3Λ, ergo figura, ABD, ad figuram, ΦΣΛ, duplam rationem habebit eius, quam habet, BE, ad, Σ2, vel, ID, ad, 3Λ, .i. erunt istæ similes figuræ in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum, BE, Σ2, vel, ID, 3Λ, vel aliarum quarumcunq; homologarum præfatis regulis æquidistantium, quod ostendere opus erat.

CO-

COROLLARIVM I.

ET quia dictæ figuræ planæ similes ostensæ sunt esse in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ æquidistāt regulis vtcunq; sumptis, patet easdem esse in dupla ratione quarumuis homologarum, & duas quasdam homologas sumptas cum quibusdam regulis, esse inter se, vt alias quaslibet duas homologas, cum alijs quibusuis regulis assumptas, quod etiam in Corollario Lemmatis 48. Lib. 1. aliunde deductum est.

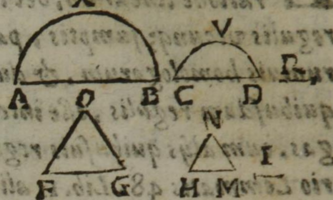
COROLLARIVM II.

VNiuersè insuper manifestum est, si tres rectæ lineæ deinceps proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse figuram planam descriptam à prima ad eam, quæ à secunda describitur; & huius conuersum, dummodò describentes sint similium descriptarum figurarum lineæ, siue latera homologa.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, prima autem, & secunda similes figuras planas descripserint, & tertia, & quarta alias figuras planas similes, licet etiam prędictis dissimiles essent, ita vt describentes sint earum lineæ, vel latera homologa, figura primæ ad figuram secundæ erit, vt figura tertiæ ad figuram quartæ. Et si fuerint quatuor figuræ planæ proportionales, ita vt quæ sunt termini eiusdem proportionis sint figuræ similes, descriptæ ab eorundem lineis, vel lateribus homologis; lineæ, vel latera homologa describentia erunt proportionalia.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales, AB, CD, FG, HM, prima verò, & secunda describant fig. planas similes, AXB, CVD, &, FG, HM, similes figuras planas, FOG, HNM, licet prædictis dissimiles essent, & sint describentes figurarum descriptarum lineæ, vel latera homologa. Dico, AXB, ad, CVD, esse vt, FOG, ad, HNM. Sit, R, tertia proportionalis ipsarũ,



AB, CD, &, I, tertia proportionalis ipsarum, FG, HM; est igitur, AXB, ad, CVD, vt, AB, ad, R, .i. in ratione dupla eius, quam habet, AB, ad, CD, .i. eius, quam habet, FG, ad, HM, .i. vt, FG, ad, I, quæ est, vt, FOG, ad, HNM, ergo vt, AXB, ad, CVD, ita erit, FOG, ad, HNM.

Coroll. 1. antec.

Sit nunc figura, AXB, ad, CVD, sibi similem, vt, FOG, ad, HNM, sibi similem, licet istæ essent prædictis dissimiles, & eas describentes sint earum lineæ, vel latera homologa. Dico, AB, ad, CD, esse vt, FG, ad, HM, sit adhuc, R, tertia proportionalis ipsarum, AB, CD, &, I, tertia proportionalis ipsarum, FG, HM, est ergo, vt figura, AXB, ad, CVD, ita, AB, ad, R, vt verò figura, FOG, ad, HNM, ita, FG, ad, I, est verò, vt, AXB, ad, CVD, ita, FOG, ad, HNM, ergo vt, AB, ad, R, sic, FG, ad, I, est autem, AB, ad, R, duplæ rationis ipsius, AB, ad, CD, &, FG, ad, I, dupla rationis ipsius, FG, ad, HM, ergo vt, AB, ad, CD, ita, FG, ad, HM, quæ ostendere opus erat.

Coroll. 2. antec.

SCHOLIVM.

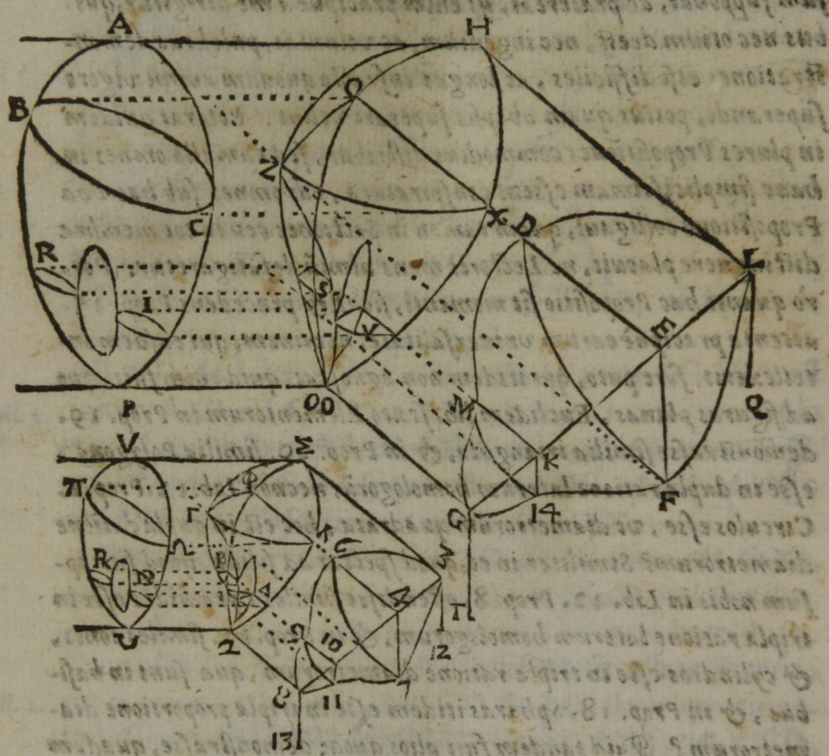
Propositionis proximè subsequentis nimia fortasse prolixitas fastidium potius Lectori, quam delectationem pariet, verumtamen, qui hoc veretur, ac tantum otij, aut tolerantiæ habere nequit, vt illius satis longam texturam percurrere valeat, ipsam

ſam ſupponat, ac prætereat, ijs enim præcipuè à me dirigitur, qui. bus nec otium deeſt, nec ingenium, ac voluntas, pulchras demonſtrationes etſi difficiles, ac longas infracto quodam animi vigore ſuperandi, potius quam ab ipſis ſuperari velint. Poterat quidem in plures Propoſitiones commodius diſtribui, ſed cum illæ omnes in hanc ſimpliciſsimam eſsent conſpiraturæ, eas omnes ſub hac vna Propoſitione colligaui, quam tamen in Sectiones ceu in tot membra diſtinguere placuit, ne Lectoris mens nimiũ defatigaretur. Porrò quanti hæc Propoſitio ſit momenti, ſicut & præcedens Prop. 15. attenta præcipuè earum vniuerſalitate, neminem, qui eaſdem intellexerit, fore puto, qui itidem non agnoſcat; quid enim fuit, quæ ad figuras planas, Euclidem lib. ſexto Elementorum in Prop. 19. demonſtraſse ſimilia triangula, & in Prop. 20. ſimilia Polygona eſse in dupla ratione laterum homologorũ, necnon Lib. 12. Prop. 2. Circulos eſse, vt diametrorum quadrata, hoc eſt in dupla ratione diametrorum? Similiter in eo, quod ſpectat ad ſolida, quid fuit ipſum nobis in Lib. 12. Prop. 8. oſtendiſse ſimiles Pyramides eſse in tripla ratione laterum homologorum, & in Prop. 12. ſimiles conos, & cylindros eſse in tripla ratione diametrorum, quæ ſunt in baſibus, & in Prop. 18. Sphæras itidem eſse in tripla proportione diametrorum? Quid tandem fuit alios quoq; demonſtraſse, quædam alia ſimilia ſolida, vt portiones Sphærarũ, necnon Sphæroidearum, & Conoidearum figurarum, eſse in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum? præ huius comparatione, quod in his duabus tantum Propoſitionibus edocemur, omnes.n. ſimiles figuras planas in Prop. 15. & omnes ſolidas in ſubſequenti Prop. 17. comprehendimus, quod mehercle conſideratione dignum videtur.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

OMnia ſimilia ſolida ſunt in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum, quę ſunt in eorundem homologis figuris.

A. DE-



A. DEMONSTRATIONIS SECTIO I.

Sint duo vtcunq; similia solida, V&, AP. Dico hæc esse in tripla ratione linearum, siue laterum homologorum, quæ sunt in eorundem homologis figuris. Quia ergo dicta solida sunt similia, poterunt duci duo plana opposita tangentia in vnoquoq; propositorum solidorum (quæ in solido, AP, repræsententur per ipsas, AH, P oo, & in solido, V&, per ipsas, VΣ, &2,) homologis eorundem figuris æquidistãtia, inter quæ etiam ducibilia erunt alia duo plana æqualiter ad ipsa, & ad eandem partem inclinata, in quibus iacebunt figuræ, quæ erunt dictorum similium solidorum

Coroll. 1. l. 1.

Defin. 11. l. 1.

dorum

dorum,& tangentium oppositorum,figuræ incidentes,sint igitur talia duo plana, quorum, & oppositorum planorum tangentium in solido, AP, communes sectiones, HL, OO, G, & solidi,V&, Σ3, 2 8,in his autem planis sint eorum incidentes figuræ, H oo, Σ2, istæ igitur erunt figuræ similes, & tangentur à dictis communibus sectionibus, quæ erunt linearum homologarum earundem etiam regulæ, sint earum incidentes vtcunq; inter easdem ductæ, LG, 3 8, & extendantur inter dicta opposita tangentia vtcunq; plana eisdem æquidistantia, altitudines propositorum solidorum respectu dictorum tangentium sumptas similiter ad eãdem partem diuidentia, sit igitur vnius ductorum planorũ concepta in solido, AP, figura, BC, eiusdem autem, & figuræ, H oo, communis sectio, OX, quod etiam secet incidentem figuræ, H, oo,quæ est, LG, in, E; pariter alterius plani concepta in solido, V&, figura sit, ΠΩ, idem verò planum secet figuram, Σ2, in recta, ΦΛ, & incidentem eiusdem figuræ, nempè ipsam, 3 8,in puncto, 4, igitur figuræ, BC,ΠΩ, erunt duæ figurarum homologarum solidorum, AP, V&, &, OX, ΦΛ, earum incidentes, &, LG, 3 8, erunt similiter diuisæ in pũctis, E, 4, nam etiam altitudines propositorum similium solidorum sunt similiter diuisæ (ad eãdem partem subintellige) si igitur à punctis, O, Φ,duxerimus tangentes figuras, BC, ΠΩ, erunt istæ regulis homologarum earundem figurarum parallelæ,vel pro regulis aliarum etiam assumi poterunt, & quæ à punctis, X, Λ, ducentur prædictis parallelæ occurrẽt eisdem figuris, & illas ex opposito prędictarum contingent, ita vt habeamus (si & istæ ductæ intelligantur, quæ sint, XC, ΛΩ,) oppositas tangentes figuræ, BC, quæ erunt, BO, CX, & figuræ, ΠΩ,quæ erunt,ΠΦ, ΩΛ, necnon pro regulis homologarum earundem haberi poterunt; vel igitur figuræ,BC,ΠΩ,adiacent suis incidentibus, OX, ΦΛ, totæ ad eandem partem,& interius integræ existentes, vel non, si sic factum erit, quod volumus,si non

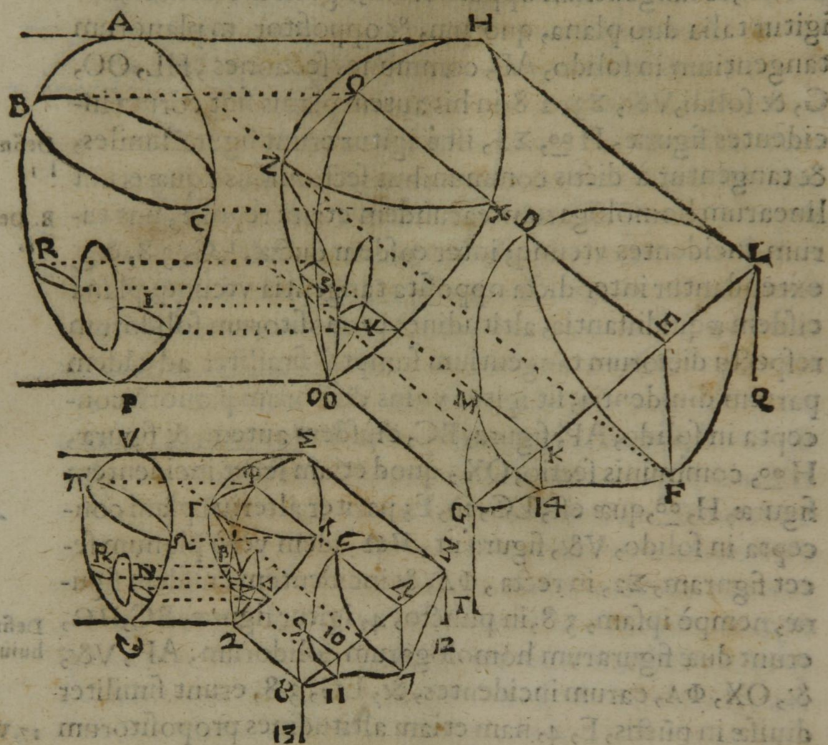
Defin. 11. l. 1.

B. Def. 10. l. 1.

Defin. 11. huius.

17. Vndec. Elem.

trans-



transferãtur omnes lineæ figurarum, BC, ΠΩ, regulis eisdem tangentibus, in figuras ipsis, OX, ΦΛ, adiacentes, pro vt in Prop. 15. effectum est, hinc autem resultantes figuræ sint, OZX, ΦΓΛ, quæ per talem constructionem ad eandem partem incidentium, & interius integræ nobis proueniũt. Similiter si intelligamus ducta alia duo plana prædictis æquidistantia, quæ solida proposita ita secent, vt fiant in ipsis non vnica in singulis figura, sed plures, ex. g. in solido, AP, figuræ, R, I, & in, V&, figuræ, ℞, N, eadem autem secent figuras incidentes in rectis, S,Y, & rectas, LG, 3 8, in punctis, K, 10, dummodò hæc plana pariter secent altitudines dictas propositorum solidorum similiter ad eandem

Vide A. 35. huius propè fin.

par-

partem, erunt figuræ, R, I, binæ similes, & similiter positæ, ac figuræ, ℞, N, .f. I, similis ipsi, N, &, R, ipsi, ℞, & linearũ homologarum earundem regulæ ipsis, CX, ΩΛ, æquidistabunt, ipsæ autem rectæ, S, Y; β, Δ, erunt earũdem incidentes, vt, S, β, ipsarum, R, ℞, & Y, Δ, ipsarum, I, N, si igitur figuræ, R, I, ℞, N, non adiacent suis incidentibus, transferantur singularum omnes lineæ, regula semper, pro figuris, RI, ipsa, CX, & pro figuris, ℞, N, ipsa, ΩΛ, in figuras adiacentes lineis homologis figurarum, H ○○, Σ2, vt sint nobis inuentæ figuræ, S, Y, β, Δ, quæ adiaceant homologis lineis figurarum incidentium, H, ○○, Σ2: Si igitur eandem methodum seruemus in cæteris figuris, quæ ex sectione planorum tangentibus æquidistãtium in dictis solidis producuntur, transferentes nempè omnes earũ lineas homologas, regulis semper ipsis, CX, ΩΛ, in figuras adiacentes lineis homologis figurarum incidentium, H, ○○, Σ2, quæ reperientur totæ ad eandem partem, & interius integræ, tandem nobis erunt comparata duo solida, quæ prædictis similibus solidis æquabuntur, ea nempè, quorum omnes prædictæ adiacẽtes figuræ erunt omnia plana, nam hæ omnes adiacentes erunt æquales omnibus homologis figuris dictorum similium solidorum, quarum omnes lineæ in ipsas figuras adiacentes modò dicto translatæ sunt, sint hæc solida, HZ ○○, ΣΓ 2, igitur, AP, erit æquale ipsi, HZ ○○, &, V&, ipsi, Σ2. Sed & hæc solida, HZ ○○, ΣΓ 2, erunt inter se similia, nam figuræ planæ in eisdem captæ, æquidistantes dictis tangentibus planis, & altitudines respectu dictorum tangentium sumptas similiter, & ad eandem partem diuidentes, sunt inter se similes, & in ipsis linearum homologarum regulæ omnes vni cuidam æquidistant, illi nempè, qua regula translationes factæ sunt, & earũdem figurarum similium incidentes sunt lineæ homologæ duarum planarum similium figurarum, nempè, H ○○, Σ2, æqualiter ad figuras

E. Def. 10. lib. 1.

Vide ad E. A. Prop. 15. huius.

3. huius.

Defin. 11. l. 1.

guras adiacentes, & ad eandem partem inclinatarum, quarum regulæ sunt communes sectiones oppositorum tãgentium planorum, necnon planorum earundem figurarum incidentium, nempè, HL, 3Σ, quod serua.

B. SECTIO II.

NVnc quia figuræ iam dictæ adiacentes homologis lineis figurarũ, H oo, Σ2, plurificari possunt, quæ sunt in eodem plano, vti apparet in figuris, S, Y, β, Δ, quæ cum sint in eodem plano, sunt tamẽ duæ figuræ, ideò vt ex duabus fiat vna tantum, adhuc omnium linearum harum adiacentium figurarum aliam translationem regulis, HL, Σ3, faciemus; ducantur ergo per ipsas, LG, 38, duo plana, quorum & oppositorum planorum tãgentium communes sectiones sint ipsæ, 3 12, 8 13, LQ, GT, cum ipsis, 3Σ, 8 2, LH, G oo, angulos æquales continentes, & agantur duæ ex opposito tangentes figuras, OZX, ΦΓΛ, parallelæ ipsis, OX, ΦΛ, quæ sint ipsæ, ZF, Γ7, productæ cum reliquis tangentibus oppositis, OX, ΦΛ, donec occurrant planis, LT, 3 13, vt in punctis, E, F; 4, 7, iunctis rectis lineis, EF, 47.

36. Vnde. Elem. Quia ergo, DE, æquidistat ipsi, oo G, &, EF, ipsi, GT, angulus, DEF, æquatur angulo, oo GT, & eadem ratione angulus, 647, probabitur æqualis ipsi, 28 13, vnde, quia, oo GT, æquatur ipsi, 28 13, angulus, FED, erit æqualis angulo, 746, & cum sit, vt, OX, ad, ΦΛ, vel vt, OE, ad, Φ4, (quia, LG, 38, sunt lineæ incidentes similium planarum figurarum, H oo, Σ2, vel vt, XE, ad, Λ4, ita, EF, ad, 47, sint

Corol. 24. l. 1. autem, XE, Λ4, comprehensæ inter easdem extremitates rectarum, EF, 47, & perimetrum figurarum, OZX, ΦΓΛ, easdem tangentes, ergo, EF, 47, erunt incidentes similium figurarum, OZX, ΦΓΛ, & oppositarum tangentium, OE, ZF; Φ4, Γ7. Similiter si sic producantur oppositæ tangen-

tes

tes figurarum, S, Y; βΔ, quarũ duæ incidant ipsis, LG, 38, vt in, K, 10, reliquæ verò in punctis, 11 14, planis, LT, 3 13, occurrant, iunctis, K 14, 10 11, ostendemus pariter ipsas, K 14, 10 11, esse incidentes similium figurarum, Y, Δ, vel similium, S, β, & oppositarum tangentium extremarũ, quæ ad puncta, K 14, &, 10, 11, terminantur. Si igitur transferamus omnes lineas tum figurarum, S, Y, tum, β, Δ, regulis eisdem tangentibus, vel semper regulis ipsis, OE, Φ4, prius compositis illis, quæ sibi in directum erunt, tum in figuris, S, Y, tum, βΔ, vt ex illis fiat vnica composita recta linea, prædictis in directum posita in figura adiacente, qualis sit, 9 10, æqualis .s. compositæ ex his, quibus adiacent figuræ, βΔ, &, MK, æqualis compositæ ex his, quibus adiacent figuræ, S, Y; tãdem habebimus figuras adiacentes ipsis incidentibus .s. MK 14, 9 10 11, in quibus plures figuræ, S, Y, in vnam, MK 14, &, β, Δ, in vnam, 9 10 11, collectæ erunt. Si igitur hoc fiat in cæteris figuris, quæ in solidis, HZ oo, ΣΓ2, ipsis tangentibus planis æquidistant, tandem habebimus duo solida, quæ sint, LDFG, 3687, æqualia duobus solidis, HZoo, ΣΓ2, seu duobus, AP, V&, LDGF, nempè ipsi, AP, &, 3687, ipsi, V&, nam omnia eorum plana, regulis oppositis tangentibus planis, sunt inter se æqualia ex constructione. Sed & hæc solida, LDGF, 3687, dico esse inter se similia: Cum .n. prefatis oppositis tangentibus planis (quæ sunt etiam opposita tãgentia plana solidorum, LDGF, 3687,) incidant quoque duo plana, LT, 3, 13, ad eundem angulum ex eadem parte (sunt .n. prima plana, HG, Σ8, oppositis tangentibus planis æquè, & ad eandem partem, inclinata, & anguli, TG oo, 13 82, æquales inter se, necnon anguli, LG oo, 382, vnde etiam secunda plana ad eadem tangentia plana sunt ad eundem angulum ex eadem parte inclinata. Sint verò figuræ ex planis oppositis tangentibus parallelis, altitudinesque ipsorum solidorum,

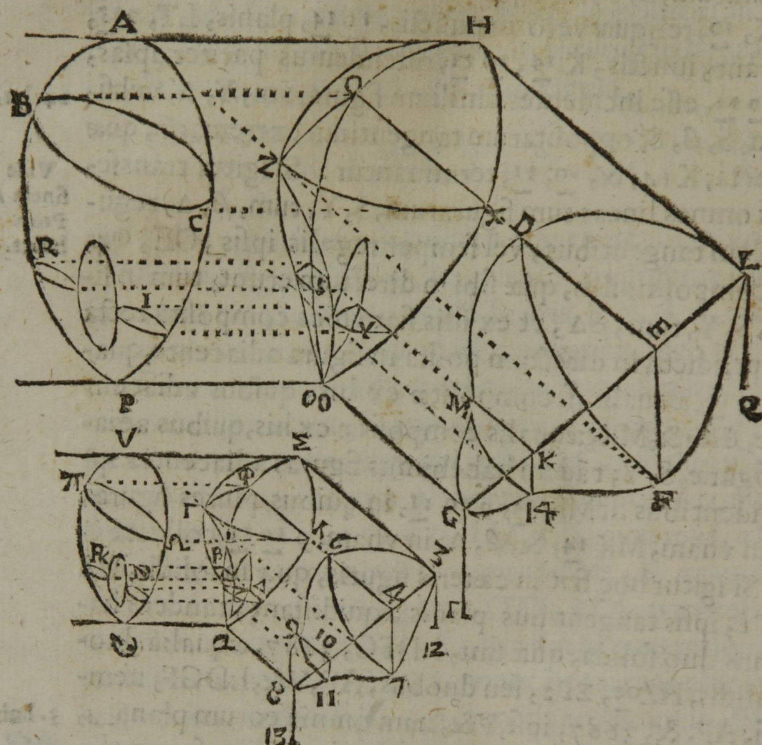
24. l. 1.

Vide ad finem A. Prop. 15. huius.

3. huius.

26. l. 1.

26. l. 1.



LDGF, 3687, ſimiliter ad eandem partem diuidentibus, conceptæ (vt probatum eſt) inter ſe ſimiles, vt ipſæ, DEF, 647, necnon, MK 14, 9 10 11, & omnium earundem linearum homologarum regulæ duabus quibuſdam, nempè ipſis, OE, Φ4, æquidiſtantes, & earũ incidentes ipſæ, EF, 47, necnon, K 14, 10 11, quæ omnes incidentes iacent in plano ſimilium figurarum, LFG, 378, & ſunt earum homologæ, æquidiſtantes ipſis, LQ, 3 12, communibus ſectionibus planorum incidentium figurarum, LFG, 378, & oppoſitorum

26. l. 11. tangentium, quarum quidem figurarum plana ſunt ad pla-

na

na tangentia, vt dictum est, æquè ad eandem partem inclinata, & cum ipsæ, inquam, figuræ, LFG, 378, sint similes inter se, nam ex.g. est, EF, ad, 47, vt, OE, ad, Φ4, idest vt, LG, ad, 38, quæ diuidunt similiter ad eandem partem ipsas, LG, 38, (quod etiam de cæteris probabitur) & cum anguli, LGT, 38 13, sint etiam æquales superius dictis consequenter, & ijs, quæ Lib. 1. Prop. 26. ostensa sunt, ideò, inquam, & ipsæ figuræ, LFG, 378, & ipsa solida, LDGF, 3687, pariter similia erunt.

A. Def 10. l. 1.

26. l. 1.

Defin 11. l. 1.

C. SECTIO III.

NVnc planæ figuræ, LDG, LFG, ipsis tangentibus parallelis planis in figuras, LDE, EM, MGK, LEF, E14, KG 14, eius conditionis diuidantur, vt cuiusq; parallelæ ipsi, LG, in eisdem ductæ portio in vnaquaq; dictarum figurarum integra sit, hoc enim fieri potest. Similiter autem secta, 38, in punctis, 4, 10, vt, LG, in, E, K, per eaque traductis planis oppositis tangentibus parallelis, ac diuidentibus figuras, 368, 378, in figuras, 364, 610, 9108, 347, 411, 11108, facilè ex similitudine ex. g. ipsarũ, LDE, 364, ostendemus etiam parallelarum ipsi, 38, in, 364, interceptas portiones integras esse, & sic in cæteris ad inuicem similibus figuris. Ponamus deinde seorsim duo solida, LDEF, 3647, quæ cũ, LE, 34, partibus proportionalibus, LG, 38, abscinduntur, circa quæ duplex casus dari potest, prior est, cum extensis planis solida secantibus, ipsisque, 347, LEF, parallelis, conceptæ in solidis figuræ sunt huiusmodi, ex. g. ΓΠβ, QYM, vt parallelarum eisdem, 34, LE, in ipsis figuris ducibilium conceptæ portiones integræ habeantur, & sic ostendetur (vt fit in sequẽtibus Sectionibus) hæc solida esse in tripla ratione ipsarum, LE, 34. Posterior casus erit, cum dictæ haud integræ fuerint, & tunc opus erit

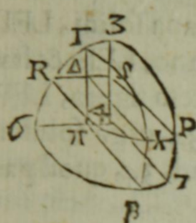
Modus elici potest ex Lem 4. post Prop. 1. Lib 7. ab hac indepẽdẽte.

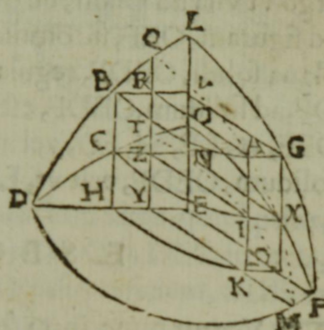
Iuxta A. 15 huius propè fin. rit tertiam translationem adhibere, nempè omnes dictas parallelarum portiones transferre in figuras adiacẽtes rectis lineis iam dictis parallelis planis in basibus, 647, DEF,
3. huius. designatis, regulis, LE, 34, fient .n. duo solida eius conditionis, quam fert prior casus, & præfatis æqualia, cum ijs communes habentes figuras planas ipsis, 4, E, conterminantes, immo & inter se similia, cum, LDF, 3647, sint inter se similia, vt facilè ostendi potest. Sint nunc duæ figuræ planæ quæcumque, QYM, ΠΓβ, in solidis, 3467, LDEF, conceptæ, ipsisque, 347, LEF, parallelæ, similiter secantes, 64, DE, in, ΠY, & aliæ duæ, RSP, BVG, parallelæ, 647, DEF, ac similiter secantes, 54, LE, in, S, V, occurrẽtesque, QYM, ΓΠβ, in, ℞A, ΔΛ, erunt autem &, RS, BV, similiter sectæ in, Δ, ℞, vnde cum, RSP, GVB, sint similes, erit, ΛΔ,
A. Def. 10. l. 1. ad, A℞, vt, RS, ad, BV, .i. vt, ΓΠ, ad, QY, ex quo, ac reliquis cõditionibus similium planarum figurarum facilè deducibilibus, cõcludemus, ΓΠβ, QYM, esse similes, & consequenter etiam similes illas, in quas fit omnium ipsarum linearum dicta translatio, & sic in cæteris, vnde non difficulter ostendemus solida post hanc tertiam translationem consurgentia, secta parallelis, 647, DEF, planis, concipere similes figuras planas, eas nempè, quæ similiter secant, 34, LE, seu altitudines, &c. sicut ex similitudine figurarũ, RSP, BVG, deduximus, ΓΠβ, QYM, esse similes. His autem præostensis (quæ ad prolixitatem euitandam Lectoris industriæ, cum vera sint, enucleanda relinquuntur) res ad statum prioris casus deducta erit, ostendetur .n. vt in sequentibus, solida, 3647, LDEF, post translationem effecta, esse in tripla ratione ipsarum, 34, LE, ex quo colligemus solida, 3647, LDEF, ante translationem existentia,
3. huius. quæ sunt illis ęqualia, pariter esse in tripla ratione ipsarum, 34, LE, cnm ergo posterior casus ad priorem reducatur, priorem expedire sufficiet.

D. SE-

D. SECTIO IV.

Sint igitur talia solida ipsa, 3647, LDEF, qualia fert prior casus, existentibus autem inæqualibus ipsis, LE, 34, ex maiori ipsarum, vt ex, LE, abscindatur æqualis minori .s. OE, ęqualis ipsi, 34, hoc facto intelligamus singulas, quæ tum in figura, LDE, tũ in figura, LFE, ipsi,





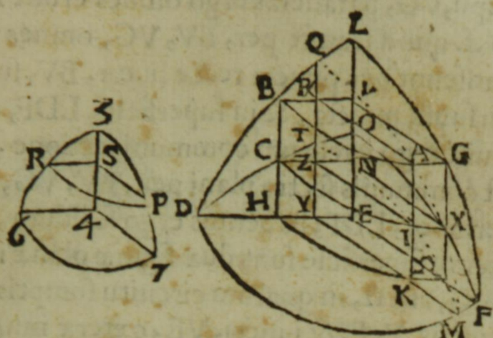
LE, æquidistant, & sunt ex iam dictis totæ interius integræ similiter, & ad eandem partem diuidi, ac secatur, LE, in, O, & per dictas sectiones extensas lineas, OD, OF, vlterius intelligantur singulæ in figura, QYM, parallelæ ipsi, QY, similiter, & ad eandem partem diuidi, ac secatur, QY, in, T, & per ipsas sectiones concipiatur extensa linea, TIM, sic autem fiat in cæteris figuris, quæ in solido, LDEF, ipsi, LEF, æquidistant, inuentis lineis, qualis est ipsa, TIM, quarũ termini erunt in lineis, DTO, DMF, per easdem autem lineas sic se habentes intelligamus extensam superficiem, cuius termini erunt lineæ, DO, OF, FD, vt habeamus solidum, ODEF, figuris, ODE, OEF, DEF, & superficie, DOF, comprehensum. Quoniam ergo linea, OF, diuidit omnes ipsi, LE, in figura, LEF, æquidistantes similiter ad eandem partem, ac diuiditur, LF, in, O, ideò, vt vna ad vnam, sic omnes ad omnes .i. vt, LE, ad, EO, sic omnes lineæ figuræ, LEF, erunt ad omnes lineas figuræ, OEF, regula, LE, .i. vt, LE, ad, EO, ita figura, LEF, ad figuram, OEF, eodem mo- Coroll. 4. huius. 4. huius.

do oſtendemus, vt, QY, ad, YT, ſic eſſe figuram, QYM, ad figuram, TYM, eſt autem vt, QY, ad, YT, ita, LE, ad, EO, ergo figura, LEF, ad, OEF, erit vt, QYM, ad, TYM, & ſic erit quælibet alia figura in ſolido, LEDF, ipſi, LEF, æqui-
4. huius. diſtans, ad eius portionem in ſolido, OEDF, manentem, ergo vt vna ad vnam, ſic omnes ad omnes.i.vt figura, LEF, ad figuram, OEF, ſic omnia plana ſolidi, LEDF, ad omnia
3. huius. plana ſolidi, OEDF, regula plano, LEF, & ita ſolidum, LE DF, ad ſolidum, OEDF, eſt autem figura, LEF, ad figuram, OEF, vt, LE, ad, EO, vel ad, 34, ergo ſolidum, LEDF, ad ſolidum, OEDF, erit vt, LE, ad, 34, quod pariter ſerua.

E. SECTIO V.

DVcatur nunc intra ſolidum, OEDF, quodcunq; planum ipſi, DEF, æquidiſtans, quod in eo producat figuram, CNX, quæ ſecet figuram, ODE, in recta, CN, &, OFE, in recta, NX, & ſuperficiem, ODF, in linea, CX, ſecet autem & lineas, DO, in, C, OE, in, N, &, OF, in, X, ſimiliter in ſolido, 3647, ſit eadem figura, RSP, quæ ab ipſa, 34, abſcindat, 35, æqualem ipſi, ON, vlterius per puncta, C, X, ducantur, BH, GΩ, parallelæ ipſi, LE, & occurrentes lineis, DL, LF, in, B, G; & rectis, DE, EF, in, H, Ω, deinde à puncto, B, deſeruiat nobis, vt ducta, BV, parallela
16. Vndec. Elem. ipſi, DE, ſiue, CN, necnon iuncta, VG, quia ergo, NX, eſt parallela ipſi, EΩ, &, XΩ, ipſi, NE, erit, XΩ, æqualis ipſi, NE, & quia, LE, ad, EO, eſt vt, BH, ad, HC, ideſt vt, VE, ad, EN, eſt autem, GΩ, ad, ΩX, vt, LE, ad, EO, quia, eſt illi parallela, & ſecatur à linea, OF, in, X, ergo, GΩ, ad, ΩX, erit vt, VE, ad, EN, ſunt autem, ΩX, EN, inter ſe æquales, ergo &, GΩ, VE, erunt æquales, & ſunt parallelæ, ergo etiam eas iungentes, VG, EΩ, erunt æquales, & parallelæ. Sumatur nunc intra lineam, CX, vtcunque
pun-

punctum, I, per quod ipsi, L E, parallela ducatur, AK, quæ superficiei, L D F, occurrat in, A, & plano, DEF, in, K, quia ergo, A K, æquidistat ipsi, L E, poterit per, AK, planum



Ex 15. vn-decim. Elem.

duci æquidistans plano, LEF, sit ductum idem, quod prius, quod adhuc secet figura, LDE, in recta, QY, DEF, in recta, YM, superficiem, LDF, in linea, QM, superficiem, ODF, in linea, TM, & figuram, CNX, in recta, ZI, secet autem, QY, ipsam, BV, in puncto, ℞, & iũgatur, A℞, erit ergo, ZI, ipsi, YK, æquidistans, est autem etiam, AK, æquidistãs ipsi, QY, ergo, YI, erit parallelogrammum, & ideò, IK, erit æqualis ipsi, ZY, & quia, AK, ad, KI, est vt, QY, ad, YT, .i. vt, BH, ad, HC, .i. vt, ℞Y, ad, YZ, erit, AK, ad, KI, vt, ℞Y, ad, YZ, sunt verò, IK, ZY, æquales, ergo &, AK, ℞Y, erunt æquales, & sunt parallelæ, quia ambo sunt parallelæ eidem, LE, ergo eas iungentes, quæ sunt, ℞A, YK, erunt æquales, & parallelæ, est autem, YK, parallela ipsi, EΩ, &, EΩ, ipsi, VG, ergo, ℞A, erit parallela ipsi, VG. Similiter autem procedemus in reliquis, quæ per puncta lineæ, CX, ipsi, LE, ducuntur æquidistantes, donec occurrant superficiei, LDF, & plano, DEF, harum autem patet nihil extra superficiem, LDF, manere, ex iam dictis, sint ergo omnium earum termini ex vna parte in linea, BAG, ex alia in linea, HKΩ, veluti ergo ostensum est, A℞, esse parallelam ipsi, GV, sic ostẽdemus reliquas, quæ iungunt puncta, quibus iam ductæ occurrunt lineæ, BG, cum punctis, in quibus plana per dictas lineas ducta, ipsi, LEF, æquidistantia, secant ipsam, BV, esse ipsi,

Per cõstru-ctionem.

se ipsi, VG, parallelas ergo omnes erunt in eodem plano, in eo .s. quod transit per, BV, VG, omnes .n. dictæ parallelæ transeunt per puncta rectæ lineæ, BV, sunt igitur dicta occursuum puncta, & in superficie, LDF, & in plano, BVG, erunt ergo in eorum communi sectione, linea ergo, BAG, est communis sectio plani per, BV, VG, transeuntis, & superficiei, LDF; habemus ergo solidum, BΩ, in cuius ambiente superficie sunt duæ figuræ planæ inuicem parallelæ, BVG, HEΩ, in quarum circuitu sumptis vtcunque duobus punctis, V, E, & iuncta, VE, cæteræ iungētes quælibet alia duo puncta earundem circuitus eidem semper, VE, parallelæ repertæ sunt æquales; ergo, BΩ, erit cylindricus, cuius oppositæ bases ipsæ, BVG, HEΩ, hoc aut ē secatur plano eisdem oppositis basibus æquidistante, eo nempè, quod producit figuram, CNX, ergo, CNX, erit æqualis ipsi, BVG, quod cum alijs adhuc seru...

Defin. Cylindrici cō formiter.

Corol. 12. l. 1.

F. SECTIO VI.

Quia verò, LE, ad, EO, est vt, EH, ad, HC, .s. vt, VE, ad, EN, permutando, & diuidendo, LV, ad, VE, erit vt, ON, ad, NE, .i. vt, 3 5, ad, 5 4, ergo, LE, 3 4, sunt similiter ad eādem partem diuisæ à figuris, BVG, RSP, ergo sunt ipsæ figuræ inter se similes, quarum latera homologa ipsæ, VG, SP, lineæ homologæ figurarum similium, LFE, 3 7 4, quarum incidentes sunt ipsæ, LE, 3 4, vnde est, EF, ad, 4 7, vt, LE, ad, 3 4, .s. vt, VG, ad, SP, sunt verò figuræ, DEF, 6 4 7, quia similes, in dupla ratione ipsarū, EF, 4 7, & ipsæ, BVG, RSP, in dupla ratione ipsarum, VG, SP, ergo vt figura, DEF, ad figuram, 6 4 7, ita erit figura, BVG, vel, CNX, eidem æqualis ad figuram, RSP. Quoniam verò solida, LEDF, 3 6 4 7, sunt similia, vt facilè ostendi potest, & eorum figuræ incidentes, & oppositorum planorum tangentium (quorum ex vna parte duo sunt ipsa, 6 4 7, DEF,)

Ex diffin. similium solid.

Ex antec.

sunt

sunt figuræ, LE F, 3 4 7, quarum lineæ inciden- tes, LE, 3 4, ideò plana ipsis, DEF, 6 4 7, æquidistā- tia, quæ similiter ad eandem par- tem diuidunt in- cidētes, LE, 3 4, diuidunt etiam altitudines dictorum solidorum respectu dictorum tāgen- tium sumptas similiter ad eandem partem (hoc dico quo- tiescunque, non contingat, LE, 34, esse perpendiculares ipsis, DEF, 6 4 7, tunc enim fiunt eædem incidentes alti- tudines dictorum solidorum) cum igitur, vt, LE, ad, 3 4, .i. ad, EO, ita sit altitudo solidi, LEDF, tum ad abscissam altitudinem per planum tangens in, O, ipsi, DEF, æquidi- stans .i. ad altitudinem solidi, OEDF, tum ad altitudinem solidi, 3 4 6 7, ideò solida, O E D F, 3 4 7, erunt in eadem altitudine sumpta respectu basium, DEF, 6 4 7, & plana, ipsis basibus æquidistantia partes æquales ab ipsis, OE, 3 4, abscindentia, etiam ab eorum altitudinibus abscindēt par- tes æquales, ostendimus autem figuras, quæ ab ipsis, OE, 3 4, abscindunt partes æquales, esse proportionales, ergo in solidis, OEDF, 3 4 6 7, in eadem altitudine existentibus sumpta respectu basium, DEF, 6 4 7, figuræ, quæ ab eisdem altitudinibus vtcunq; abscindunt partes ęquales, sunt sem- per, vt ipsæ bases, ergo vt vna ad vnam, sic omnes ad om- nes, & sic solida ad solida .s. vt basis, DEF, ad basim, 6 4 7, ita erit solidum, OEDF, ad solidum, 3 4 6 7, est aūt, DEF, ad, 6 4 7, in ratione dupla eius, quam habet, EF, ad, 4 7, .i. in ratione composita ex duabus rationibus ipsius, EF, ad, 4 7, vel ipsius, LE, ad, 3 4, ergo solidum, ODEF, ad so-

17 Vnd. Elem.

4. huius.

Ex antec.

Def. 12. l. 1.

lidum, 3 4 6 7, habebit rationem compoſitam ex duabus rationibus ipſius, LE, ad, 3 4, quod etiam ſerua.

G. SECTIO VII.

Defin. 12. l. 1. SI igitur inter ſolida, LEDF, 3 4 6 7, medium ſumamus ſolidum, OEDF, habebit ſolidum, LEDF, ad ſolidum, 3 4 6 7, rõnem cõpoſitam ex ratione ſolidi, LEDF, ad ſolidũ, OEDF, .i. ex ratione ipſius, LE, ad, 3 4, & ex ratione ſolidi, OEDF, ad ſolidum, 3 4 6 7, .i. compoſitam ex duabus rationibus ipſius, LE, ad, 3 4, igitur ſolidum, LEDF, ad ſolidum, 3 4 6 7, habebit rationem compoſitam ex tribus rationibus ipſius, LE, ad, 3 4, .i. triplam rationem habebit Def. Vnd. 6. Elem. eius, quam habet, LE, ad, 3 4, quia verò, LE, 3 4, ſunt homologæ partes integrarum incidentium, LG, 3 8, quæ ſunt in prima huius Propoſ. figura, ideò his fruſtis ibidem conſpectis iam oſtenſum erit fruſtũ, LEDF, ad fruſtum, 3 4 6 7, triplam rationem habere eius, quam habet, LE, ad, 3 4, .i. LG, ad, 3 8.

H. SECTIO VIII. ET VLT.

EOdem modo ſumptis alijs duobus fruſtis, D. 14, 6 11, oſtendemus eadem habere triplam rationem duarum, LG, 3 8, & ſimiliter reliqua fruſta pariter triplam rationem 12. Quin. Elem. habere duarum, LG, 3 8, & vt vnum ad vnum, ſic omnia ad oĩa .i. vt fruſtum, LEDF, ad fruſtum, 3 4 6 7, ita eſſe omnia fruſta ſolidi, LG, ad omnia fruſta ſolidi, 3 8, ſed fruſtũ, LEDF, ad fruſtum, 3 4 6 7, triplam rationem habere oſtenſum eſt eius, quam habet, LG, ad, 3 8, ergo ſolidum, LG, ad ſolidum, 3 8, triplam rationem habebit eius, quam habet, LG, ad, 3 8, eſt autem ſolidũ, LG, æquale ſolido, AP, B. huius Propoſ. &, 3 8, ipſi, V&, ergo ſolidum, AP, ad, V&, triplam rationem habebit eius, quam, LG, ad, 3 8, quia verò, LG, 3 8, ſunt incidentes ſimilium planarum figurarum, H oo, Σ2, &

oppo-

oppositarum tangentium, HL, ∞ G, Σ3, 2 8, ideò, vt, LG, ad, 3 8, ita erunt lineæ homologæ figurarũ, H ∞, Σ2, sumptæ regulas, HL, Σ3, ex. g. ita, OX, ad, ΦΛ, istæ verò sunt incidentes similium figurarum, BC, ΠΩ, & oppositarum tangentium, BO, CX, ΠΦ, ΩΛ, ideò, vt ipsæ, OX, ΦΛ, ita erunt quælibet homologæ figurarum, BC, ΠΩ, sumptæ regulis ipsis, CX, ΩΛ, at solidum, AP, ad, V&, triplam rationem habet eius, quam, LG, ad, 3 8, ergo etiam triplam rationem habebit eius, quam, OX, ad, ΦΛ, & consequenter etiam triplam rationem eius, quam habebit quælibet in figura, BC, ipsi, CX, æquidistans ad sibi homologã in figura, ΠΩ, ipsi, ΩΛ, æquidistantem, vel quælibet in quacunq; figurarum ipsi, BC, in solido, AP, æquidistãtium, ad sibi homologam in solido, V&. Igitur similia solida sunt in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ sunt in eorũdem homologis figuris, quod nobis ostendendũ erat.

Ex diffin. linearum incident.

Vt patet in A. huius.

COROLLARIVM I.

ET quia iã dicta similia solida ostensa sunt esse in tripla ratione linearum homologarum, quæ sunt in homologis figuris, æquidistantibus oppositis planis tangentibus vtcunq; sumptis, ideò clarum est eadem similia solida esse in tripla ratione quarumuis homologarum in ipsis solidis describtibilium, & duas quasuis homologas sumptas iuxta quædam opposita tãgentia plana, esse vt duas quasuis homologas sumptas iuxta alia opposita tangentia plana.

COROLLARIVM II.

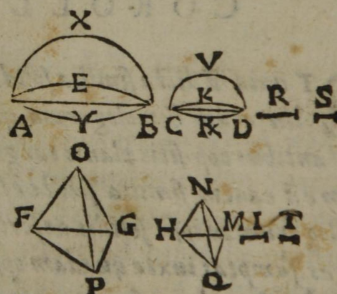
VNiuersè insuper habetur, si fuerint quatuor rectæ lineæ deinceps proportionales, vt prima ad quartã, ita esse solidum descriptum à prima ad solidum illi simile descriptũ à secunda, & huius conuersum; dummodò describentes sint lineæ, vel latera homologa similium figurarum, quæ in ipsis homologæ vocantur.

THEO-

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

SI quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, solidum descriptum à prima ad solidum sibi simile descriptum à secunda, erit, vt solidum descriptum à tertia ad sibi simile descriptum à quarta. Et si fuerint quatuor solida proportionalia, quorum quę sunt eiusdem proportionis termini sint similia, eadem describentia erunt proportionalia; dummodò tamen semper describentia sint vel lineę, vel latera homologa figurarum, quæ in ipsis homologæ vocantur.

Sint ergo quatuor rectæ lineæ proportionales, AB, CD, FG, HM, & sint ab ipsis, AB, CD, descripta similia solida, AXB, CVD, & ab, FG, HM, similia solida, OFPG, NHQM, ita vt duæ, AB, CD, sint homologæ figurarum, AEBY, DKCR, &, FG, HM, homologæ figurarũ, FGP, HMQ, quæ figuræ vocãtur in ipsis solidis homologæ. Dico hæc solida esse proportionalia; sit duarum, AB, CD, tertia proportionalis, R, quarta, S, & duarum, FG, HM, tertia, I, quarta, T, est igitur solidum, AXB, ad, CVD, vt, AB, ad, S, .i. vt, FG, ad, T, (quia vt, AB, ad, CD, ita est, FG, ad, HM,) .i. vt solidum, FOGP, ad, HNMQ, quod est propositum.



Ex Cor. 2. antec.

Sit nunc solidum, AXB, ad sibi simile, CVD, vt, FOGP, ad sibi simile, HNMQ, & sint eadem describentes, AB, CD, lineę, vel latera homologa figurarum homologarũ, AEBY, CKDR,

CKDB, &, FG, HM, duo postrema describentes sint lineæ, vel latera homologa figurarũ homologarum, FGP, HMQ. Dico has esse proportionales; sint adhuc duarum, AB, CD, tertia proportionalis, R, quarta, S, & duarum, FG, HM, tertia, I, quarta, T, quia ergo solida, AXB, CVD, sunt similia erit, AXB, ad, CVD, vt, AB, ad, S, &, FOGP, ad, HNMP, vt, FG, ad, T, sunt autem hæc quatuor solida proportionalia, ergo &, AB, ad, S, erit vt, FG, ad, T, ergo, AB, ad, CD, erit vt, FG, ad, HM, quod ostendendum erat. Ex Cor. 2. antec.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI in parallelogrammo diameter ducta fuerit, parallelogrammum duplũ est cuiusuis triangulorum per ipsam diametrũ constitutorum.

Sit parallelogrammum vtcunque, AD, in quo ducta diameter, FC, ipsum diuidat in triangula, FAC, CDF. Dico parallelogrammum, AD, duplum esse cuiusuis triãgulorum, FAC, CDF; abscindantur ab, FD, CA, versus puncta, F, C, partes æquales, FE, CB, & per pũcta, B, E, parallelæ ipsi basi, CD, ducãtur, EH, BM, incidẽtes diametro, FC, in punctis, H, M; quoniam ergo in triangulis, FHE, CBM, angulus, HFE, æqualis est angulo illi coalterno, BCM, &, HEF, ipsi, FDC, qui est æqualis angulo illi opposito, FAC, qui tãdem æquatur angulo, MBC; interior exteriori, ideò angulus, FEH, æquatur angulo, MBC, sunt igitur in triangulis, FEH, MBC, duo anguli duobus angulis æquales, & latera illis adiacentia sunt æqualia, nempè, FE, ipsi, BC, ergo reliqua latera erunt æqualia, .i. HE, ipsi, BM, eodem modo ostendemus de cæteris parallelis ipsi, CD, eas nempè, quæ versus puncta, F, C, abscindunt 26. Primi Elem.



dunt

dunt à lateribus, FD, CA, partes æquales, esse pariter inter se æquales; veluti sunt extremæ, AF, CD, æquales, ergo omnes lineæ trianguli, CAF, ęquabūtur omnibus lineis trianguli, FDC, sumptis in vtrisq; omnibus lineis regula, CD, ergo triangulus, ACF, erit æqualis triangulo, FDC, ergo duo trianguli, ACF, FDC, .s. parallelogrammum, AD, erit duplum cuiusuis triangulorum, ACF, FCD, quod ostendere opus erat.

3. huius.

COROLLARIVM I.

Hinc patet, quacunq; de parallelogrammis in Prop. 5. 6. 7. & 8 huius Libri ostensa sunt, eadem de triangulis vt vera recipi posse, si in triangulis conditiones ibi appositæ repertæ fuerint, nam in vnoquoq; expositorum triangulorum sumptis duobus quibusuis lateribus, fieri potest sub illis in eodem angulo parallelogrammum, cuius triangulum erit dimidium. Triangula ergo, quæ in eadem sunt altitudine inter se sunt, vt bases: Et quæ in eadem basi inter se sunt, vt altitudines, vel vt latera æqualiter basibus inclinata: Item habent rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, siue laterum æqualiter basibus inclinatorum, cum sunt æquiangula: Item Triangula, quorum bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocātur sunt æqualia; & quæ sunt æqualia bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas: Et tandem habetur similia Triangula esse in dupla ratione laterum homologorum, quæ omnia ex præsenti Propos. pendent.

Iux. diff. 1. Sexti Elem.

COROLLARIVM II.

Colligitur insuper, si supponamus, CD, esse æqualem ipsi, DF, quamlibet ductam in triangulo, FCD, parallelam ipsi, CD, æqualem esse ei, quam ipsa abscindit ab, FD, versus, F, nempè ipsi abscissa, FE, & producta, EH, versus, AC, cui incidat in, N, ipsam,

ipsam, HN, æquari residuæ abscissæ, FE, .s. ipsi, ED, & NE, integram æquari ipsi, FD, quæ est vna maximarum abscissarum ipsius, FD, vnde hac via colligemus omnes lineas trianguli, FCD, regula, CD, dum latus, FD, æquatur ipsi, DC, esse æquales omnibus abscissis ipsius, FD; & omnes lineas trianguli, AFC, esse æquales residuis omnium abscissarum, FD, & omnes lineas parallelogrammi, AD, æquari maximis abscissarum, FD, quæ dicuntur eiusdem obliqui transitus, si angulus, CDF, non sit rectus, & recti transitus, si sit rectus; vnde sicuti ostendimus, parallelogrammum, AD, duplum esse trianguli, FCD, vel, ACF, & subinde etiam omnes lineas, AD, regula, CD, duplas esse omnium linearum trianguli, FCD, vel, ACF, sic etiam vt demonstratum recipi potest propositæ lineæ rectæ, vt ipsius, FD, vtcunque, maximas abscissarum duplas esse omnium abscissarum eiusdem, vel residuarum omnium abscissarum, vnde & omnes abscissas patebit æquari residuis omnium abscissarum eiusdem lineæ, ijs vel recti, vel eiusdem obliqui transitus sumptis, quæ ad sequentium intelligentiam diligenter sunt adnotanda.

Defin. 4. huius.
Defin. 5. huius.
Defin. 6. huius.
3. huius.

LEMMA.

SIt magnitudo, A, ad quotcunque magnitudines, E, O, singillatim ad vnamquamque, vt magnitudo, V, ad tot alias, P, S, singillatim ad vnãquamque, nempè sit, A, ad, E, vt, V, ad, P; A, ad, O, vt, V, ad, S. Dico, A, ad, E, O, simul esse, vt, V, ad, P, S, simul iunctas. Etenim conuertendo erit prima, E, ad secundam, A, vt tertia, P, ad quartam, V, sed etiam conuertendo quinta, O, est ad secundam, A, vt sexta, S, ad quartam, V, ergo composita ex prima, E, & quinta, O, erit ad secundam, A, vt composita ex tertia, P, & sexta, S, ad quartam, V, ergo cõuertendo, A, ad, EO, simul erit, vt, V, ad, P, S, simul iunctas, qui argũẽdi modus dicitur à me, Colligere, seu Colligẽdo.

A E O
V P S

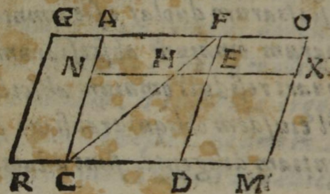
24. Quinti Elem.
Defin. 13. huius.

I THEO-

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

Assumpta Propos. antecedentis figura, dimissa, BM, retineatur, NE, pro vna ex ductis vtcunq; parallela ipsi, CD, producta autem, CD, vtcunq; in, M, completoq; parallelogrammo, OD. Dico parallelogrammum, AM, ad trapezium, FCMO, esse vt, CM, ad, MD, simul cum $\frac{1}{2}$. CD.

Erit enim, AM, parallelogrammum, vnde, MA, ad, AD,
5. huius. erit vt, CM, ad, CD, AD, verò ad triangulum, FCD; est
Ex antec. vt, CD, ad $\frac{1}{2}$. CD, ergo, AM, ad triangulum, FCD, erit vt, MC, ad $\frac{1}{2}$. CD, est autem, AM, ad, FM, vt, CM, ad, MD, ergo,
5. huius. colligendo, AM, ad, FM, cum triangulo, FCD, idest ad trapezium, OFCM, erit vt, CM, ad, MD, cum $\frac{1}{2}$. DC, quod ostendendum erat.



COROLLARIVM.

Ex Coro. antec. *Manifestum est autem, si, CD, sit æqualis ipsi, DF, omnes lineas parallelogrammi, AD, regula, CD, esse æquales maximis abscissarum, FD; & omnes lineas trianguli, FCD, regula eadem æquari omnibus abscissis, FD. Nunc si intelligamus cuilibet earum, quæ dicuntur maximæ abscissarum, vel abscissæ,*
Defin. 7. huius. *adiungi rectam, DM, vocantur tunc maximæ abscissarum, vel abscissæ adiuncta, DM, hæc autem sunt eadem illis, quæ habētur in parallelogrammo, AM, & trapezio, FCMO nam si produxeris, NE, vsq; ad, OM, in, X, fiet, EX, adiuncta tum ipsi, NE, vni ex maximis abscissarum, FD, tum ipsi, HE, vni ex omnibus abscis-*

sis,

sis, FD, &, EX, adiũcta est æqualis ipsi, DM, vnde omnes lineæ, AD, adiuncta, DM, sunt omnes lineæ parallelogrammi, AM, & sunt æquales maximis abscissarum ipsius, FD, adiuncta, DM, & omnes lineæ triãguli, FCD, adiuncta, DM, sunt omnes lineæ trapezij, FCMO, & sunt æquales omnibus abscissis ipsius, FD, adiuncta, DM. Quia ergo, AM, ad trapezium, FCMO, est vt, CM, ad, MD, cum ½. DC, ideò omnes lineæ, AM, ad omnes lineas trapezij, FCMO, (regulam hic semper intellige ipsam, CM,) .i. maxima abscissarum, FD, adiuncta, DM, ad omnes abscissas, FD, adiuncta, DM, erunt vt, CM, composita nempè ex proposita linea, CD, siue ex proposita, FD, illi æquali, & adiuncta, DM, ad compositam ex adiuncta, MD, & ½. propositæ lineæ, CD, vel, DF. 3. huius.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

IN exposita superioris Prop. figura, si producatur, CD, ad partes, C, vtcunque, vt in, R, & compleatur parallelogrammũ, GC, ostendemus trapezium, FGRC, ad trapezium, FCMO, esse vt composita ex, RC, & ½. CD, ad compositam ex, MD, & ½. CD.

Nam trapezium, CRGF, ad, GD, est vt composita ex, RC, & ½. CD, ad, RD, insuper, GD, ad, AM, est vt, RD, ad, CM, & tandem, AM, ad trapezium, FCMO, est vt, CM, ad, MD, cum ½. CD, ergo ex æquali trapezium, FGRC, ad trapezium, FCMO, erit vt, RC, cum ½. CD, ad, MD, cum ½. DC, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HInc patet omnes lineas trapezij, FGRC, regula, RM, ad omnes lineas trapezij, FCMO, regula eadem esse, vt, RC, 3. huius.

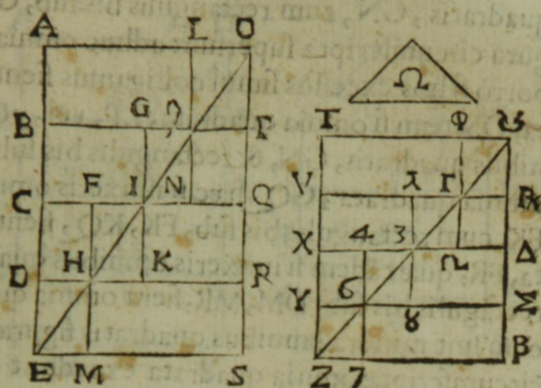
cum $\frac{1}{2}$. CD, ad, MD, cum $\frac{1}{2}$. DC, veluti autem in antecedenti ostendimus, si, CD, sit æqualis ipsi, DF, omnes lineas trapezij, FCMO, regula, CM, æquari omnibus abscissis ipsius, FD, adiuncta, DM, ita in præsenti ostẽdemus omnes lineas trapezij, FGRC, regula, RD, æquari residuis omnium abscissarum ipsius, AC, vel, FD, adiuncta, RC; vnde patebit residuas abscissarum propositæ lineæ, vt, FD, adiuncta, RC, ad omnes abscissas eiusdem, adiuncta alia linea, vt, DM, esse vt compositum ex prima adiuncta, & $\frac{1}{2}$. propositæ, CD, siue, FD: illi æqualis, ad compositum ex secunda adiuncta, & $\frac{1}{2}$. propositæ lineæ, idest vt, RC, cum $\frac{1}{2}$. CD, vel, DF, ad, MD, cum $\frac{1}{2}$. CD, vel, DF.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

Expositis duobus vtcunq; parallelogrammis, in eisdemq; ductis diametris, & duobus vtcunq; lateribus pro regula sumptis, nempè in vnoquoq; eorũ vno: Omnia quadrata cuiusuis dictorum parallelogrammorũ ad omnia quadrata cuiusuis triãgulorum per diametrũ in ipso constitutorum, erunt vt omnia quad. reliqui parallelogrãmi ad omnia quadrata cuiusuis triangulorum per diametrũ in isto ductã pariter constitutorum.

Sint exposita vtcunq; parallelogramma, AS, Tβ, in ijsq; ductæ diametri, EO, Z&, regulis sumptis, ES, Zβ. Dico omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, esse vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, &Zβ. Si enim, vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, ita non sunt omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, erunt igitur ita omnia quadrata, AS, ad maius, vel ad minus omnibus quadratis trianguli, OES, sint excessus, vel defectus, omnia quadrata figuræ planæ, Ω, diuidatur

tur autem latus, OS, bifariam, in, Q, & , OQ, QS, bifariam in, P, R, & sic deinceps fiat, ita vt ductis per puncta diuisionũ parallelis ipsi, ES, DR, CQ, B P, tandem



deuentum sit ad parallelogrammum, DS, cuius omnia quadrata, regula, ES, sint minora omnibus quadratis figuræ, Ω, per puncta autem, in quibus dictæ parallelæ ipsam, OE, secant, ducantur vsq; ad proximas parallelas æquidistantes lateribus, AE, OS, ipsæ, LN, GK, FM, erit igitur triangulo, OES, circumscripta figura quædam composita ex parallelogrammo, LP, GQ, FR, DS, & alia inscripta composita ex parallelogrammis, 9Q, IR, HS, ita vt omnia quadrata figuræ circumscriptæ, regula, ES, excedant omnia quadrata inscriptæ, regula eadem, minori quantitate, quam sint omnia quadrata figuræ, Ω; nam in parallelogrammo, DS, recta, HM, diuidit omnia quadrata, DS, in omnia quadrata, DM, in omnia quadrata, HS, & in rectangula bis sub, DM, MR, veluti punctum, H, diuidit quadratum, DR, in quad. DH, quad. HR, & rectangulum bis sub, DHR, siue ex 23. seq. ab hac independente, & ideò omnia quad. DS, excedunt omnia quadrata, HS, omnibus quadratis, DM, & rectangulis bis sub, DM, MR, eodem pacto ostẽdemus omnia quadrata, FR, excedere omnia quadrata, IR, omnibus quadratis, FK, & rectangulis bis sub, FK, KQ, & sic omnia quadrata, GQ, excedere omnia quadrata, 9Q, omnibus

qua-

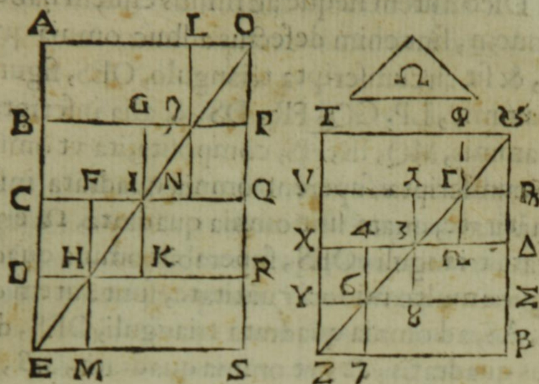
Iux. Prima 10. Elem.

quadratis, GN, cum rectangulis bis sub, GN, NP, & in figura circumscripta supersunt adhuc omnia quadrata, LP, porrò si hos excessus simul colligamus fient omnia quadrata, DS, nam si omnia quadrata, LP, vel, 9Q, iunxeris omnibus quadratis, GN, & rectangulis bis sub, GN, NP, fient omnia quadrata, GQ, hæc si iunxeris omnibus quadratis, FK, cum rectangulis bis sub, FK, KQ, fient omnia quadrata, FR, quæ tãdem si iunxeris omnibus quadratis, DM, cum rectãgulis bis sub, DM, MR, fient omnia quadrata, DS, quæ cum sint minora omnibus quadratis figuræ, Ω, hinc figuræ circumscriptæ omnia quadrata excedunt omnia quadrata inscriptæ minori quantitate, quam sint omnia quadrata, Ω, & ideò excedũt omnia quadrata trianguli, OES, multò minori quantitate: Quia ergo omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, cum omnibus quadratis, Ω, erant vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata triãguli, &Zβ, hinc omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, OES, habebunt maiorem rationem, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quad. triãguli, &Zβ.

Nunc diuidatur similiter, &β, in punctis, ℞, Δ, Σ, ac, OS, in punctis, P, Q, R, & per puncta, ℞ΔΣ, parallelæ ipsi, Zβ, ducantur, ℞V, ΔX, ΣY, secantes, &Z, in punctis, Γ, 3, 6, per quæ vsq; ad proximas parallelas ipsis, &β, TZ, æquidistantes ducantur, ΦΓ, Λ3, 4 6, vt triangulo, &Zβ, sit circumscripta figura ex parallelogrammis, Φ℞, ΛΔ, 4Σ, Yβ, composita, quia ergo, vt, OS, ad, SR, ita est, &β, ad, βΣ, vt
10. huius. autem, OS, ad, SR, ita sunt omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, DS, & vt, &β, ad, βΣ, ita sunt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, Yβ, ergo omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, DS, sunt vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, Yβ, quia verò omnia quadrata, Yβ, ad omnia quadrata, 6β, .i. ad omnia quadrata, 4Σ, sunt vt quadratũ,
9. huius. Zβ, ad quadratum, 7β, .i. ad quadratum, 6Σ, .i. vt quadratum, β&, ad quadratum, &Σ, .i. vt quadratum, SO, ad quadra-

dra-

dratum, OR, .i. vt quadratum, ES, ad quadratum, HR, idest, vt omnia quadrata, DS, ad omnia quadrata, FR, ergo ex æquali omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, FR, erunt vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, 4Σ: Eodem pacto ostendemus omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, GQ, esse vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, ΛΔ, & tandem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, LP, esse vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, ΦR, vnde, colligendo, omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata parallelogrammorum, DS, FR, GQ, LP, .i. figuræ circumscriptæ, erunt vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata parallelogrammorum, ΦR, ΛΔ, 4Σ, Yβ, .i. ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triãgulo, &Zβ, sed omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, OES, ostensa sunt habere maiorem rationem, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, ergo omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, &Zβ, habebunt maiorem rationem, quam ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, ergo omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, &Zβ, minora erunt omnibus quadratis trianguli, &Zβ, quod est absurdum, non ergo omnia quadrata, AS, ad maius, quam sint omnia quadrata trianguli, OES, habent eandem rationem, quam oĩa quad. Tβ, ad omnia quad. trianguli, &Zβ.



9. huius.

Defin. 13. l. 1.

Dico

Dico autem neque ad minus eiſdem habere eandem rationem, ſint enim defectus adhuc omnia quadrata figuræ, Ω, & ſit circumſcripta triangulo, OES, figura ex parallelogrammis, LP, GQ, FR, DS, & alia inſcripta ex parallelogrammis, MQ, IR, HS, compoſita, ita vt omnia quadrata circumſcriptæ ſuperent omnia quadrata inſcriptæ minori quãtitate, quam ſint omnia quadrata, Ω, ergo omnia quadrata trianguli, OES, ſuperabũt omnia quadrata inſcriptæ figuræ multo minori quãtitate, ſunt autem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, detractis omnibus quadratis, Ω, vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, ergo omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata inſcriptæ figurę habebunt minorem rationem, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ. Diuidatur nunc pariter latus, &β, in punctis, ℞, Δ, Σ, ſimiliter ac, OS, diuiditur in, P, Q, R, & cætera, vt ſupra, fiant, vt habeamus figuram inſcriptam ex parallelogrãmis, ΓΔ, 3Σ, 6β, compoſitam, oſtendemus igitur, vt ſupra, omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triãgulo, OES, eſſe vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, &Zβ, ſunt autem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, OES, in minori ratione, quam ſint omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, ergo omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, &Zβ, erunt in minori ratione, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, ergo figuræ inſcriptæ triangulo, &Zβ, omnia quadrata maiora erunt omnibus quadratis trianguli, &Zβ, quod eſt abſurdum, igitur omnia quadrata, AS, non ad minus, quam ſint omnia quadrata trianguli, OES, erunt vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, ſed neq; ad maius, vt oſtenſum eſt ergo ad ipſa erũt, vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, &Zβ. Si autem comparentur omnia quadrata, AS, Tβ, ad omnia

qua-

quadrata triangulorum, AEO, TZ&, eodem modo fiet demonstratio, igitur ostensum est, quod erat demõstrandum.

A. COROLLARII SECTIO I.

HInc patet quæcunque de omnibus quadratis parallelogrammorum tales, vel tales conditiones habentium in Propos. 9. 10. 11. 12. 13. 14. huius Libri ostensa sunt, eadem de omnibus quadratis triangulorum, tanquam de eorundem partibus proportionalibus verificari, regula vno latere sumpta, dum triangula circa altitudines, & bases, siue à basibus descriptas figuras, & latera æqualiter basibus inclinata, easdem obtinuerint conditiones ibi notatas.

B. SECTIO II.

IGitur triangulorum in eadem altitudine existentiũ omnia quadrata, vel omnes figuræ similes (siue sint similes ad inuicem, 9. huius. *quæ sunt vtriusq; trianguli, siue dißimiles) erunt vt figuræ à basibus descriptæ.*

C. SECTIO III.

ET si triangula fuerint in eadem, vel æqualibus basibus, om- 10. huius. *nes figuræ similes, vtriusq; ad inuicem, erunt vt altitudines, vel vt latera basibus æqualiter inclinata.*

D. SECTIO IV.

ITem triangulorum omnia quadrata, siue omnes figuræ similes, 11. huius. *etiamsi sint dißimiles, quæ sunt vtriusq; trianguli, habebunt rationem cõpositam ex ratione figurarum à basibus descriptarum, & altitudinum, siue laterum basibus æqualiter inclinatorum.*

E. SECTIO V.

ET triangulorum, quorum basium figuræ altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocantur, omnes
22. huius. *figuræ, similes basium figuris, sunt æquales: Et si omnes figuræ, similes basium figuris, sint æquales, figuras basium altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocè respondentes habebunt.*

F. SECTIO VI.

Per diffin. 1. Sexti Elem. *ET tandem similium triangulorum omnia quadrata erunt in tripla ratione laterum homologorum, siue vt eorum cubi; regulas verò in supradictis suppono semper duo illorum triangu-*
22. huius. *lorum latera, quæ bases voco; hic verò intellige illorum triangulorum latera homologa. His autem sequentem Propositionem subiungam, tum huius gratia, tum eorum, quæ sequentur.*

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SI, exposita quacunq; figura plana, in ea ducatur vtcunque recta linea, quæ sit sumpta pro regula, eadem verò in puncto, vel punctis diuisa, prout Lib. 2. Elem. supponitur secari, per puncta diuisionum lineas duxerimus rectas, siue curuas, figuram diuidentes, & semel tãtum secantes quamuis aliã regulæ parallelam, si regula in vno puncto tantum diuisa sit, vel toties, quot sunt puncta diuisionum regulæ (exceptis tamen extremis, in quibus linearum sectæ partes in puncta aliquando degenerare possunt.) Quæcunq; in dicto 2. Lib. demonstrantur hac diuisione suppo-

sita.

ſita circa vel quadrata, vel rectãgula eidem rectæ lineæ applicata, eadem de omnibus quadratis dictæ figuræ, vel eiuſdem partium, vel de rectangulis ſub ipſis pariter verificabuntur. D. Diff. 8. huius.

Sit expoſita vtcunq; figura plana, ABCD, in qua ducta, BD, recta linea vtcunq; ſit illa ſumpta pro regula, & ea diuiſa in vno, vel pluribus pũctis, prout poſtulant Prop. 2. Lib. Elem. per puncta diuiſionum ducantur lineæ ſiue rectæ, ſiue curuæ, AEC, AFI, toties quamuis aliam ipſi, BD, parallelam in figura, BADC, ſecantes quoties, BD, ſecta eſſe ſupponitur, exceptis tamen extremis, vt ex. g. ipſa, CI, in qua partes, CI, quæ in recta, CI, ſeparari debuiſſent per lineas, AEC, AFI, in puncta, C, I, partibus, BE, FD, reſpondentia degenerauerunt. Dico quæcunq; demonſtrantur in linea, BD, circa quadrata, vel rectangula, illi, vel illius partibus applicata, verificari de omnibus quadratis totius figuræ, BADC, ſiue partium eiuſdem figuræ per dictas lineas conſtitutarum, ſiue de rectangulis ſub eiuſdem partibus. Vt ex. g. quia in 3. Prop. Lib. 2. Elem. oſtenditur rectangulũ ſub, BD, DF, æquari rectangulo ſub, BFD, cum quadrato, FD, ſic dico verum eſſe rectangula ſub figura, ABCD, & figura, ADI, æquari rectangulis ſub figuris, ABIF, ADIF, cum omnibus quadratis figuræ, ADIF, ſi enim aliam vtcunq; duxerimus regulæ, BD, parallelam, vt, HO, ſecantem lineas, AC, in, M, &, AI, in, N, verum eſſe comperiemus rectangulum, HON, æquari rectangulo, HNO, cũ quadrato, NO, & idem in cæteris regulæ, BD, parallelis in figura, ABCD, ductis reperiemus, ergo verum erit rectangula illa ſimul collecta, ideſt rectangula ſub figura, ABID, & figura, ADI, æquari Vide D. Defin. 8. huius. Coroll. 4. huius.



rectangulis ſub figuris, ABI, ADI, cum omnibus quadratis, ADI, quod 3. Propoſ. 2. Lib. Elem. reſpondet.

Similiter ſi ſupponamus, BF, bifariã ſecari in, E, cui adiungatur, FD, ſuppoſuerimus etiam lineam, AC, bifariam ſecare quamlibet omnium linearum figuræ, ABI, regula, BD, ſupradictarum, quarum ſingulis additur, quæ in directum manet in figura, ADI, veluti Propoſ. 6. oſtenditur rectangulum, BDF, cum quadrato, FE, æquari quadrato, ED, ita hic ad modum ſuperioris oſtendemus rectangula ſub figura, ABID, &, ADI, cum omnibus quadratis figuræ, ACI, æquari omnibus quadratis figuræ, ACD, quod reſpondet Prop. 6. eiuſdem Lib. Conſimiliter reliqua demonſtrabimus, vnde iuxta 1. Prop. Secundi Elem. colligemus.

A
H M N O
B E F D
C I

A. COROLLARII SECTIO I.

REctangula ſub figura indiuiſa, ABID, & ſub diuiſa, ACD, per lineam, AI, æquari rectangulis ſub indiuiſa, ABID, & ſub partibus diuiſæ, quæ ſunt, ACI, AID.

B. SECTIO II.

IVxta ſecundam habebimus omnia quadrata figuræ, ABID, æquari rectang. ſub, ABID, & ſingulis partibus, ABI, AID.

C. SECTIO III.

IVxta tertiam iam dictum eſt in Propoſitione quid colligamus.

D. SECTIO IV.

IVxta quartam habemus omnia quadrata figuræ, ABID, per vnicam lineam, AFI, diuiſa, æquari omnibus quadratis figurarum, ABI, AID, & rectangulis bis ſub dictis fig. ABI, AID.

E. SE-

E. SECTIO V.

Iuxta quintam, si supponamus lineam, AI, bifariam diuidere omnes lineas figuræ, ABID, regulæ, BD, sumptas, & easdem lineam, AC, non bifariam diuidere, colligemus rectangula sub inæqualibus partibus, ABC, ACD, cum omnibus quadratis figuræ, ACI, æquari omnibus quadratis figuræ, ABI.

F. SECTIO VI.

Iuxta sextam quid colligatur iam dictum est in Propositione.

G. SECTIO VII.

Iuxta septimam colligemus, supposito, quod figura, ABID, secetur à sola linea, AI, vtcunque, dummodo eadem secet omnes æquidistantes ipsi regulæ, BD, in figura, ABID, ductas, & in vno tantum puncto, colligemus inquam omnia quadrata figuræ, ABID, & omnia quadrata figuræ, ADI, æquari rectangulis bis sub figuris, ABID, ADI, vna cum omnibus quadratis, ABI.

H. SECTIO VIII.

Iuxta octauam, si supponamus figuram, ABCD, vtcūq; sectam per lineam, AC, (quæ tamen secet omnes ipsi, BD, æquidistantes in figura, ABCD, ductas, & in vno tantum puncto vti dictum est) colligemus rectangula quater sub figuris, ABCD, ABC, cum omnibus quadratis, ACD, æquari omnibus quadratis figuræ compositæ ex figura, ABCD, &, ABC, ita vt omnium linearū figuræ, ABCD, singulis intelligatur adiecta, quæ nunc in figura, ABC, est cum illa in eadem rectitudine.

I. SECTIO IX.

Iuxta nonam, si supponamus lineam, AI, secare omnes æquidistantes ipsi, BD, in figura, ABID, ductas bifariā, & lineam,

AC, easdem bifariam non secare, colligemus omnia quadrata figuræ, ACD, cũ omnibus quadratis figuræ, ABC, dupla esse omnium quadratorum figuræ, AID, cum omnibus quadratis figuræ, ACI, intermediæ.

K. SECTIO X.

IVxta decimam, si supponamus, AC, lineam bifariam secare omnes æquidistantes ipsi, BD, in figura, ABI, ductas, & illis addi, quæ in directum illis iacent in figura, AID; colligemus omnia quadrata figuræ, ABCD, cũ omnibus quadratis figuræ, ADI, dupla esse omnium quadratorum figuræ, ABC, cum omnibus quadratis figuræ, ACD.

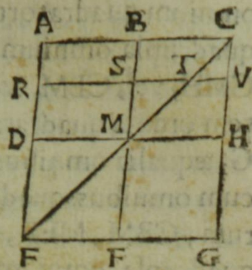
L. SECTIO XI.

IVxta vndecimam, si supponamus, BD, in, E, ita sectam esse, vt rectangulum, DBE, sit æquale quadrato, ED, qualibet autem æquidistantium ipsi, BD, in figura, ABCD, tali modo, & ad eandem partem diuidatur per lineam, AEC, patet, quod etiã rectangula sub figuris, ABCD, ABC, æquabuntur omnibus quadratis figuræ, ACD, regula, BD, igitur linea, AC, diuidet superficiem planam, ABCD, (sic dicere liceat) secundum extremam, ac mediam rationem, hæc autem pro sequentibus accuratè memoriæ commendentur.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

EXposito parallelogrammo quocunq;, in eoq; ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusuis triangulorum per dictam diametrum constitutorum erunt in ratione tripla, vno laterũ parallelogrammi communi regula existente.

Sit



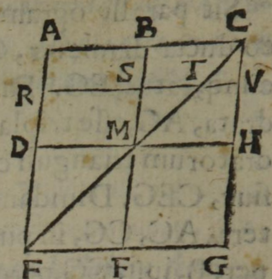
Sit parallelogrammum, AG, in eo ducta diameter, CE, regula vtcunq; latus, EG. Dico omnia quadrata, AG, esse tripla omnium quadratorum trianguli cuiusuis, AEC, siue, CEG. Diuidantur bifariam latera, AC, CG, in punctis, B, H, & per, B, ipsi, CG, perque, H, ipsi, CA, parallelæ ducantur, BF, DH, quæ se cum recta, CE, communiter bifariam secabunt in puncto, M. Quia igitur in figura, siue parallelogrammo, AG, ducitur linea, BF, quæ omnes æquidistantes ipsi, EG, bifariam secat, &, CE, quæ easdem in partes inæquales diuidit, præterquam, DH, omnia quadrata trianguli, AEC, cum omnibus quadratis trianguli, CEG, & cum omnibus quadratis duorum triangulorum, CBM, EMF, dupla erunt omnium quadratorum, AF, licet enim, DH, per lineam, CE, sit non bifariam diuisa, nihil tamen hoc obstat nostro proposito, nam & ipsi, DH, contingit, veluti ijs, quæ inæqualiter secantur, quadratum sectarum partium, scilicet quadrata, DM, MH, dupla esse quadratorum dimidiæ, nempè quadrati, DM, & eius, quæ inter sectiones interijcitur, quæ hic nulla est, cum duæ secantes, BF, CE, vniantur in puncto, M: Sunt autem omnia quadrata trianguli, AEC, æqualia omnibus quadratis trianguli, CEG, quia sunt triangula in æqualibus basibus, EG, AC, & eadem altitudine licet euersè posita, & ideò omnia quadrata trianguli, CEG, sunt æqualia omnibus quadratis, AF, cum omnibus quadratis triangulorum, CBM, MEF. Quoniam verò omnia quadrata trianguli, BMC, sunt æqualia omnibus quadratis trianguli, CMH, omnia verò quadrata trianguli, CEG, ad omnia quadrata trianguli, CMH, sunt in tripla ratione eius, quam habet, GC, ad, CH, quæ est dupla. i. in ratione octupla, & hoc, quia triãgula, CEG, CMH, sunt similia, ideò omnia quadrata, CEG, erunt octupla

Per I. Corol. antec.

Ex B. vel C. Coroll. prop. 22. huius.

om-

omnium quadratorum, CMH, & quadrupla omnium quadratorum, CMH, vel, CBM, &, MEF, sunt autem omnia quadrata trianguli, CE G, æqualia omnibus quadratis, AF, cum omnibus quadratis triangulorum, CBM, MEF, ergo hæc erunt quadrupla omnium quadratorum triangulorum, CBM, MEF, & diuidendo omnia quadrata, AF, erunt illorum tripla, sunt autem omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata, AF, vt quadratum, GE, ad quadratum, EF, .i. quadrupla .i. vt 12. ad 3. & omnia quadrata, AF, sunt omnium quadratorum triangulorum, BMC, MEF, tripla, ergo omnia quadrata, AG, erunt duodecupla omnium quadratorum triangulorum, BMC, MEF, & sunt ad omnia quadrata, AF, vt 12. ad 3. ergo omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata, AF, cũ omnibus quadratis triangulorum, CBM, MEF, erunt vt 12. ad 4. sunt autem omnia quadrata, AF, cum omnibus quadratis triangulorum, CBM, MEF, æqualia omnibus quadratis trianguli, CEG, vel, AEC, vt ostensum est, ergo omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata trianguli, CEG, vel, AEC, sunt vt 12. ad 4. .i. sunt eorum tripla, quod ostendendum erat.



9. huius.

COROLLARIVM.

Hinc patet, si ducamus intra parallelogrammum, AG, æquidistantem ipsi, EG, vtcunque, RV, secantem, CE, in, T, &, BF, in, S, quod veluti ostendimus, RV, æquari vni maximarum abscissarũ, CG, dum, EG, est æqualis ipsi, GC, ita nunc ostendemus quadratum, RV, æquari quadrato vnius maximarum abscissarum, CG, & quadratũ, TV, æquari quadrato vnius omnium abscissarum, CG, idest quadrato, VC; quadratum verò, RT, æquari quadrato vnius residuarum omnium abscissarum, CG, idest quadrato,

drato, VG, vnde concludemus omnia quadrata, AG, regula, EG, æquari quadratis maximarum abſciſſarum, CG, & omnia quadrata trianguli, CEG, æquari quadratis omnium abſciſſarũ, CG, & omnia quadrata trianguli, AEC, æquari quadratis reſiduarum omnium abſciſſarum, CG, & rectangula ſub triangulis, AEC, CEG, æquari rectangulis ſub omnibus abſciſsis, & reſiduis omniũ abſciſſarum, CG, ita ſumptis, vt quoduis rectangulum intelligatur ſub vna abſciſſarum, & eius reſidua: Vnde veluti oſtẽdimus omnia quadrata, AG, tripla eſse omnium quadratorum trianguli, CEG, vel trianguli, CAE, ex quo patet tripla etiam eſse rectãgulorum bis ſub triangulis, AEC, CEG, (ſunt enim omnia quadrata, AG, æqualia omnibus quadratis triangulorum, AEC, CEG, & rectangulis bis ſub eiſdem triangulis) ita apparebit quadrata maximarum abſciſſarum, CG, tripla eſse quadratorum omniũ abſciſſarum, vel quadratorum reſiduarum omnium abſciſſarum, CG, & tripla etiam eſse rectangulorum ſub dictis omnibus abſciſsis, reſiduiſq; bis ſumptis, ſexcupla verò eorundem rectangulorum ſemel ſumptorum, ſunt autem maximæ abſciſſarum, abſciſſæ, & reſiduæ recti tranſitus ſi angulus, EGC, ſit rectus, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi ille non ſit angulus rectus.

D. Cor 23 huius.

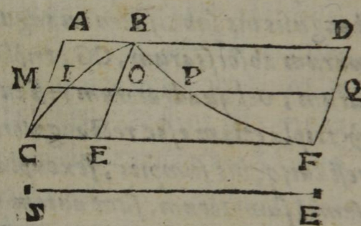
Ex diff. 1. huius.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI in duobus parallelogrãmis ſumptis duobus lateribus pro baſibus, & regulis, ipſa parallelogramma fuerint in eadem altitudine ſumpta reſpectu dictarum baſium; in eiſdem autem baſibus, & altitudine fuerint aliæ duæ planæ figuræ ita ſe habentes, vt ſi ducatur vtcunq; parallela dictis baſibus (quæ in directum ſint conſtitutæ) recta linea, eiuſdem portiones dictis parallelogrammis, & figuris interceptæ, vel ab eiſdem deſcriptæ planæ figuræ, ſint proportionales, homologis exi-

ſtentibus, quæ ſunt in parallelogrammis, & pariter quæ ſunt in figuris, in iiſdem baſibus, & altitudine cum illis conſtitutis, dictorũ parallelogrammorum, ac figurarum omnes lineæ, ſi lineæ, vel omnes figuræ planæ ſimiles, ſi iſtæ comparentur (ſimiles in quam exiſtẽtibus, quæ ſunt in vnaquaque figura) erunt proportionales.

Sint parallelogramma, AE, ED, in baſibus, CE, EF, in directum iacentibus, & in eadem altitudine reſpectu dictarum baſium conſtituta, AE, ED, ſit autẽ regula, CE, vel, EF, & in eiſdem tanquam in baſibus, & eadem altitudine cum parallelogrammis, AE, ED, ſint figuræ, BCE, BEF, eiuſmodi, vt ſi duxerimus vtcunq; ipſi, CF, parallelam, vt, MQ, cuius portiones interceptæ parallelogrammis, AE, ED, ſint, MO, OQ, & interceptæ figuris ſint, IO, OP, reperiamus, MO, ad, OI, eſſe vt, QO, ad, OP. Dico omnes lineas, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, eſſe vt omnes lineæ, BF, ad omnes lineas figuræ, BEF, ſi verò vice linearum comparẽtur ab eiſdem deſcriptæ figuræ, ſimilibus exiſtentibus, quæ ab omnibus lineis vniuſcuiuſq; propoſitarum figurarum deſcribuntur, cuius deſcribentes ſint earum lineæ, vel latera homologa. Dico omnes figuras ſimiles ipſius, AE, ad omnes figuras ſimiles figuræ, BCE, eſſe vt omnes figuras ſimiles ipſius, BF, ad omnes figuras ſimiles figuræ, BEF, quia enim, MQ, vtcunque ducta eſt parallela ipſi, CF, & eſt, MO, ad, OI, vt, QO, ad, OP, permutando erit, vt, MO, ad, OQ, ſic, IO, ad, OP, .i. vt, CE, ad, EF, ſic, IO, ad, OP, & ſic oſtendemus, vt, CE, ad, EF, ita eſſe quaslibet

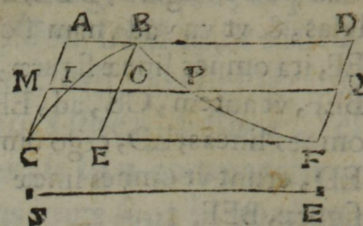


alias.

alias duas in figuris, BCE, BEF, existentes ipsi, CF, parallelas, & vt vna ad vnam sic omnia ad omnia .i. vt, CE, ad, EF, ita omnes lineæ figuræ, BCE, ad omnes lineas figuræ, BEF, vt autem, CE, ad, EF, ita sunt omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, ED, ergo omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, ED, erunt vt omnes lineæ figuræ, BCE, ad omnes lineas figuræ, BEF. Coroll. 4. huius.

Si verò vice linearum sumamus descriptas, vt dictum est, ab eisdem figuras, ex. g. si, vt quadratum, MO, ad triangulum æquilaterum, cuius latus, IO, ita reperiamus esse circulum, cuius diameter, OQ, ad polygonũ, cuius latus, OQ, omnium autem linearum, AE, singulæ describant quadrata, & omnium linearum figuræ, BCE. singulæ describant triangula æquilatera, & omnium linearum, BF, singulæ describant circulos, & figuræ, BEF, singulæ describant polygona prædicto similia, ita vt quæ in eadẽ figura sunt lineæ, vel latera describentia sint homologa, erit vt quadratum, MO, permutando, ad circulum, OQ, ita triangulum æquilaterum, IO, ad polygonum, OP, quia verò, MO, æquatur ipsi, CE, &, OQ, ipsi, EF, ideò quadratum, MO, æquatur quadrato, CE, & circulus, OQ, circulo, EF, & ideò, vt quadratum, CE, ad circulum, EF, ita erit triangulum æquilaterum, IO, ad polygonum, OP, vnde, quia, MQ, vtcunque ducta est parallela ipsi, CF, concludemus omnia quadrata, AE, ad omnes circulos, BF, esse, vt omnia triangula æquilatera figuræ, BCE, ad omnia polygona vni similia figuræ, BEF, & permutando omnia quadrata, AE, ad omnia triangula æquilatera figuræ, BCE, esse, vt omnes circuli, BF, ad omnia polygona vni similia figuræ, BEF. 25. l. 1. Ex 4. huius.

Eodem modo fiet demonstratio, si vice istarum aliæ assumantur figuræ planæ, quarum possunt etiam, quæ sunt duarum figurarum esse similes, vt si comparentur omnia quadrata parallelogrammorum, AE, ED, & omnia triangula æquilatera figurarum, BCE, BEF, vel si comparentur



omnia quadrata, AE, & figuræ, BCE, & omnia triangula æquilatera, BF, & figuræ, BEF; poteſt etiam eſſe omniũ quatuor figurarum omnes figuras eſſe ſimiles, vt ſi cõparentur omnia quadrata eorundem, vel omnes circuli, &c. patet autem hic demonſtrationem currere quotieſcunq; ea, quæ comparantur ſunt eiuſdem generis .ſ. vel lineæ, vel ſuperficies, ſi verò contingat magnitudines diuerſi generis comparari, vt ſi compararentur omnes lineæ, AE, & figuræ, BCE, & omnia quadrata, BF, & figuræ, BEF, tunc quia à permutata ratione non poſſumus argumentari, cum lineam ſuperficiei comparare ſit abſurdum, ideò demonſtratio pro his non currit, quapropter aliud Theorema pro hoc ſubiungemus.

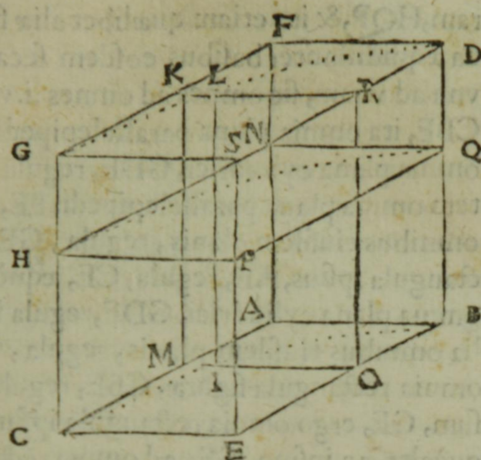
THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

IN eadem antecedentis Prop. figura ſi comparentur magnitudines diuerſi generis, adhuc comparatæ magnitudines erunt proportionales.

Comparentur ex. g. omnes lineæ, AE, regula, CE, ad omnes lineas figuræ, BCE, & omnia quadrata, BF, regula, EF, ad omnia quadrata figuræ, BEF, ita vt ducta vtcunque ipſi, CF, parallela, MQ, reperiamus, MO, ad, OI, eſſe vt quadratum, QO, ad quadratum, OP. Dico adhuc omnes lineas, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, eſſe vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF; ponatur ſeorſim parallelogrammum, AE, ſimul cum figura, BCE, ſed, ne fiat confuſio, ſint ſub ampliori forma, & in ipſis tãquam

in

in basibus constituti intelligantur duo cylindrici recti, FE, nempè in basi, AE, &, DGE, in basi figura, BCE, & in eadem altitudine, quorum quod insistit ipsi, AE, est parallelepipedum, vt facilè ostendetur, intelligatur nūc parallelepipedum, FE, secari vtcunque plano ipsi, GE, æquidistante, producetur ergo ex hac sectione in ipso parallelogrammum rectangulum, quod sit, KO, eodem autem plano fiat in cylindrico, DGE, rectangulum, LO, fiet autem & in hoc cylindrico rectangulum, quia dictum planum ducitur per latera basi, BCE, rectè insistentia, cum ducatur æquidistanter ipsi, GE, quod ducitur per latera, GC, SE, erit ergo rectangulū, KO, vnum ex ijs, quæ dicūtur omnia plana parallelepipedi, FE, regula, GE, & rectangulum, LO, erit vnum ex ijs, quæ dicuntur omnia plana cylindrici, GDE, regula, GE, quæ rectangula erunt æquèalta, ac rectangulum, GE, omnia igitur plana parallelepipedi, FE, (regula; GE,) sunt omnia rectangula æquèalta, ac, GE, ipsius parallelogrammi, AE, (regula, CE,) & omnia plana cylindrici, GDE, sunt omnia rectangula figuræ, BCE, æquiangula, & æquèalta, ac ipsum, GE, regula eadem, CE: Secentur nunc dicti cylindrici planis basibus æquidistantibus, fient ergo communes eorum sectiones similes, & æquales basibus, sit in parallelepipedo, FE, producta, NP, & in cylindrico, GDE, producta figura, HQP, erit ergo vt, AE, ad figuram, BCE, ita, NP, ad figuram,



B. Def. 4. l. 1.

Coroll. 6. l. 1.

E. Def. 8. huius.

Corol. 12. l. 1.

ram, HQP, & ita etiam quælibet aliæ figuræ in ipsis per plana æquidistanter basibus eosdem secantia productæ, & vt vna ad vnam, sic omnes ad omnes .i. vt, AE, ad figuram, CBE, ita omnia plana parallelepipedi, FE, regula, AE, ad omnia plana cylindrici, GDE, regula eadem basi, sunt autem omnia plana parallelepipedi, FE, regula, AE, æqualia omnibus eiusdem planis, regula, GE, quæ sunt omnia rectangula ipsius, AE, regula, CE, æquèalta, ac ipsum, GE, & omnia plana cylindrici, GDE, regula basi, CBE, sunt æqualia omnibus eiusdem planis, regula, GE, quæ & ipsa sunt omnia rectangula figuræ, CBE, regula, CE, æquèalta, ac ipsum, GE, ergo omnia rectangula ipsius, AE, regula, CE, æquèalta, ac ipsum, GE, ad omnia rectangula figuræ, CBE, regula, CE, æquèalta, ac ipsum, GE, erunt vt, AE, ad figuram, BCE, .s. vt omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, BCE, regula, CE, quod serua.

Ex Cor. 4. huius. Ex Cor 2. huius. E. Def. 8. l. 1. Ex Cor. 2. huius. 3. huius.

Conspiciatur nunc figura Theorematis anteced. in qua diximus, MO, ad, OI, esse vt quadratum, QO, ad quadratum, OP. Dico omnes lineas, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, regula, CE, esse vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF, quia enim, vt, MO, ad, OI, ita (sumpta quauis communi altitudine, nempè ex.g. altitudine constitutorum parallelepipedorum, quæ est, SE,) rectangulum sub, MO, &, SE, ad rectangulum sub, IO, SE, ideò, vt rectangulum sub, MO, SE, ad rectangulum sub, IO, SE, ita erit quadratum, OQ, ad quadratũ, OP, sunt autem hæ magnitudines eiusdem generis, nempè omnes superficies, ergo omnia rectangula ipsius, AE, regula, CE, æquèalta, ac vnum eorum, nempè, vt rectangulum sub, CE, ES, ad omnia rectangula figuræ, BCE, regula eadem, CE, æquèalta, ac vnum eorum, vt, GE, erunt vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF, omnia verò rectangula ipsius, AE, æquèalta, ac vnum eorum, vt, GE, ad omnia rectangula figuræ, BCE, æquèalta, ac ipsum, GE, sunt vt omnes

Ex antec.

lineæ ipsius, AE, ad omnes lineas figurę, BCE, regula, CE, ergo omnes lineæ, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, regula, CE, erunt vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF, sunt ergo proportionales, licet sint magnitudines diuersi generis, nempè lineæ, & superficies, quod ostendere opus erat.

Ex proximè dictis.

COROLLARIVM I.

Hinc igitur primò habetur, si fuerint parallelogrammum, & figura plana in eadem basi, & altitudine, regula sumpta basi, omnia rectangula parallelogrāmi æquè alta ad omnia rectangula illius figuræ æquè alta ac prædicta, esse vt dictum parallelogrammum ad dictam figuram, quod patuit, dum ostensum est omnia rectangula ipsius, AE, altitudinis, SE, ad omnia rectangula figuræ, BCE, altitudinis eiusdem, SE, esse vt, AE, ad figurā, BCE.

COROLLARIVM II.

Habetur secundò cylindricos in eadem altitudine existentes esse inter se, vt bases, quod de cæteris, veluti de supradictis, FE, GDE, ostendetur, quamuis aliter etiam id aliundè infræ colligetur.

CO-

COROLLARIVM III.

Habetur tertiò, si non sint in supradictis duobus Theorematibus exposita duo parallelogramma, & duæ figuræ, sed vnum tantum, & vna figura in eadem basi, & altitudine cum ipso, cuius basi posita pro regula, & sumpto vtcunq; puncto in vno laterum basi insistentium, perq; ipsum basi ducta parallela, reperiatur eam, quæ intercipitur parallelogrammo ad eam, quæ intercipitur figura, vel figuras similes ab ipsis descriptas, tanquam homologis lineis, vel lateribus, esse vt vnam ex maximis abscissarum lateris, in quo sumptum est punctum, ad abscissam per ductam basi æquidistantem, vel vt istas adiuncta quadam recta linea, vel vt istarum figuras similes ab ipsis tãquam lineis, vel lateribus homologis descriptas, ita vt figuræ descriptæ à singulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ parallelogrammi, & dictæ figuræ, sint similes, vt pariter, quæ describuntur à singulis earum, quæ dicuntur maximæ abscissarũ, vel abscissæ dicti lateris, quod adhuc dictæ magnitudines collectæ erunt proportionales: Vt ex. g. si in Theorematis antecedentis figura habeamus tantum parallelogrammũ, BF, & in eiusdem basi, EF, & eadem altitudine, figuram, BEF, & sumpto in vno laterum, BE, DF, vtcunq; puncto, O, & per, O, ducta, OQ, parallela ipsi, EF, reperiamus, QO, ad, OP, esse vt, EB, ad, BO, vel figuras similes descriptas ab, OQ, OP, tanquã lineis, vel lateribus homologis, vt ex. g. quadratum, QO, ad quadratũ, OP, esse vt, EB, ad, BO, vel vt, EB, adiuncta quadam linea ad, BO, adiuncta eadem, vel vt ab istis descriptas similes figuras, dico collectas magnitudines, quæ comparantur esse proportionales; Nam si ipsi, BE, intelligatur applicatum parallelogrammum AE, cuius basis sit, CE, in directum ipsi, EF, constituta, & , CE, æqualis ipsi, EB, tunc omnes lineæ, AE, regula, CE, sunt æquales maximis abscissarum, BE, vt probatum est, & omnes abscissæ æquales omnibus lineis trianguli, BCE, si sit iuncta, BC, (quæ secet, MO, in, X,) vnde vice earum, quæ dicuntur maximæ abscissarum, vel abscissæ ipsius, BE, rectè sumemus omnes lineas, AE, & triãguli,

Coroll. 2. 19. huius.

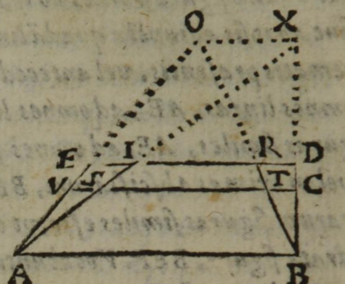
BCE,

BCE, & ita reperiemus quadratum, QO, ad quadratũ, OP, ex g. esse vt, MO, ad, OX, vel vt quadratum, M, O, ad quadratũ, OX, vel vt aliæ figuræ similes ab ipsis descriptæ, siue ab ipsis simplicibus, siue ab ipsis adiuncta quadã linea, vnde casus iste ad casum Theorematis præsentis, vel antecedentis deductus erit, & ideò patebit, omnes lineas, AE, ad omnes lineas trianguli, BCE, vel omnes figuras similes, AE, ad omnes figuras similes trianguli, BCE, idest vel maximas abscissarum, BE, ad abscissas omnes ipsius, BE, vel earum figuras similes esse, vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF. Vocabuntur autem istæ; Quatuor ordinũ magnitudines collectæ iuxta quatuor magnitudines proportionales vtcunq; inuentas, quæ fuerunt ex. g. prima quadratum, OQ, secunda quadratum, OP, tertia, EB, quarta, BO, magnitudines autem collectæ iuxta primam. s. ex. g. omnia quadrata, BF, dicentur primi ordinis, collectæ verò iuxta secundam. s. omnia quadrata figuræ, BEF, magnitudines secundi ordinis, collectæ verò iuxta tertiã magnitudines tertij ordinis, & tandem collectæ iuxta quartã magnitudines quarti ordinis, sic igitur appellabimus hos quatuor magnitudinum ordines. In supradictis autem, quod dicimus de abscissis, idem intellige de residuis abscissarum, & quod de ipsis simplicibus, idem de eisdẽ adiunctis alijs, siue sint recti, siue eiusdem obliqui transitus: Hoc autem Corollarium præ cæteris summè animaduertendum est, ac memoriæ diligentissimè commendandum, ex hoc enim potissimas demonstrationes tanquam ex fonte deriuari studiosus in sequentium Librorum lectione facilè comprehẽdet.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

SI duo trapezia fuerint in eadem basi, sumpto vno laterum æquidistantium pro basi, & regula, & fuerint etiam in eadem altitudine respectu illius basis, & latera basi parallela fuerint æqualia, trapezia erunt æqualia, & omnia eorundem quadrata erunt æqualia.

Sint duo trapezia, AERB, IABD, in eadem basi, AB, quæ sit sumpta pro regula, cuiq; latera, ER, ID, sint parallela, & inter se æqualia. Dico trapezia esse æqualia, & omnia eorundem quadrata esse æqualia. Producantur, AE, BR, donec sibi occurrãt, vt in, O, &, AI, BD, donec simul incidãt, vt in, X, & iungatur, OX, quia ergo, ER, parallela est ipsi, AB, erunt triangula, AOB, EOR, similia, & eadem ratione similia erunt triangula, AXB, IXD, ergo vt, AB, ad, ER, vel ad, ID, illi æqualem, ita erit, BO, ad, OR, vt autem, AB, ad, ID, ita est, BX, ad, XD, ergo vt, BO, ad, OR, ita est, BX, ad, XD, ergo, OX, parallela est ipsi, ED. Ducatur intra trapezia parallela ipsi, AB, vtcunque, VC, secans, XA, in, S, &, OB, in, T, sunt igitur triangula, AOB, VOT, similia, & pariter sunt similia triangula, AXB, SXC, ergo, AB, ad, VT, erit vt, BO, ad, OT, .i. vt, BX, ad, XC, (quia, VC, parallela est ipsi, AB, & consequenter ipsi, OX,) .i. vt, AB, ad, SC, ergo, VT, SC, erunt æquales, & eorum quadrata pariter æqualia, sic autem de cæteris ipsi, AB, parallelis idem ostendetur, ergo omnes lineæ trapezij, AERB, erunt æquales omnibus lineis trapezij, AIDB, regula, AB, & consequenter ipsa trapezia erunt æqualia, & omnia eorundem quadrata pariter æqualia, quod ostendere opus erat.



Ex diff. 1. Sexti Element.

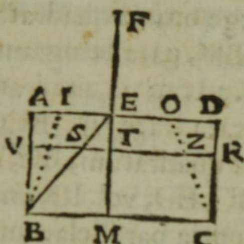
4. Sexti Elem.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI parallelogrammum, & trapezium habuerint communem basim vnum æquidistantium laterum trapezij, quod sit sumptum pro regula; Omnia quadrata parallelogrammi ad omnia qua-

quadrata trapezij erunt, vt quadratum dictæ basis ad rectangulum sub parallelis lateribus trapezij, cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ dictorum laterum æquidistantium.

Sit parallelogrammum, AC, & trapezium, IBCO, cuius laterum æquidistantium alterum, vt, BC, sit communis basis ipsi, & trapezio, & regula. Dico ergo omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata trapezij, IBCO, esse vt quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, IO, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differẽtiæ ipsarum, BCIO. Sumatur in, DA, ipsa, ED, æqualis ipsi, IO, & iũgatur, BE, & per, E, ipsis, AB, DC, parallela ducatur, EM: Omnia ergo quadrata trapezij, EBCD, per lineam, EM, diuiduntur in omnia quadrata trianguli, EBM, & in omnia quadrata, MD, & in rectãgula sub triãgulo, EBM, &, EC, bis sumpta, ad horũ ergo singula comparemus omnia quadrata, AC. Igitur omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, CE, sunt vt quadratum, BC, ad quadratum, CM, quod serua. Insuper omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, AM, sunt vt quadratum, CB, ad quadratũ, BM, item omnia quadrata, AM, sunt tripla omnium quadratorum trianguli, EBM, .i. sunt ad illa, vt quadratum, BM, ad $\frac{1}{3}$. quadrati, BM, ergo, ex æquali, omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata trianguli, EBM, erunt vt, BC, ad $\frac{1}{3}$. quadrati, BM, quod pariter serua. Tandem omnia quadrata, AC, ad rectangula sub, AM, MD, erunt vt quadratum, BC, ad rectangulum, BMC, rectangula verò sub, AM, MD, ad rectangula sub triangulo, EBM, & sub, MD, sunt vt, AM, ad triangulum, EBM, (quia illa sunt omnia rectangula parallelogrammi, AM, & trianguli, EBM, æquè alta, altitudinis nempè æqualis ipsi, MC, sumpta regula, BM,) .i. dupla .i. vt



Per D. Coroll. 23. huius.

9. huius.

9 huius.

24. huius.

14. huius.

Coroll. 1. 26. huius.

rectangulum, BMC, ad eiusdem dimidium, ergo, ex æquali, omnia quadrata, AC, ad rectangula sub triangulo, EBM, & sub, MD, erunt vt quadratum, BC, ad dimidium rectanguli, BMC, ad eadem verò bis sumpta erunt, vt quadratum, BC, ad rectangulum, BMC, ergo, colligendo, omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, EC, ad omnia quadrata trianguli, EBM, & ad rectangula bis sub triangulo, EBM, & sub, EC, erunt vt quadratum, BC, ad quadratum, CM, cum rectangulo, CMB, & $\frac{1}{3}$. quadrati, BM, sed rectangulum, BMC, cum quadrato, MC, conficit rectangulũ sub, BC, CM, ergo omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata trianguli, EBM, parallelogrammi, MD, & rectangula bis sub eisdem, .i. ad omnia quadrata trapezij, EDCB, .i. ad omnia quadrata trapezij, IBCO, (quia, IO, ED, sunt æquales) erunt, vt quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, CM, .i. sub, BC, ED, vel, IO, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, BM, quæ est differentia parallelarum, BC, ED, siue, BC, IO, ipsius trapezij, IBCO, quod ostendere opus erat.

Per D. Coroll. 23 huius.

Ex antec

COROLLARIVM.

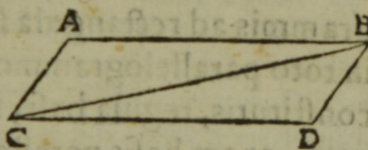
Patet autem si ipsi, ME, adiungamus in directum, EF, aequalem ipsi, MC, & si supponamus, BM, aequari ipsi, ME, facillimè probari posse omnia quadrata, AC, aequari quadratis maximarum abscissarum ipsius, ME, adiuncta, EF, & omnia quadrata trapezij, FBCD, aequari quadratis omnium abscissarum, ME, adiuncta, EF, nam ex. gratia ducta ipsi, BC, parallela vtcunque, VR, quae secet, EB, in, S, &, EM, in, T, patet, quod, VT, est aequalis ipsi, ME, &, TR, adiunctae, EF, & ideò tota, VR, aequalis toti, MF; similiter, ST, est aequalis ipsi, TE, &, TR, adiunctae, EF, vnde patet, SR, aequari compositae ex, TE, vna abscissarum, & adiuncta: Consimiliter in caeteris facta demonstratione propositum ostendemus; vnde patebit pariter quadrata maximarum abscissarum propositae rectae lineae, vt ipsius, EM, adiuncta qua-

quadam, vt, EF, ad quadrata omnium abscissarum eiusdem adiuncta eadem, esse vt quadratum vnius maximarũ abscissarum adiuncta iam dicta .i. vt quadratum compositæ ex proposita, & adiuncta, ad rectangulum sub hac composita, & sub adiuncta, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ huius compositæ, & adiunctæ .s. vt quadratum, MF, ad rectangulum sub, MF, FE, vna cũ $\frac{1}{3}$. quadrati, EM, quæ est differentia earundem, & est ẽt proposita linea.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

CViuscunque parallelogrammi omnia quadrata regula vno laterum ad omnia quadrata eiusdem regula altero laterum cum prædicto angulum continentium, erunt vt prima regula ad secundam.

Sit quodcunq; parallelogrammum, AD. Dico omnia quadrata eiusdem, regula, DB, esse vt, CD, ad, DB: Omnia enim quadrata, AD, regula, CD, ad omnia quadrata, AD, regula, DB, habẽt rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, CD, ad quadratum, DB, & ex ea, quam habet, BD, ad, DC, (quia, BD, æqualiter inclinatur basi, CD, ac, CD, ipsi basi, DB, nam sunt circa eundem angulum) .i. ex ea, quam habet quadratum, BD, ad rectangulum sub, BD, DC, duæ autem rationes, nempè quadrati, CD, ad quadratum, BD, & quadrati, BD, ad rectangulum sub, BD, DC, componunt rationem quadrati, CD, ad rectãgulum sub, BD, DC, quæ est eadem ei, quam habet, CD, ad, DB, ergo omnia quadrata, AD, regula, CD, ad omnia quadrata eiusdem, AD, regula, DB,



21. huius
5. huius.
Diffin. 12. l. 1. 5. huius.

erunt

erunt vt, CD, prima regula ad, DB, ſecundam, quod oſtendere opus erat.

COROLLARIVM.

Hinc patet, ſi iungamus, CB, omnia quadrata triãguli, CBD, regula, CD, ad omnia quadrata trianguli eiuſdem, regula, DB, eſſe vt, CD, primam regulam ad, DB, ſecundam, nam omnia quadrata triangulorum in eadem baſi, & altitudine cum parallelogrammis conſtitutorum ſunt omnium quadratorum dictorum parallelogrammorum ſubtripla, ſumpto communi latere pro
24. huius. *regula, vt probatum eſt.*

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI intra parallelogrammum agatur à puncto baſis lateribus oppoſitis parallela, & conſtitutorum hinc parallelogrammorũ vnius ducatur diameter: Rectangula ſub factis parallelogrammis ad rectangula ſub trapezio, & triangulo in toto parallelogrammo per dictam diametrum conſtitutis, regula baſi, habebunt eandem rationem, quam baſis parallelogrammi, in quo non ducitur diameter ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. eiuſdem, & $\frac{1}{6}$. baſis alterius: Rectangula verò ſub toto parallelogrammo, & ſub eo, in quo ducitur diameter, ad rectangula ſub dicto trapezio, & ſub triangulo, qui eſt trapezij portio, erunt vt baſis totius parallelogrammi ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. baſis parallelogrammi, in quo non ducitur diameter, & ex $\frac{1}{3}$. baſis alterius.

Sit

Sit ergo parallelogrammum, AF, in bali, DF, quæ sit regula, intra quam sumptum sit punctum, E, & per, E, ipsis, AD, CF, acta, parallela, BE, ducatur autem in alterutro parallelogrammorum, AE, EC, vt in, EC, diameter, EC. Dico ergo rectangula sub, AE, EC, ad rectangula sub trapezio, ADEC, & triangulo, CEF, esse vt, DE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{6}$. EF. Rectangula enim sub trapezio, ADEC, diuiso per lineam, BE, & sub triangulo, CEF, indiuiso, ęquantur rectangulis sub, AE, & triangulo, CEF, vel triangulo, BEC, & rectangulis sub triangulo, BEC, & triangulo, CEF, nunc patet rectangula sub, AE, EC, ad rectangula sub, AE, & triangulo, BCE, esse vt, BF, ad triangulum, BEC, .i. dupla .i. vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. DE, quod seru[illegible].

Per A. Corol 23. huius.

Coroll. 1. 26. huius.

Item rectangula sub, AE, EC, ad omnia quadrata, BF, sunt vt rectangulum, DEF, ad quadratum, EF, .i. vt, DE, ad, EF, omnia verò quadrata, BF, sunt sexcupla rectangulorum sub triangulis, BEC, CEF, .i. sunt ad illa, vt, EF, ad $\frac{1}{6}$. eiusdem; EF, ergo ex æquali, rectangula sub, AE, EC, ad rectangula sub triangulis, BEC, CEF, erunt vt, DE, ad $\frac{1}{6}$. EF, eadem verò ad rectangula sub, AE, & triangulo, BEC, siue, CEF, ostensa sunt esse, vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. DE, ergo, colligendo, rectangula sub, AE, EC, ad rectangula sub, AE, & triangulo, CEF, & sub triangulo, BEC, & eodem, CEF, .i. ad rectangula sub trapezio, ADEC, & triangulo, CEF, erunt vt, DE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{6}$. EF, quæ est Theorematis prima pars.

14. huius.

Elicitur ex 24 huius.

Per A. Corol 23 huius.

Dico vlterius rectangula sub, AF, FB, ad rectangula sub trapezio, ADEC, & triangulo, BEC, esse vt, DF, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{6}$. EF; rectangula .n. sub, AF, FB, ad rectangula sub, AE, EC, sunt vt rectangulum, DFE, ad re-

14. huius.

5. huius. ctangulũ, DEF, .i. vt, FD, ad, DE, rectangula verò ſub, AE, EC, ad rectangula ſub, AE, & triangulo, BEC, ſunt vt, BF, ad triangulum, BEC, .i. dupla .i. vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. ipſius, DE, ergo, ex æquali rectangula ſub, AF, FB, ad rectangula ſub, AE, & triãgulo, BEC, erunt vt, FD, ad $\frac{1}{2}$.DE, quod ſerua.

Coroll. 1. 26. huius.

14. huius. 5 huius. 24. huius. Item rectangula ſub, AF, FB, ad omnia quadrata, BF, ſunt vt rectangulum, DFE, ad quadratum, FE, .i. vt, DF, ad, FE: Omnia verò quadrata, BF, ſunt tripla omniũ quadratorum trianguli, BEC, .i. ſunt vt, FE, ad $\frac{1}{3}$.FE, ergo ex æquali rectangula ſub, AF, FB, ad omnia quadrata trianguli, BEC, ſunt vt, DF, ad $\frac{1}{3}$. FE, erant autem eadem ad rectangula ſub, AE, & triangulo, BEC, vt, DF, ad $\frac{1}{2}$. DE, ergo, colligendo, rectangula ſub, AF, FB, ad rectangula ſub, AE, & triangulo, BEC, vna cũ omnibus quadratis trianguli, BEC, .i. ad rectangula ſub trapezio, ADEC, & triangulo, BEC, erunt vt, DF, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{3}$. EF, quæ eſt Theorematis ſecunda pars; hæc autem erant demonſtrãda.

Per C. Corol 23. huius.

COROLLARIVM.

Colligimus autem ex hoc Theoremate rectangula ſub maximis abſciſſarum propoſitæ lineæ, adiunctis eiſdem tot vni cuidam æqualibus, ad rectangula ſub omnibus abſciſſis eiuſdem adiuncta iam dicta linea, & ſub reſiduis abſciſſarum eiuſdem, eſſe vt adiuncta ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. adiunctæ, & $\frac{1}{6}$. propoſitæ lineæ, & hoc ex prima parte huius Theorematis, nam, vt alibi oſtẽdimus, ſi ſupponamus ipſi, BE, adiungi rectam, EM, æqualem ipſi, DE, &, BE, eſſe æqualem ipſi, EF, omnes lineæ trapezij, ADEC, erunt æquales omnibus abſciſſis ipſius, BE, (quæ ſit propoſita linea) adiuncta tamen, EM, & omnes lineæ trianguli, CEF, (intellige ſemper regulam, DF,) erũt æquales reſiduis omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ, BE, item omnes lineæ, AE, erunt æquales ijs, quæ adiunguntur maximis abſciſſarum, BE, nam earum ſingulæ ſunt æquales ipſi, DE, vel, EM, & omnes lineæ, EC, maximis abſciſ-

ſarum

sarum, BE, pariter aquales erunt, vnde patet propositum. Ex secunda verò parte consimili ratione colligemus rectangula sub maximis abscißarum propositæ lineæ, vt, BE, adiuncta quadam, vt, EM, & sub maximis abscißarũ eiusdem propositæ, BE, ad rectangula sub omnibus abscißis, sumptis versus, E, eiusdem propositæ, BE, adiuncta, EM, & sub eisdem omnibus abscißis proposita, BE, esse vt composita ex proposita, & adiecta .s. vt, BM, ad compositam ex ½. adiectæ, quæ est, ME, & ⅓. propositæ, quæ est, BE.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

EXposita Proposit. antecedentis figura, & intra parallelas, AC, DF, eisdem æquidistanter ducta recta linea, HO, quæ secet, BE, in, M, &, CE, in, N, ostendemus, regula eadem, DF, rectangula sub parallelogrammis, AO, OB, ad rectangula sub trapezijs, HACN, MBCN, esse vt rectangulum, HOM, ad rectangulum sub, HO, MN, cum rectangulo sub composita ex ½. HM, & ⅓. NO, & sub, NO.

Rectangula enim sub parallelogrammis, AO, OB, ad rectangula sub parallelogrãmis, AM, MC, sunt vt rectãgulum, HOM, ad rectangulum, HMO, rectangula verò sub, AM, MC, ad rectangula sub parallelogrammo, AM, & trapezio, BM NC, sunt vt, BO, ad trapeziũ, BMNC, .i. vt, MO, ad, MN, cum ½. NO, vel vt rectangulum, HMO, ad rectangulũ sub, HM, & sub composita ex, MN, & ½. NO, ergo, ex æquali, 6. huius. Coroll. 1. 26. huius. 30. huius. 6. huius.



rectangula ſub, AO, OB, ad rectangula ſub, AM, & trapezio, BMNC, ſunt vt rectangulum, HOM, ad rectangulum ſub, HM, & compoſita ex, MN, & $\frac{1}{2}$. NO, quod ſerua.

24. huius. Inſuper rectãgula ſub, AO, OB, ad omnia quadrata, OB, ſunt vt rectangulum, HOM, ad quadratum, OM, & omnia
18. huius. quadrata, OB, ad omnia quadrata trapezij, BMNC, ſunt vt quadratum, OM, ad rectangulum, OMN, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, NO, ergo, ex æquali rectangula ſub, AO, OB, ad omnia quadrata trapezij, BMNC, ſunt vt rectangulum, HOM, ad rectangulũ, OMN, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, NO, oſtenſa ſunt autem rectangula ſub, AO, OB, ad rectangula ſub, AM, & trapezio, BMNC, eſſe vt rectangulum, HOM, ad rectangulum ſub, HM, & compoſita ex, MN, & $\frac{1}{2}$. NO, ergo, colligendo, rectangula ſub, AO, OB, ad rectangula ſub, AM, & tra-
Per C. Corol. 23 huius. pezio, BMNC, cum omnibus quadratis eiuſdem trapezij, ideſt ad rectangula ſub trapezijs, AHNC, BMNC, erunt vt rectangulum, HOM, ad rectangulum ſub, HM, & compoſita ex, MN, & $\frac{1}{2}$. NO, vna cum rectangulo ſub, OM, & MN, & $\frac{1}{3}$. quadrati, NO, rectangulum autem ſub, HM, & compoſita ex, MN, & $\frac{1}{2}$. NO, diuiditur in rectangula ſub, HM, &, MN, & ſub, HM, & $\frac{1}{2}$. NO, ſi ergo iunxeris rectãgulum ſub, HM, MN, cum rectangulo ſub, OM, MN, fiet rectan-
1 Secundi Elem. gulum ſub tota, HO, & ſub, MN, & remanebit rectãgulum ſub, HM, & ſub $\frac{1}{2}$. NO, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, NO, ideſt cum
7. huius. rectangulo ſub, NO, & $\frac{1}{3}$. NO, eſt autem rectangulum ſub, HM, & $\frac{1}{2}$. NO, æquale rectangulo ſub $\frac{1}{2}$. HM, & ſub, NO, hoc ergo ſi iunxeris rectangulo ſub, NO, & $\frac{1}{3}$. NO, conficiemus rectangulum ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$. HM, & $\frac{1}{3}$. NO, & ſub, NO, totum igitur conſequens iam dictum diuiſum eſt in hæc duo rectangula, nempè vnum ſub, HO, MN, aliud ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$. HM, & $\frac{1}{3}$. NO, & ſub, NO; ad hæc ergo ſimul ſumpta rectangulum, HOM, erit vt rectãgula ſub, AO, OB, ad rectangula ſub trapezijs, AHNC, BMNC, quod oſtendendum erat.

CO-

COROLLARIVM.

HInc etiam patet, si supponamus, FE, esse æqualem ipsi, EB, & ipsi, EB, in directum adiunctam ipsam, EZ, sumamus tamen cum, EZ, ipsam, EM, ex quibus conficiamus, MZ, adiunctam maximis abscissarum, vel abscissis ipsius, BM, proposita vtcunq; lineæ, quod facilè ostendemus omnes lineas parallelogrammi, AO, æquari maximis abscissarũ, BM, adiuncta, MZ, & omnes lineas, BO, æquari maximis abscissarum, BM, adiuncta, ME, & omnes lineas trapezij, AHNC, æquari omnibus abscissis, BM, adiuncta, MZ, & omnes lineas trapezij, BMNC, æquari omnibus abscissis ipsius, BM, adiuncta, ME, quorum exemplum patere potest in recta, HO, in qua, HO, æquatur ipsi, BZ, &, HN, ipsi, MZ, &, MN, ipsi, ME, æquari autem supradicta sic intellige, vt semper cuilibet assumpta in parallelogrammo, AO, reperiatur sibi æqualis respondens in recta, BZ, & sic cuilibet assumpta in trapezijs iam dictis, reperiatur illi æqualis correspondens in recta, BZ, quæ erit vna abscissarum, BM, adiuncta, MZ, vel, ME, ea nempè, quæ terminatur ad idem punctũ, per quod transit ea, quæ æquidistat ipsi, DF, & cum eadem comparata illi reperitur æqualis (sic autem intellige in cæteris, cum dicimus omnes lineas alicuius figuræ, quæ est parallelogrammum, vel trapezium, vel triangulum æquari omnibus abscissis, vel maximis, vel residuis omniũ abscissarum alicuius lineæ, adiuncta, vel non adiuncta aliqua linea.) Rectangula ergo sub maximis abscissarum, BM, adiuncta, MZ, & sub maximis abscissarum, BM, adiuncta, ME, ad rectangula sub omnibus abscissis, BM, adiuncta, MZ, & sub omnibus abscissis, BM, adiuncta, ME, erunt vt rectangulum sub, HO, OM, idest sub, ZB, BE, ad rectangulum sub, HO, MN, vnà cum rectãgulo sub composita ex $\frac{1}{2}$, HM, & $\frac{1}{3}$, NO, & sub, NO, idest ad rectangulum



Vt in Cor. 21. huius.

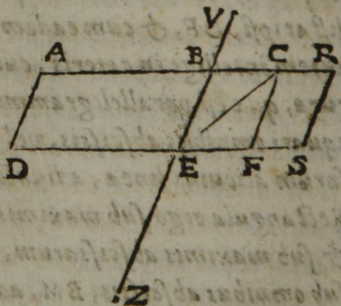
gulum sub, ZB, ME, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. ZE, & $\frac{1}{3}$. MB, & sub, MB.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

EXposita adhuc antecedentis Theorematis figura, si ipsi, EF, ad punctum, F, iungatur in directũ quædam recta linea, vt, FS, & compleatur parallelogrammum, FR, regula sumpta, DS, ostendemus rectangula sub, AE, ER, ad rectangula sub trapezijs, ADEC, CESR, esse vt rectangulum, DES, ad rectãgulum sub, DE, & composita ex, SF, & $\frac{1}{2}$. FE, vna cum rectangulo sub, EF, & composita ex $\frac{1}{6}$. EF, & $\frac{1}{2}$. FS.

Rectangula enim sub, AE, ER, ad rectangula sub, AE, & Coroll. 1. 26. huius. trapezio, CESR, sunt vt, ER, ad trapezium, CESR, .i. vt, ES, ad, SF, cum $\frac{1}{2}$. FE, .i. sumpta, DE, communi altitudi- 20. huius. 5. huius. ne, vt rectangulum, DES, ad rectangulum sub, DE, & sub composita ex, SF, & $\frac{1}{2}$. FE, quod serua.

Insuper rectangula sub, AE, ER, ad rectangula sub, BF, 14. huius. FR, sunt vt rectangulum, DES, ad rectangulum, EFS; item rectãgula sub, BF, FR, ad rectangula sub triãgulo, BEC, & tra- 30. huius. pezio, CESR, sunt vt, FS, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. SF, & $\frac{1}{6}$. FE, .i. sumpta, EF, communi altitudine, vt rectangulum, EFS, 5. huius. ad rectangulũ sub, EF, & composita ex $\frac{1}{6}$. EF, & $\frac{1}{2}$. FS, ergo ex æquali rectangula sub, AE, ER, ad rectangula sub triangulo, BEC, & trapezio, CESR, erunt vt rectangulum,



DES, ad rectangulum sub, EF, & composita ex $\frac{1}{6}$. EF, & $\frac{1}{2}$. FS; erant autem eadem rectangula sub, AE, ER, ad rectangula sub, AE, & trapezio, CESR, vt idem rectãgulum, DES, ad rectangulum sub, DE, & composita ex, SF, & $\frac{1}{2}$. FE, ergo, colligendo, rectangula sub, AE, ER, ad rectangula sub, AE, & trapezio, CESR, & sub triangulo, BEC, & eodem trapezio, CESR, .i. ad rectangula sub trapezio, AD EC, & trapezio, CESR, erunt vt rectangulum, DES, ad rectangulum sub, DE, & composita ex, SF, & $\frac{1}{2}$. FE, vna cum rectangulo sub, EF, & composita ex $\frac{1}{6}$. EF, & $\frac{1}{2}$. FS, quod ostendere opus erat.

1. lib. 2. huius.

Per A. Corol 23. huius.

COROLLARIVM.

Qvoniam verò si supponamus, FE, esse æqualem ipsi, EB, facile modo vsitato ostendemus omnes lineas trapezij, ADEC, æquari residuis omnium abscissarũ, BE, sumptis versus, E, adiuncta, EZ, & omnes lineas trapezij, CESR, æquari omnibus abscissis, EB, adiuncta recta linea æquali ipsi, FS, ad punctum, B, quæ sit, BV, & omnes lineas, AE, æquari tot æqualibus adiunctæ, ZE, quot sunt omnes abscissa, BE, & omnes lineas, ER, æquari maximis abscissarum, EB, adiuncta, BV, ideò rectangula sub istis erunt etiam æqualia rectangulis sub dictis trapezijs, & parallelogrammis, vnde proposita vtcunq; linea, VZ, eaq; vtcũq; secta in duobus punctis, B, E, patebit rectãgula sub tot æqualibus, ZE, quot sunt omnes abscissæ, siue maximæ abscissarum, EB, & sub maximis abscissarum, EB, adiuncta, BV, ad rectangula sub residuis omnium abscissarum, BE, adiuncta, EZ, & sub omnibus abscissis, EB, adiuncta, BV, esse vt rectangulum, DES, ad rectangulum sub, DE, & composita ex, SF, & $\frac{1}{2}$. FE, vna cum rectangulo sub, EF, & composita ex $\frac{1}{6}$. EF, & $\frac{1}{2}$. FS, .i. vt rectangulum, ZEV, quod est vnum rectangulorum maximis æqualium, ad rectangulum sub, ZE, & sub composita ex, VB, & $\frac{1}{2}$. BE, vna cum rectangulo sub, EB, & composita ex $\frac{1}{6}$. EB, & $\frac{1}{2}$. BV, regu-

Corol 20. huius.

Iam autem hic pariter suppone ipsam, DS, & abscissas, residuas & maximas abscissarum tum hic, tum in supradictis, & sequentibus, nisi aliud dicatur, semper intellige, vel recti, vel eiusdem obliqui transitus, recti nempè, cum parallelogramma sunt rectangula, obliqui autem, cum non fuerint rectangula, cum diffinitiones de his allatas.

Iux. diff. 1. huius.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

Expositis duabus vtcunq; figuris planis, & in earum vnaquaq; sumpta vtcumq; regula, vt omnia quadrata earumdem figurarum sumpta iuxta dictas regulas, ita erunt solida quæcumq; ad inuicem similaria ex eisdem figuris genita iuxta easdem regulas.

Sint duæ vtcunque figuræ planæ, ABC, DEF, in quibus duæ vtcunq; sint sumptæ regulæ, BC, EF, rectæ lineæ. Dico igitur, vt omnia quadrata figuræ, ABC, regula, BC, ad omnia quadrata figuræ, DEF, regula, EF, ita esse solidum similare quodcunq; genitum ex figura, ABC, iuxta regulam, BC, ad sibi similare genitum ex figura, DEF, iuxta regulam, EF. Ducatur in altera dictarum figurarum, vt in, DEF, vtcumq; regulæ, EF, parallela, HM, quia ergo quadrata habent inter se duplam rationem laterum, à quibus describūtur, ideò quadratum, EF, ad quadratum, HM, habebit duplam rationem eius, quam habet, EF, ad, HM, sed etiam aliæ duæ quæcumq; figuræ planæ similes ab eisdem tanquam lineis, vel lateribus homologis earumdem descriptæ habent duplam rationem earumdem, ergo, vt quadratum, EF, ad quadra-

Vide B Definit. 8. huius.

8. & 15. huius.

25. huius.



dra-

dratum, HM, ita erit alia quælibet figura plana descripta ab, EF, ad similem sibi descriptam ab, HM, ita vt, EF, HM, sint earum homologæ, &, permutando, quadratum, EF, ad aliam figuram descriptam ab, EF, erit vt quadratum, HM, ad figuram prædictæ similem ab, HM, descriptam. Sic etiam esse ostendemus quadratum cuiuscumq; in figura, DEF, ductæ ipsi, EF, æquidistantis, ergo, vt vnum ad vnum, sic omnia ad omnia .i. vt quadratum, EF, ad figuram aliam quamcumq; descriptam ab, EF, sic erunt omnia quadrata figuræ, DEF, regula, EF, ad omnes figuras similes eiusdem figuræ, DEF, regulá eadem, EF, similes inquam descriptæ ab, EF, vt autem quadratum, EF, ad figuram descriptam ab, EF, ita quadratum, BC, ad figuram, quæ describitur à, BC, similis ei, quæ descripta est ab, EF, ita vt describentes sint earumdem homologæ, vt autem quadratum, BC, ad figuram descriptam à, BC, sic esse ostẽdemus omnia quadrata figuræ, ABC, regula, BC, ad omnes figuras similes eiusdem figuræ, ABC, similes inquam descriptæ à, BC, vel ab, EF, eodem modo, quo id ostendimus in figura, DEF, ergo omnia quadrata figuræ, ABC, ad omnes figuras similes alias quascũq; eiusdem figuræ, ABC, erunt, vt omnia quadrata figuræ, DEF, ad omnes figuras similes prædictis eiusdem figuræ, DEF, regulis prædictis, BC, EF, ergo permutando, vt omnia quadrata figuræ, ABC, ad omnia quadrata figuræ, DEF, ita erunt omnes figuræ similes quæcumq; figuræ, ABC, ad omnes figuras similes prædictis figuræ, DEF, quia verò omnes figuræ similes alicuius figuræ planæ regula quadã sumptæ, sunt omnia plana solidi, quod dicitur similare, & genitum ex tali figura iuxta eãdem regulam, ideò, vt omnes figuræ similes quæcumq; ipsius figuræ, ABC, regula, BC, ad omnes figuras similes ipsius figuræ, DEF, regula, EF, similes inquam prædictis .i. vt omnia quadrata figuræ, ABC, regula, BC, ad omnia quadrata figuræ, DEF, regula, EF, ita erunt omnia plana solidi similaris cuiuscumq; geniti ex figura,

Coroll. 4. huius.

B diff. 8. huius.

Postulatũ 2. huius.

gura, ABC, iuxta regulam, BC, ad omnia plana solidi similaris geniti ex figura, DEF, iuxta regulam, EF, vt autem
3. huius. omnia plana duorum solidorũ sic & ipsa solida, ergo etiam solida similaria genita ex figuris, ABC, DEF, (quæ sunt similaria ad inuicem, quia omnes figuræ similes figuræ, ABC, sunt etiam similes omnibus figuris similibus figuræ, DEF,) iuxta regulas, BC, EF, erunt ad inuicem, vt omnia quadrata earumdem figurarum eisdem regulis sumpta, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet, si in figura, ABC, vtcumq; regula, BC, descripserit duas quascumq; figuras, quod vt vna ad aliam, ita erunt omnes figuræ ipsius, ABC, similes vni descriptarum ad omnes figuras eiusdem similes alteri descriptarum i.ita omnia plana solidi similaris geniti ex, ABC, iuxta regulam, BC, (similibus existentibus eiusdem figuris vni descriptarum) ad omnia plana solidi similaris geniti ex eadem figura iuxta eandem regulam (huius similibus existentibus figuris alteri descriptarum) idest ita erunt solida similaria genita ex eadem figura, ABC, iuxta communem regulam, BC, non tamen similaria ad inuicem, sed, quarum omnia plana sunt omnes figuræ similes eiusdẽ, ABC, similes inquam, quæ sunt vnius dictorum solidorum vni descriptarum à, BC, figurarum & quæ sunt alterius, similes alteri descriptarũ figurarum.

COROLLARIVM II.

VNde solida similaria, sed non ad inuicem, genita ex. g. à figuris, ABC, DEF, iuxta regulas, BC, EF, quæ duas figuras planas dissimiles descripserint, quibus sint similes figuræ, quæ dicuntur omnia plana dictorum similarium solidorum, erũt ad inuicem, vt ipsæ figuræ dissimiles descriptæ ab ipsis, BC, EF, nam solidum similare genitum ex, DEF, iuxta regulam, EF, ad sibi simi-

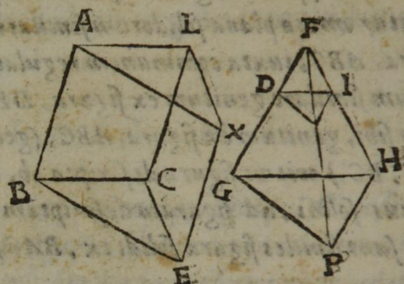
ſimilare genitum ex figura, ABC, iuxta regulam, BC, erit vt figura deſcripta ab, EF, ad ſibi ſimilem figuram deſcriptam à, BC. item ſolidum hoc ſimilare genitũ ex figura, ABC, iuxta regulam, BC, ad ſolidum ſimilare, ſed non ſibi, genitum ex eadem figura iuxta eandem regulam, BC, erit vt figura deſcripta à, BC, ſimilis deſcriptæ ab, EF, ad figuram ſibi diſsimilem deſcriptam ab eadem, BC, (quibus figuris diſsimilibus ſint ſimiles figuræ, quæ dicuntur omnia plana ſolidorum ſimilarium genitorum ex eadem figura, ABC, iuxta communem regulam, BC,) ergo, ex æquali ſolidum ſimilare genitum ex figura, DEF, ad ſolidum ſimilare, ſed non ſibi, genitum ex figura, ABC, (genita intellige iuxta regulas, EF, BC,) erit vt figura deſcripta ab, EF, cui ſunt ſimiles figuræ huius ſolidi, ad figuram deſcriptam à, BC, prædictæ diſsimilem, cui ſunt ſimiles figuræ ſolidi ex, BAC, geniti iuxta regulam, BC.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

SOlida ſimilaria genita ex parallelogrammis iuxta regulam vnum eorumdem laterũ, ſunt cylindrici; & ſolida ſimilaria genita ex triãgulis iuxta regulam vnum eorũdem laterum, ſunt conici, quorum baſes erunt figuræ à regulis deſcriptæ,& latera, eorũdem parallelogrammorum, vel triangulorum latera regulis inſiſtentia.

Sit ergo expoſitum quodcumq; parallelogrammũ, AC, & triangulum, FGH, in quibus pro regulis ſumantur latera, BC, GH. Dico ſolidum quodcumq; ſimilare genitum ex parallelogrammo, AC, (iuxta regulam, BC,) eſſe cylindricum, cuius baſis erit à, BC, deſcripta figura, & latus, vtrumuis ipſorũ, AB, LC, laterum regulæ,BC, inſiſtentium; Et genitum ex triangulo,FGH,iuxta regulam,GH,eſſe conicum, cuius baſis erit à, GH, deſcripta figura, & latus v-

trumuis duorum, FG, FH, regulæ, GH, insistentium. Describantur à regulis, BC, GH, figuræ vtcunq; planæ, BCE, GHP, æqualiter inclinatæ planis, AC, FGH, deinde per circuitum figuræ, BCE, feratur latus, AB, cui sit æquale latus, EX, quodq; puncto, A, describat circuitum figuræ, AXL, & per circuitum figuræ, GHP, feratur vtrumuis laterum, FG, FH, indefinitè productũ versus figurã, GHP, cuius portio inter, F, & punctum, P, sit, FP, erit ergo solidũ quod clauditur superficie cylindrica, descripta latere, AB, & duabus figuris, ALX, BCE, cylindricus; & quod clauditur superficie conica descripta altero laterum, FG, FH, indefinitè producto, & figura, GHP, erit conicus. Dico autem solidum similare genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, cuius omnia plana sint omnes figuræ ipsius, AC, similes figuræ, BCE, esse hunc cylindricum, ACE, nam quælibet earum, quæ dicuntur omnes figuræ similes parallelogrammi, AC, regula, BC, similes inquam figuræ, BCE, est etiam similiter posita, ac, BCE, descripta latere homologo ipsi, BC, igitur eius perimeter erit in superficie cylindrica descriptu latere, AB, si enim aliquid eius esset intra, vel extra illam superficiem, aliquid eius esset intra, vel extra communem sectionem talis assumptæ figuræ, & superficiei cylindricæ, talis autem communis sectio est perimeter figuræ similis, & similiter positæ, ac, BCE, (quia si cylindricus plano secetur basi æquidistante concepta figura erit similis, & similiter posita, ac basis) ergo haberemus duas figuras ab eodem latere homologo descriptas, similes æquales, & similiter positas, & non congruentes, quod est absurdum, congruent igitur,



Ex def. 3. & 4. l. 1.

A. def. 8. huius.

Corol. 12. l. 1.

Corol. 25. l. 1.

igitur, erit ergo assumpta figura, quæ est vna earum, quæ dicuntur omnes figuræ parallelogrammi, AC, similes ipsi, BCE, regula, BC, & est vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana solidi similaris geniti ex, AC, iuxta regulam, BC, erit, inquam, assumpta figura etiam vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana cylindrici, ACE, regula, BCE, quod etiam de cæteris simili modo ostendetur, ergo solidum similare genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, & cylindricus, ACE, habebunt omnia plana (regula, BCE, assumpta) communia, ergo solidum similare genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, erit idem cylindrico, ACE, cuius basis est figura, BCE, & latus alterum laterum, AB, LC. Similiter ostendemus solidum similare genitum ex triangulo, FGH, iuxta regulam, GH, esse idem conico, FGHP, cuius latus alterum laterum, FG, FH, & basis est figura, GHP, consimili via supradictæ procedentes, quæ erant demonstranda.

COROLLARIVM I.

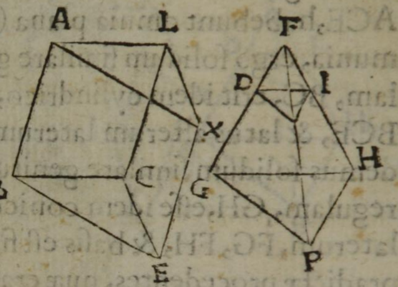
HInc manifestum est, si figuræ descriptæ à, BC, GH, sint circuli, quod solidum similare genitum ex, AC, erit cylindrus, & genitum ex triangulo, FGH, conus siue recti, siue scaleni; si verò descriptæ figuræ sint rectilineæ, genitum ex, AC, erit prisma, ex, FGH, autem pyramis, siue recta, siue scalena cætera autem nomine communi vocantur solida similaria genita ex eisdẽ fig. iuxta regulas, intellige, BC, GH.

COROLLARIVM II.

SI intra triangulum, FGH, ducamus ipsi, GH, parallelam vtcunq;, quæ sit, DI, abscindens à triangulo, FGH, trapezium, DH, ostendemus eodem modo, quo supra, solidum similare genitum ex trapezio, DH, iuxta regulam, GH, esse frustum solidi similaris geniti ex triangulo, FGH, iuxta eandem regulam, idest frustum conici, FGHP, .i. coni, cum figura descripta à, GH, est circulus, vel frustum pyramidis rectæ, siue scalenæ, cum illa est figura rectilinea, quæ facilè ostendentur. B defin 4. l. 1.

COROLLARIUM III.

TAndem patet vice versa, si quiuis cylindricus, vel conicus, vel eius frustum, intelligatur secari per latera, de illo plano secante
13 l. 1. *conceptam in secto solido figuram esse genitricem earumdem per descri-*
2 .& Cor. l. 1. *ptionem similium figurarum, & ipsa esse solida similaria genita ex eisdem figuris genitricibus iuxta regulas cõmunes sectiones planorum secantium, & basium, quæ figuræ genitrices in cylindricis erunt parallelogramma in conicis triangu-*
Cor 6 l. 1. 16 l. 1. *la, & in frustis conicis trapezia; igitur verum est quodlibet solidum similare genitum ex parallelogrammo iuxta regulam vnum laterum esse cylindricum, & genitũ ex triangulo iuxta regulam vnũ laterum esse conicũ, & ex trapezio esse frustum conicum; & vice versa, quemlibet cylindrum esse solidum similare genitum ex parallelogrammo in ipso producto per planum per latera ductum, genitum inquam iuxta communem sectionem eius, & basis cylindrici; & quemlibet conicum esse solidum similare genitum ex triangulo in eodem producto per traiectionem plani per latera, genitum, inquam iuxta communem sectionem eius, & basis dicti conici; & quodlibet frustum conicum esse solidum similare genitum ex trapezio in ipso producto per traiectionem plani per latera eius dicti frusti, genitum inquam iuxta regulam communem sectionem eius, & vnius basium eiusdem: Siue ergo, exposito parallelogrammo, & triãgulo intellexeris iuxta diff. 8. huius, describi omnes figuras similes eis quæ describuntur à basibus dicti parallelogrammi, & trianguli, & sic conceperis effici solidum, cuius illæ sunt omnia plana; siue intellexeris latus*



Diff 3. & 4. l. 1. *dicti parallelogrammi, vel trianguli indefinitè productum reuolui per circuitum figurarum à basibus descriptarum, vt habeas solidum dicta superficie descripta, & basi, vel basibus comprehensum, idem vtroque modo tibi obuenit solidũ, potest autem prior vocari generatio solidorum per descriptionem figurarum; posterior autem, generatio solidorum per reuolutionem facta, quã maioris dilucidationis gratia hic apposui, vt ex hac declaratione aliqualiter pateat, in plurimis etiam alijs vtramq; ge-*

nera

nerationem ritè nos imaginari posse, vt in sphæra, sphæroide, & conoidibus, & eiusdem frustis, & alijs quamplurimis, vt suo loco animaduertetur.

A. COROLLARII IV. GENERALIS SECTIO I.

ET quoniam, vt ostensum est Prop. 33. huius Libri, vt omnia quadrata duarum figurarum inter se sumpta cũ datis regulis, ita sunt solida similaria genita ex ijsdem figuris iuxta easdem regulas, ideò cum in Propositionibus huius Libri inuenta est ratio omnium quadratorũ parallelogrammorum, vel triangulorum, vel trapeziorum, regulis eorum lateribus, eandem rationem compertemus habere solida similaria genita ex parallelogrammis, idest cylindricos, vel ex triangulis, idest conicos, vel ex trapezijs, idest frusta conica, genita inquam iuxta easdem regulas, quæ amplius dilucidabimus singula, quæ opportuna fuerint, Theoremata denuò assumentes.

B. SECTIO II.

IN Prop. 9. igitur expofita denuò eius figura, intelligantur bases, GM, MH, describere similes figuras planas, quæ sint, GIMR, MTHS, vt eorum lineæ, vel latera homologa, æquè erectas planis, AM, MC, & in ijs, tanquam in basibus consistere cylindricos, AM, BH, quorum latera sint, AG, CH, erunt igitur hi cylindrici solida similaria genita ex parallelogrammis, AM, MC, iuxta regulas, GM, MH, igitur erunt, vt omnia quadrata eorundem regulis eisdem, GM, MH, sunt autem omnia eorũ quadrata, vt quadrata basium, GM, MH, ergo cylindrici, AM, MC, erunt vt quadrata basium, GM, MH, i. vt figuræ similes, GIMR, MSHT, igitur cylindrici in eadem altitudine, & similibus basibus insistentes sunt, vt ipsæ bases.



Coroll. 3. ant.

9 huius.

C. SECTIO III.

IN Prop. 10. consimiliter procedentes colligemus, cylindricos in eadem, vel æqualibus, ac similibus basibus consistentes esse, vt altitudines, vel vt latera aqualiter eorundem basibus inclinata.

D. SECTIO IV.

IN Propos. 11. deducemus cylindricos similibus basibus insistentes habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum æqualiter dictis basibus inclinatorum.

E. SECTIO V.

IN Prop. 12. colligemus cylindricos, quorum similes bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocè respondent, esse æquales; & cylindricos æquales, similibus basibus insistentes, bases habere altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas.

F. SECTIO VI.

IN Prop. 13. habebimus similes cylindricos esse in tripla ratione laterum homologorum.

G. SECTIO VII.

EX Prop. 14. colligimus si prædicti cylindrici insistant basibus dissimilibus, adhuc prædictas passiones de ipsis verificari; in quibus tamen non numerantur similes cylindrici, cum oporteat eosdem similes bases habere.

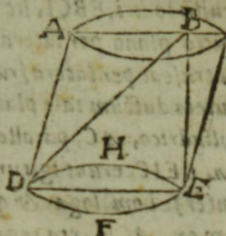
H. SECTIO VIII.

IN Prop. 22. habemus in eius figura, solida similaria genita ex parallelogrammis, AS, Tβ, iuxta regulas, ES, Zβ, eandem rationem habere ad solida similaria genita ex triangulis, OES, & Zβ, idest cylindricos genitos ex, AS, Tβ ad conicos genitos ex triangulis, OES, & Zβ, eandem rationem habere, vnde, cum conici sint partes proportionales cylindricorum in eadem altitudine cum ipsis existentium, quæcunq; de cylindricis in huius Coroll. Sectionibus 2. 3. 4. 5. 6. & 7. collecta sunt, eadem & pro conicis tamquam collecta recipiemus.

Ex hac ꝓpos.

I. SECTIO IX.

IN Prop. 24. habemus quemcumq; cylindricum esse triplum conici in eadem basi, & altitudine cum ipso. Sit expositus quicunque cylindricus, AE, in basi, DHEF, in eadem autem basi, & altitudine sit conicus, DBE, sic tamen basi insistens, vt ducto plano per latera conici, idem transeat per latera cylindrici, AE, sit autem ductum tale planum, quod faciat in conico, DBE, triangulũ, DBE, & in cylindrico, AE, parallelogrammum, AE, erunt igitur, AE, & triangulũ, DBE, genitrices figuræ eorumdem solidorum, quæ similaria ad inuicem vocantur, genita iuxta communem regulam, DE, quod ergo gignitur ex, AE, ad genitum ex triangulo, DBE erit vt omnia quadrata, AE, ad omnia quadrata trianguli, DBE, regula, DE, idest triplum, solidum verò similare genitum ex, AE, iuxta regulam, DE, cuius figuræ sint similes figuræ, DFEH, est cylindricus, AE, & solidum similare genitum ex triangulo, DBE, iuxta regulam, DE, cuius figuræ sint similes pariter figuræ, DFEH, est conicus, DBE, ergo cylindricus, AE, triplus erit conici, DBE, & consequenter triplus erit cuiusuis alij in eadem basi, DFEH, & altitudine, cum conico, DBE, existentis, quoniam vt ostensum est, conici in eadem altitudine stãtes sunt, vt bases, vnde cum bases sunt æquales, & conici sunt æquales, verum ergo est, quod proponebatur.



Cor. 6. & 16. l. 1.

Coroll. 3. 34. huius.

24. huius.

34. huius.

Per B. Corol. 27. huius.

K. SECTIO X.

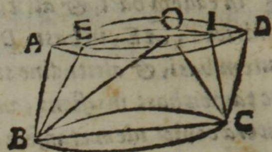
IN Prop. 27. habemus solida ad inuicem similaria genita ex trapezijs in eadem basi (quæ sit vnum laterum æquidistantium) & altitudine constitutis, quorum opposita bases sint æquales, genita, inquam, iuxta communem regulam ipsam basim, idest frusta conicorum quorum oppositæ bases sunt figuræ descriptæ à lateribus dictorum trapeziorum æquidistantibus, esse æqualia.

L. SECTIO XI.

IN Prop. 28. habetur cylindricum in eadem basi, & altitudine cum frusto conici constitutum, ad idem, esse (sumptis duabus homologis

inop-

in oppositis frusti conici basibus) vt quadratum maioris dictarũ homologarum ad rectãgulum sub dictis homologis vna cum $\frac{1}{3}$*. quadrati differentiæ earumdem homologarum. Sit cylindricus, AC, in basi figura quacumq; plana, BC, in eadem autem basi, & altitudine sit frustũ conici, EBCI, sic tamen se habens, vt ducto plano per latera cylindrici, AC, idem trãseat per latera frusti conici, BEIC, sit autem ductum tale planum, quod faciat in cylindrico, AC, parallelogrammum, AC, & in frusto, BEIC, trapezium, BEIC, erunt igitur rectæ BC, EI, lineæ oppositarum basium frusti inter se homologæ, & quia cylindricus, AC, est solidum similare genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, & frustum EBCI, est solidum prædicto similare genitum ex trapezio, EBCI, sunt autem hæc solida similaria, vt omnia eorumdem quadrata, & omnia quadrata, AC, regula, BC, ad omnia quadrata trapezij, EBCI, regula eadem sunt, vt quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, EI, vna cum* $\frac{1}{3}$*. quadrati differentiæ earumdem, ergo cylindricus, AC, ad frustum conicum, EBCI, & ad quoduis aliud in eadem basi, & altitudine cum hoc constitutũ (quoniam existet huic æquale) erit vt quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, EI, vna cum* $\frac{1}{3}$*. quadrati differentiæ earumdem, BC, EI, quæ sunt duarum oppositarum basium, EI, BC, homologæ vtcumq; sumptæ, nam planum eadem solida secans ductum est vtcumque, dummodo per eorumdem latera transeat.*



Corol. 21. l. 1.
Coroll. 3. 34. huius
33. huius
27. huius
K. huius Cor. gen.
Corol. 21. l. 1.

M. SECTIO XII.

Hinc patet si in eadem basi, BC, figura, fuerit conicus, & eadem altitudine cum frusto, idest cum cylindrico, AC, qui sit conicus, BOC, quod hic erit $\frac{1}{3}$*. cylindrici, AC, & ideò ad frustum, EBCI, erit vt* $\frac{1}{3}$*. quadrati, BC, ad rectangulum sub, BC, EI, vna cum* $\frac{1}{3}$*. quadrati differentiæ, BC, EI, idest vt totum quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, & tripla, EI, vna cum toto quadrato differentiæ earũdem, BC, EI. Vide igitur quam sit amplior hæc demonstratio ea, qua alij ostenderunt cylindrum esse triplum coni, & prisma piramidis in eadem basi, & altitudine cum ipso constitutæ, nam ad tot varia solida hæc se extendit, quot sunt figurarum planarũ variationes, quæ nullo assignato coarctantur numero, cuius modi demonstrationis vniuersalitatem in alijs figuris*

I. huius Cor. gen.

quoq;

quoque in posterum considerandis prosequemur, vt amplius infra patebit,

N. SECTIO XIII.

IN Prop. 29. & eius Corollario tandem edocemur solida similaria genita ex parallelogrammo, vel triangulo eodem, iuxta duas regulas latera angulum continentia, idest cylindricos ab eodem parallelogrammo, & conicos ab eodem triangulo genitos, iuxta dictas regulas, esse inter se, vt easdem regulas.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXV.

PArallelepipedum sub basi rectangulo quodam, altitudine autem quadam recta linea æquatur parallelepipedis sub basi eodem rectangulo,& sub quotcumq; partibus,in quas altitudo vtcumq; diuidi potest. Et si rectangulum, quod est basis, intelligatur vtcumq; diuisum in quotcumq; rectangula, dictum parallelepipedum ęquatur parallelepipedis sub singulis partibus altitudinis, & singulis partibus basis.

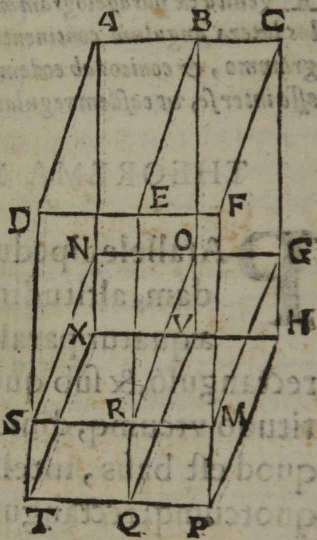
Sit parallelepipedum rectangulum, AP, cuius basis rectangulum, TH, supponatur pro nunc indiuisa, & altitudo, DT, diuisa vtcumque in quotcumque partes, DS, ST. Dico parallelepipedum, AP, æquari parallelepipedis sub, DS, TH, & sub, ST, TH. Ducatur per, S, planum æquidistans basi, TH, quod in eo producet rectangulum, vt, SG, sunt igitur, AM, NP, parallelepipeda, &, AM, est sub, DS, SG, vel, TH, (quia, SG, TH, sunt figuræ similes, & æquales) NP, verò sub, ST, TH, continetur, est autem parallelepipedum, AP, contentum sub, DT, TH, æquale pa- Corol. 11. l. 1. Corol. 12. l. 1.

rallelepipedis, AM, NP, suis partibus simul sumptis, ergo parallelepipedum sub, DT, TH, æquatur parallelepipedis sub, DS, TH, & sub, ST, TH.

Sit nunc basis, TH, diuisa vtcumq; in quotcumq; rectangula, TV, VP. Dico parallelepipedum sub, DT, TH, æquari parallelepipedis sub, DS, TV, sub, DS, VP, sub, ST, TV, & sub, ST, VP. Ducatur per rectam, QV, planum æquidistans planis, DX, FH, quod producat in parallelepipedo, AP, rectangulum, EV, in parallelepipedo, AM, rectangulum, EO, & in parallelepipedo, NP, rectangulum, RV, per planũ igitur, EV, diuiduntur parallelepipeda, AM, NP, in parallepipeda, AR, BM, NQ, OP, est autem totum parallelepipedum, AP, ęquale parallelepipedis, AR, BM, NQ, OP, & est parallelepipedum, AR, sub, DS, SO, idest sub, DS, TV, & parallelepipedum, BM, sub, ER, RG, hoc est sub, DS, QH, & parallelepipedum, NQ, est sub, ST, TV, &, OP, est sub, RQ, QH, hoc est sub, ST, QH, ergo parallelepipedum, AP, idest sub, DT, TH, est æquale parallelepipedis sub, DS, &, TV, & sub, DS, VP, & sub, ST, TV, & sub, ST, QH, idest parallelepipedis sub singulis partibus altitudinis, & singulis partibus basis contentis.

Corol. 6. li 1.

10. l. 1.



SCHOLIVM.

Contineri autem parallelepipedum voco sub tribus rectis eiusdem angulum solidum continentibus, quarum dua qualibet re-

rectum angulum constituunt, siue sub earum quauis, & parallelogrammo rectangulo sub reliquis duabus; ita vt, cum dico parallelepipedum sub tali recta linea, & tali rectangulo, siue sub talibus tribus rectis lineis, intelligam illud parallelepipedum habere angulum solidum rectis angulis constitutum, veluti in istis Theorematibus ipsum assumo, igitur patet nos ex tribus rectis parallelepipedum continentibus quamlibet posse pro altitudine sumere, & rectangulum sub reliquis duabus pro basi.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXVI.

SI recta linea in vno puncto secta sit vtcumq; parallelepipedum sub tota linea, & quadrato vnius factarum partium erit æquale parallelepipedo sub tali parte, & rectangulo totius in talem partem ductæ. Idem autem parallelepipedum sub tota, & talis partis quadrato, erit æquale parallelepipedo sub reliqua, & quadrato talis partis, vna cum cubo eiusdem partis.

Sit ergo recta linea, AC, vtcumq; secta in, B, dico parallelepipedum sub, AC, & quadrato, CB, æquari parallelepipedo sub, BC, & rectangulo, BCA, hoc autem patet ex superiori Scholio, nam parallelepipedum sub, AC, & quadrato, CB, continetur sub tribus his rectis lineis, nempè, AC, & duabus, CB, & ideò idem continetur sub, CB, & rectangulo, ACB, siue est æquale contento sub, BC, & rectangulo, ACB.

A B C

Dico insuper parallelepipedum sub, AC, & quadrato, CB, æquari parallelepipedo sub, AB, & quadrato, CB, vna cum cubo, CB, quod patet nam parallelepipedum sub diuisa altitudine, AC, & indiuisa basi, nempè quadrato, CB, Ex ant.

æquatur parallelepipedis ſub partibus ſingulis, & baſi, ſcilicet ſub, AB, & quadrato, BC, & ſub, BC, & quadrato, BC, ideſt cubo, BC, quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVII.

SI recta linea in vno puncto ſecta ſit vtcumq;, cubus totius æquabitur parallelepipedis ſub partibus, & quadrato eiuſdem. Idem etiam erit æquale parallelepipedis ſub tota, & partibus quadrati totius per talem diuiſionem factis, ideſt parallelepipedis ſub tota, & quadratis partium, & rectangulo ſub partibus bis contento.

Sit recta linea, AC, vtcumq; ſecta in, B, dico cubũ, AC, æquari parallelepipedis ſub partibus, AB, BC, & quadrato totius, quod patet nam cubus, AC, ideſt
35. huius parallelepipedum ſub diuiſa, AC, & indiuiſa baſi quadrato, AC, eſt æquale parallelepipedis ſub partibus, AB, BC, eiuſdem, AC, diuiſæ, & ſub eadem baſi quadrato, AC.

A B C

Dico etiam cubum, AC, æquari parallelepipedis ſub, AC, & quadrato, AB, quadrato, BC, & rectangulo bis ſub, ABC, nam cubus, AC, ideſt parallelepipedum ſub indiuiſa
35. huius altitudine, AC, & diuiſa baſi in dicta quattuor ſpatia, æquatur parallelepipedis ſub eadem indiuiſa altitudine, AC, & ſub dictis baſis partibus, nempè ſub quadrato, AB, quadrato, BC, & rectangulo bis ſub, ABC, quod erat oſtendendũ.

COROLLARIVM.

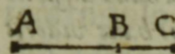
HInc patet cubum totius, AC, æquari parallelepipedis ſub ſingulis partibus ipſius, AC, & ſingulis partibus quadrati, AC, quod etiam patet ex Theoremate 35.

THEO-

THEOREMA XXXVIII. PROP. XXXVIII.

SI recta linea in vno puncto secta sit vtcumq;, cubus totius æquatur cubis partiũ, vna cum parallelepipedis ter sub qualibet partium, & quadrato reliquæ. Vel æquatur cubis partiũ vna cum tribus parallelepipedis, sub tota, & eiusdem partibus contentis.

Sit recta linea, AC, vtcumq; secta in puncto, B. Dico cubum, AC, æquari cubis, AB, BC, & parallelepipedis ter sub, AB, & quadrato, BC, & ter sub, BC, & quadrato, AB. Nam parallelepipedum sub, AC, & quadrato, AC,



(qui est cubus, AC,) æquatur parallelepipedis sub singulis partibus ipsius, AC, & sub singulis partibus quadrati, AC, ab hac diuisione prouenietibus, idest parallelepipedo sub, AB, & quadrato, AB, qui est cubus, AB, item sub, AB, & quadrato, BC, item sub, AB, & rectangulo, ABC, bis, idest sub, CB, & quadrato, BA, bis sumpto, habemus ergo vnum cubum, AB, vnum parallelepipedum sub, AB, & quadrato, BC, & duo sub, BC, & quadrato, BA; transeamus nunc ad aliam partem, BC, remanent ergo parallelepipeda sub, BC, & quadrato, BC, idest vnus cubus, BC, item sub, CB, & quadrato, AB, & tandem sub, CB & rectangulo, CBA, bis, idest sub, AB, & quadrato, BC, bis, si igitur hæc posteriora parallelepipeda prioribus iũxeris habebis cubum, AB, cubum, BC, parallelepipedum ter sub, AB, & quadrato, BC, & ter sub, BC, & quadrato, BA, quibus æquale erit parallelepipedum sub, CA, & quadrato, CA, idest cubus, CA. Quia verò parallelepipedũ sub, CB, & quadrato, BA, idest sub, AB, & rectangulo, ABC, cum parallelepipedo sub, AB, & quadrato, BC, idest sub, CB, & rectangulo, ABC, æqua-

Ex Corol. ant. vel ex 35. huius.

36. huius pars 1.

36. huius pars 1.

tur, ex 35. huius, parallelepipedo ſub tota, AC, & rectangulo ſub partibus, AB, BC, ideò dicta ſex parallelepipeda tribus ſub tota, AC, & partibus eiuſdem, AB, BC, æqualia erunt, quod demonſtrare propoſitum fuit.

SCHOLIVM.

Quoniam poſterior pars Prop. antec. addita fuit poſt impreſſionem Lib. 3. 4. & 5. ideò ne mireris, benigne Lector, ſi in eiſdem aliquando Propoſitiones offenderis nonnihil prolixiores, quam ſi per hanc poſteriorem partem fuiſſent demonſtratæ, cum illæ ex priori parte tunc deductæ fuerint, quod ſolerti Geometræ haud difficile erit in illis propoſitionibus animaduertere, in quibus hanc viderit adhiberi.

THEOREMA XXXIX. PROP. XXXIX.

SI recta linea bifariam, & non bifariam ſecta fuerit, parallelepipedum ſub medietate propoſitæ lineæ, & ſub rectangulo inæqualibus partibus contento, cum parallelepipedo ſub eadem medietate, & ſub quadrato ſectionibus intermediæ, æquabitur cubo eiuſdem medietatis propoſitæ lineæ.

Sit recta linea, AE, bifariam diuiſa in, B, non bifariam in C. Dico parallelepipedum ſub, BE, & rectangulo, ACE, vna cum parallelepipedo ſub, BE, & ſub quadrato, BC, cubo eiuſdem, BE, æquale eſſe; Nam

5. Secundi Elem. 3. huius. rectangulum, ACE, cum quadrato, BC, quadrato, BE, eſt æquale, vt autem rectangulum, ACE, cum quadrato, BC, ad quadratum, BE, ita (ſumpta communi altitudine, BE,)

pa-

parallelepipedum ſub, BE, & rectangulo, ACE, & ſub, BE, & quadrato, BC, ad parallelepipedum ſub, BE, & quadrato, BE, ideſt ad cubum, BE, ergo parallelepipedum ſub, EB, & ſub rectangulo, ACE, vna cum parallelepipedo ſub eadem, EB, & ſub quadrato, BC, erit æquale cubo, EB, quod oſtendendum erat.

THEOREMA XL. PROPOS. XL.

SI recta linea bifariam ſecta fuerit, & illi in directum adiuncta quæuis recta linea; parallelepipedum ſub compoſita ex dimidia propoſitæ, & ex adiuncta linea, & ſub rectangulo ſub compoſita ex tota, & adiuncta, & ſub adiuncta, vna cum parallelepipedo ſub compoſita ex eadem propoſitæ medietate, & ex adiuncta, & ſub quadrato eiuſdem medietatis, æquabitur cubo compoſitæ ex dicta medietate, & adiuncta.

Sit recta linea propoſita, AC, biſariam in, B, diuiſa, cui in directum ſit adiuncta vtcumque, CE. Dico parallelepipedum ſub, BE, & rectangulo, AEC, vna cum parallelepipedo ſub, BE, & quadrato, BC, æquari cubo ipſius, BE. Nam rectangulum, AEC, cum quadrato, CB, æquatur quadrato, BE, igitur ſumpta communi altitudine, BE, parallelepipedum ſub, BE, & rectangulo, AEC, vna cum parallelepipedo ſub, BE, & quadrato, BC, æquabitur parallelepipedo ſub, BE, & quadrato, BE, ideſt cubo, BE, quod erat oſtendendum.

6 Secundi Elem.

5. huius.

COROLLARIVM.

EX methodo in ſuperioribus demonſtrationibus adhibita manifeſtum eſt nos ſimiliter cæteras Propoſitiones ſecundi Ele-

men-

mentorum demonstrare posse, in quibus linea secta in vno, vel pluribus punctis consideratur, ad parallelepipeda eadem traducentes, nam si super spatia in illis considerata intelligantur constitui æquè alta parallelepipeda, erunt illa, vt ipsæ bases, propterea quæ ibi de basibus demonstrantur, de parallelepipedis æquè altis eisdem basibus insistentibus rectè colligi possunt, quæ ob claritatem, & facilitatem à me relinquuntur.

THEOREMA XLI. PROPOS. XLI.

PArallelepipedum, quod sub tribus rectis lineis proportionalibus continetur, æquale est cubo mediæ.

Hæc manifesta est, nam habebunt bases ipsis altitudinibus reciprocas, quod etiam vniuersalius ostenditur Vndecimo Elementorum Prop. 36.

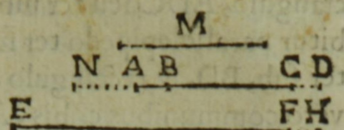
THEOREMA XLII. PROPOS. XLII.

DAta recta linea terminata, vtcumque in puncto diuisa, possibile est ipsam ad alteram eiusdem partium ita producere, vt cubus compositæ ex proposita linea, & adiuncta, sit æqualis cubo propositæ lineæ, simul cum cubo compositæ ex adiecta, & illi conterminante portione sectæ lineæ.

Sit data recta linea, AC, terminata, diuisaq; vtcumq; in puncto, B, ostendendum est possibile esse ipsam ita producere ad alteram illius partium, vt ad, C, vt cubus compositæ ex, AC, & adiecta, sit æqualis cubo, AC, cum cubo compositæ ex eadem adiecta, & ex, BC, portione, AC, adiectæ conterminante. Producatur ergo, CA, ad partes, A, vt in,

N, ita

N, ita quod, NB, sit tripla, BA, fiat deinde, vt, NB, ad, BC, ita quadratum, BC, ad quadratũ rectæ lineæ, M, seorsim positæ: Vlterius exponatur recta, EF,



æqualis compositæ ex, AC, CB, cui applicetur rectãgulum æquale quadrato, M, excedens figura quadrata, cuius latus sit, FH, producatur autem, AC, versus, C, vt in, D, ita, nempè, vt, CD, sit æqualis, FH. Dico cubum totius, AD, æquari duobus cubis, AC, BD. Cum .n. sit, vt, NB, ad, BC, ita quadratum, BC, ad quadratum, M, ideò parallelepipedum sub altitudine, AB, (quæ est $\frac{1}{3}$. prædictæ altitudinis, NB,) & quadrato, M, æquabitur tertiæ parti cubi, BC. Quoniam verò quadratum, M, æquatur rectangulo, EHF, idest rectangulo sub composita ex, AD, BC, & sub, CD, ideò parallelepipedum sub altitudine, AB, & basi rectãgulo sub composita ex, AD, BC, & sub, DC, æquabitur tertiæ parti cubi, BC, addatur commune parallelepipedum sub, BC, & basi rectangulo, BDC, erit ex vna parte hoc parallelepipedum cum $\frac{1}{3}$. cubi, BC, ex alia verò hæc summa; scilicet parallelepipedum sub, AB, & sub rectangulo sub composita ex, AD, BC, & sub, DC, vna cum parallelepipedo sub, BC, & rectangulo, BDC, quæ quidem summa efficit parallelepipedum sub, AC, & rectangulo, ADC, iam .n. habemus parallelepipedum sub, AB, & rectangulo, ADC, & sub, AB, & rectangulo, BCD, .i. sub, BC, & rectãgulo sub, AB, CD, cui si iunxeris parallelepipedum sub, BC, & rectãgulo sub, BD, DC, componetur parallelepipedum sub, BC, & rectãgulo, ADC, quod additum parallelepipedo sub, AB, & eodem rectangulo, ADC, componet parallelepipedum sub, AC, & rectangulo, ADC, quod quidem æquale erit alteri summæ prædictæ, nẽpè parallelepipedo sub, BC, & rectangulo sub, BD, DC, vna cum $\frac{1}{3}$. cubi, BC, ergo & eorum tripla æqualia erunt .s. parallelepipedum ter sub, AC, & re-

29 Sex. Elem.

E. Cor. 4. gener. 34. huius.

35. huius.

ctan-

Schol. 35. huius. ctangulo, ADC, seu ter sub, AD, & rectãgulo, ACD, æquabitur parallelepipedo ter sub, BC, & rectangulo, BDC, seu ter sub, BD, & rectangulo, BCD, cum cubo, BC, additis verò communibus cubis, AC, CD, fiet parallelepipedum
38 huius. ter sub, AD, & rectangulo, ACD, cum cubis, AC, CD, idest totus cubus, AD, æqualis parallelepipedo ter sub, BD, &
38. huius. rectangulo, BCD, cum cubis, BC, CD, (quæ integrant cubum, BD,) & cum cubo, AC, est igitur cubus, AD, æqualis duobus cubis, AC, BD. Possibile est ergo facere, quod propositum fuit.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si, AC, sit latus dati cubi, & sit etiam data recta linea, vt, AB, minor, AC, possibile esse inuenire duos cubos, vt, AD, DB, ita vt eorum differentia sit æqualis cubo dato, AC, & laterum cubicorum, AD, DB, scilicet, AB, pariter differentia sit data, est .n. cubus, AC, æqualis dictæ cuborũ, AD, DB, differentiæ, vt ostensum est. Cum verò similia solida quæcũq; sint in tripla ratione linearum, seu laterum homologorum eorumdem, ideò erunt, vt cubi ipsarum linearum, seu laterum homologorum, & ideò eandem rationem, quam habet cubus, AD, ad cubum, DB, habebit ex. g. Icosaedrum descriptum latere, AD, ad Icosaedrum descriptum latere, BD, prædicto homologo, & vt cubus, AD, ad cubum, AC, ita erit Icosaedrũ, AD, ad Icosaedrum, AC, necnon colligendo, vt cubus, AD, ad cubos, AC, BD, ita erit Icosaedrum, AD, ad Icosaedra, AC, BD, ergo Icosaedrum, AD, æquabitur Icosaedris, AC, BD, & superabit Icosaedrum, BD, Icosaedro, AC, ergo si datum fuisset Icosaedrum, AC, &, AB, recta linea ipsius latere minor, non dissimiliter, ac in cubis inuẽta essent Icosaedra, AD, DB, quorum differentia esset æqualis dato Icosaedro, AC, necnon eorumdem laterum homologorum differentia æqualis datæ rectæ lineæ, AB. Sic etiam data Sphæra Orbem datæ crassitiei, minoris tamen illius semidiametro, æqualem possibile erit

erit inuenire. Vniuersalissimè autem dato quocumq; solido, duorum ipsi dato similium differentiam æqualem possibile erit inueniri, quorum pariter linearum, seu laterum homologorum differentia sit data, dummodo ea sit minor linea, seu latere propositi solidi prædictis homologo, quod ex superius dictis facilè constare potest.

SCHOLIVM.

N*Onnulla autem ex præfatis proximis Propositionibus etiam ab alijs ostensæ fuerunt, sed ne Lectori ad alios Libros pro harum captu esset recurrendum, hic eas adiungere placuit, præcipuè cum earum adductæ demonstrationes ab aliorum Auctorum rationibus, ni fallor, non parum sint differentes, cum ferè omnes ex vnica Prop. 35. via satis compendiosa deductæ sint; quod olim me circa Propositiones Secundi Elem. à prima nempè vsq; ad 10. præstitisse memini, eas omnes ex prima compendiosissimè demonstrando, vt etiam postmodum, & Patrem Clauium fecisse animaduerti.*

Finis Secundi Libri.



GEOMETRIÆ CAVALERII.

LIBER TERTIVS.

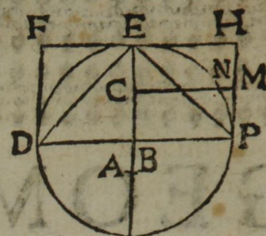
In quo de Circulo, & Ellipsi, ac Solidis ab eisdem genitis, traditur doctrina.

THEOREMA I. PROPOS. I.

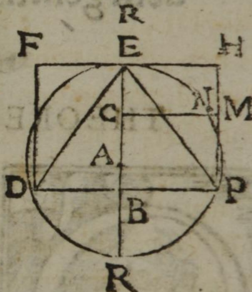


MNIA quadrata portionis Circuli, vel Ellipsis, ad omnia quadrata parallelogrāmi in eadem basi, & altitudine cum portione constituti, regula basi, erunt, vt composita ex sexta parte axis, vel diametri eiusdem, & dimidia reliquæ portionis, ad axim, vel diametrum reliquæ portionis: Eadem verò ad omnia quadrata trianguli in iisdem existentis erunt, vt composita ex dimidia totius, & reliquæ portionis axi, vel diametro, ad axim, vel diametrum reliquæ portionis.

SIT circulus, vel ellipsis, ED RP, cuius axis, vel diameter, ER, ad quem ordinatim applicetur, DP, abscindens vtcumque portionem, DEP, quæ sumatur quoque pro regula, & cẽtrum sit, A, ac parallelogrammum, FP, in eadem basi, DP, cum portione, & eadem altitudine; sint autem primò, DF, PH, latera parallelogrammi, FP, parallela ipsi, ER. Dico ergo omnia quadrata portionis, DEP, ad omnia quadrata parallelogrammi, FP, esse, vt composita ex sexta parte, EB, & dimidia, BR, ad ipsam, BR. Sumatur ergo intra, EB, vtcumq; punctum, C, & per, C, ducatur ipsi, DP, parallela, CM, secans curuam circuli, vel ellipsis, ED RP, in, N; Est igitur quadratum, BP, vel, MC, ad quadratũ, CN, vt rectangulum, RBE, ad rectangulum, RCE; est autem, EP, parallelogrammum in eadem basi, & altitudine, cum semiportione, EBP, regula est ipsa basis, &, CM, ducta vtcumq; parallela ipsi basi, repertũq; est quadratum, CM, ad quadratum, CN, esse vt rectangulum, RBE, ad rectangulum, RCE, ergo magnitudines horum quatuor ordinum erunt proportionales .f. omnia quadrata parallelogrammi, EP, magnitudines primi ordinis collectæ, iuxta primam, nempè iuxta quadratum, CM, ad omnia quadrata semiportionis, EBP, magnitudines secundi ordinis collectas, iuxta secundam .f. iuxta quadratum, CN, erunt vt rectangula sub maximis abscissarum,







Coroll. 3. 26 l. 2.

EB,

EB, & ſub adiunctis, BR, magnitudines tertij ordinis collectæ, iuxta tertiam .ſ. iuxta rectangulum, RBE, ad rectangula ſub omnibus abſciſſis, EB, & reſiduis earundem, adiuncta, BR, (recti, vel obliqui tranſitus ſupradictis exiſtentibus) quæ ſunt magnitudines quarti ordinis collectæ, iuxta quartam .ſ. iuxta rectangulum, RCE; quoniam verò rectangula ſub maximis abſciſſarũ, EB, & ſub adiunctis, BR, ad rectangula ſub omnibus abſciſſis, EB, adiuncta, BR, & ſub earum reſiduis, ſunt vt, BR, ad compoſitam ex dimidia, BR, & ſexta parte, EB, ergo conuertendo omnia quadrata ſemiportionis, BEP, ad omnia quadrata parallelogrammi, EP, vel iſtorum quadrupla .ſ. omnia quadrata portionis, DEP, ad omnia quadrata parallelogrammi, FP, erunt vt compoſita ex $\frac{1}{6}$, BE, & $\frac{1}{2}$, BR, ad eandem, BR; Iungantur nunc, DE, EP. Corol 30. l. 2. 8. l 2.

Dico vlterius omnia quadrata portionis, EDP, ad omnia quadrata trianguli, DEP, eſſe vt compoſita ex dimidia totius, ER, & ipſa, BR, ad eandem, BR. Cum enim oſtenderimus omnia quadrata parallelogrammi, FP, ad omnia quadrata portionis, DEP, eſſe vt, BR, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$, BR, & $\frac{1}{6}$, BE, ideò omnia quadrata trianguli, DEP, cũ ſint $\frac{1}{3}$, omnium quadratorum parallelogrammi, FP, erunt ad omnia quadrata portionis, DEP, vt $\frac{1}{3}$, RB, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$, RB, & $\frac{1}{6}$, BE, ideſt vt tota, RB, ad compoſitam ex $\frac{3}{2}$, RB, & $\frac{3}{6}$, BE, ſed $\frac{1}{2}$, RB, .ſ. $\frac{3}{6}$, RB, cum $\frac{3}{6}$, BE, conſtituunt $\frac{3}{6}$, integræ, ER, ſcilicet $\frac{1}{2}$, eiuſdem, ER, quæ ideò cum $\frac{2}{2}$, ipſius, BR, .ſ. cum, BR, ad ipſam, BR, erit, vt omnia quadrata (conuertendo) portionis, DEP, ad omnia quadrata trianguli, DEP. 24. l. 2.

Quoniam verò, ſi in parallelogrammi, vel trianguli dicti, baſi, DP, ſit parallelogrammum, vel triangulum, & in eadem altitudine, omnia quadrata dictorũ parallelogrammorum inter ſe æquantur, ſicut etiam omnia quadrata triangulorum, regula eorundem baſi, ideò oſtenſum eſt 9. l. 2. per B. Coro. 22. l. 2.

omnia quadrata portionis, DEP, ad omnia quadrata parallelogrammi in eadem basi, & altitudine cum ipsa constituti esse, vt composita ex $\frac{1}{6}$, BE, & $\frac{1}{2}$, BR, ad eandem, BR, ad omnia verò quadrata trianguli in ijsdem positi, vt composita ex, BR, & dimidia, RE, ad ipsam, BR, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM.

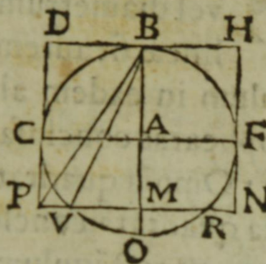
HINC patet in figura, in qua basis portionis constituta per centrum circuli, vel ellipsis transeat, quoniam omnia quadrata parallelogrãmi, FP, ad omnia quadrata portionis, DEP, sunt vt, AR, ad cõpositam ex $\frac{1}{2}$, AR, & $\frac{1}{6}$, AE, scilicet $\frac{1}{6}$, AR, quia, EA, est aqualis ipsi, AR, $\frac{1}{2}$, AR, autem, & $\frac{1}{6}$, AR, constituũt $\frac{4}{6}$, vel $\frac{2}{3}$, ipsius, AR, ideò omnia quadrata parallelogrammi, FP, esse ad omnia quadrata portionis, DEP, vt, AR, ad $\frac{2}{3}$, AR, idest
24. l. 2. *esse eorundem sexquialtera; quia verò omnia quadrata trianguli, DEP, sunt $\frac{1}{3}$. omnium quadratorum parallelogrammi, FP, ideò omnia quadrata trianguli, DEP, ad omnia quadrata portionis, DEP, sunt vt 1. ad 2. & conuertendo omnia quadrata portionis, DEP, sunt dupla omnium quadratorum trianguli, DEP, & subsexquialtera omnium quadratorum parallelogrammi, FP, dummodo in eadem basi, & altitudine cum portione sint constituti parallelogrammum, & triangulum, vt paulò supra in fine demonstrationis subiunximus.*

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI à circulo, vel ellipsi per lineam ad eorum axim, vel diametrum ordinatim applicatam vtcunq; portio abscindatur, sit autem parallelogrãmum in eadem altitudine cum dicta portione, sed in basi æquali secundæ diametro, & re-

gula basis ipsius portionis: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata dictæ portionis erunt, vt rectangulum sub dimidia eiusdem axis, vel diametri, & sub eiusdem dimidiæ tripla, ad rectangulũ sub axi, vel diametro abscissæ portionis, & sub composita ex axe, vel diametro reliquę portionis, & dimidia totius axis, vel diametri.

SIT igitur circulus, vel ellipsis, BVOR, eius axis, vel diameter, BO, ordinatim ad ipsum applicata, VR, vtcumq; abscindens portionem, VBR, sit verò secunda diameter, CF, & producta, VR, ita vt, PN, sit æqualis ipsi, CF, &, PM, ipsi, CA, in basi, PN, & altitudine portionis, VBR, sit parallelogrammum, DN, & circa axim, vel diametrum, BM.



Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, DN, regula, VR, ad omnia quadrata portionis, VBR, esse vt rectangulum sub, BA, & tripla, AO, ad rectangulum sub, BM, & sub composita ex, MO, OA; iungantur, VB, PB; Omnia ergo quadrata semiportionis, BCVM, ad omnia quadrata trianguli, BVM, sunt vt, AO, OM, ad, OM, .i. sumpta, BM, cõmuni altitudine, vt rectangulũ sub, BM, MOA, ad rectangulum, BMO, omnia autem quadrata trianguli, BVM, ad omnia quadrata trianguli, BPM, sunt vt quadratum, VM, ad quadratum, PM, vel ad quadratum, CA, .i. vt rectangulum, OMB, ad rectangulum, OAB, ergo ex æquali, & conuertendo omnia quadrata trianguli, BPM, ad omnia quadrata semiportionis, BVM, erunt vt rectangulũ, BAO, ad rectangulum sub, BM, &, MOA, & antecedentium tripla .s. omnia quadrata parallelogrammi, DM, ad omnia qua-

Ex ant. 5.l.2.

Per B Coro. 21 l.2.

Ex 40.l.1. & eiusdem Scholio.

24 l.2.

8.1.2. quadrata semiportionis, BVM, vel omnia quadrata parallelogrammi, DN, ad omnia quadrata portionis, VBR, erũt vt rectangulum sub, BA, & tripla, AO, ad rectangulum sub, BM, &, MOA, quod verum esse ostendetur, vt in antecedente, etiam si parallelogrammum, DN, non sit circa axim, vel diametrum, BM, vnde patet, &c.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI intra circulum, vel ellipsim, duæ ad axim, vel diametrum ordinatim applicentur rectæ lineæ, sit autem parallelogrammum, & triangulum in eadem altitudine cum portione inter applicatas conclusa, sed in basi altera applicatarũ: Omnia quadrata dicti parallelogrãmi ad omnia quadrata conclusæ portionis (regula basi) erunt, vt rectãgulum sub partibus axis, vel diametri per basim constitutis ad rectangulum sub abscissa per basim ab extremitate axis, vel diametri, & sub composita ex medietate portionis axis, vel diametri eisdem applicatis intermediæ, & abscissa per aliam applicatam ab eiusdem extremitate, vna cum rectangulo sub eadem intermedia, & sub composita ex $\frac{1}{6}$. eiusdem, & $\frac{1}{2}$. abscissæ per eandem applicatam ab eiusdem extremitate: Omnia verò quadrata inclusæ portionis ad omnia quadrata dicti trianguli erunt, vt rectangulum sub composita ex abscissis ab axi, vel diametro per ordinatim applicatas versus terminũ, cui basis propinquior est, & sub sexquialtera abscissæ ab alio

ex-

extremo per applicatam, quæ non eſt baſis, vna cum rectangulo ſub huius reliqua, & ſub dupla abſciſſæ per baſim ab extremo, cui ipſa baſis propinquior eſt, ad rectangulum ſub partibus axis, vel diametri per baſim conſtitutis.

SIT ergo circulus, vel ellipſis, ACDF, cẽtrum, O, axis, vel diameter, AD, duæ ad ipſam ordinatim applicatæ ſint, IS, CF, intercipientes portionem, ICFS, ſit autem parallelogrammum, BF, in baſi vtrauis applicatarum, vt in, CF, & eadem altitudine cum fruſto, CISF, ſit etiam nunc circa axim, vel diametrum, MR, regula verò, CF; Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, BF, ad omnia quadrata portionis, ICFS, eſſe vt rectangulum, DRA, ad rectangulum ſub, DR, & ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$, RM, & ex, MA, vna cũ rectangulo ſub, RM, & ſub compoſita ex $\frac{1}{6}$, RM, & $\frac{1}{2}$, MA. Sumatur in, MR, vtcunq; punctum, T, per quod agatur ipſi, CF, parallela, TX, ſecans curuam, SF, in, V, erit ergo quadratum, RF, vel quadratum, TV, ad quadratum, TX, vt rectangulum, DRA, ad rectangulũ, DTA; & quoniam, MF, eſt parallelogrammum in eadem baſi, RF, & altitudine cum ſemiportione, MRFXS, &, TX, ducta fuit vtcunq; parallela ipſi, RF, repertumq; eſt quadratum, TV, ad quadratum, TX, eſſe vt rectangulum, DRA, ad rectangulum, DTA, conſtructis quatuor magnitudinum ordinibus, vt in antecedẽte, cõcludemus omnia quadrata parallelogrammi, MF, ad omnia quadrata ſemiportionis, MRFS, eſſe vt rectangula, DRA, tot, quot ſunt omnes abſciſſæ ipſius, MR, ad rectangula ſub reſiduis omnium abſciſſarũ, MR, adiuncta, RD, & ſub omnibus abſciſſis, MR, adiuncta, MA; quia verò, DA, diuiſa eſt vtcũq; in duobus punctis, R, M, rectan- Coroll 3. 26. l. 2.

gula

gula ſub, DRA, tot, quot ſunt omnes abſciſſæ, RM, ad rectangula ſub reſiduis omnium abſciſſarum, MR, adiuncta, RD, & ſub omnibus abſciſſis, MR, adiuncta, MA, ſunt vt

Coro. 32. l. 2. rectangulum, DRA, ad rectangulum ſub, DR, & ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$, RM, &, MA, vna cum rectangulo ſub, RM, & ſub compoſita ex $\frac{1}{6}$, RM, & $\frac{1}{2}$, MA, ergo omnia quadra-

8. l. 2. ta parallelogrammi, MF, ad omnia quadrata ſemiportionis, MRFS, vel omnia quadrata parallelogrammi, BF, ad omnia quadrata portionis, ICFS, erunt vt rectangulum, DRA, ad rectangulum ſub, DR, & ſub cōpoſita ex $\frac{1}{2}$, MR, & ex, MA, vna cum rectangulo ſub, RM. & ſub compoſita ex $\frac{1}{6}$, RM, & $\frac{1}{2}$. MA:

Iungantur nunc, CM, MF. Dico inſuper omnia quadrata portionis, ICFS, ad omnia quadrata trianguli, MCF, eſſe vt rectangulum ſub compoſita ex, MD, DR, & ſub ſexquialtera, MA, vna cum rectangulo ſub cōpoſita ex, MD, & dupla, DR, & ſub $\frac{1}{2}$, MR, ad rectangulum, DRA; omnia .n. quadrata parallelogrammi, BF, ad omnia quadrata portionis, ICFS, oſtenſa ſunt eſſe vt rectangulum, DRA, ad rectangulum ſub, DR, & ſub cōpoſita ex $\frac{1}{2}$, RM, & ex, MA, vna cum rectangulo ſub, RM, & ſub compoſita ex $\frac{1}{6}$, RM, & $\frac{1}{2}$, MA, ergo eorum tertia pars ad eadem conſequentia erunt vt tertia pars rectanguli, DRA, ad eadem conſequentia rectangula .ſ. vt integrum rectangulum, DRA, ad illa rectangula triplicata, rectangulum autem ſub, DR, & ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$, RM, &, MA, diuiditur in re-

1. 2. elem. ctangula ſub, DR, & $\frac{1}{2}$, RM, & ſub, DR, &, MA, triplicetur rectangulum ſub, DR, & $\frac{1}{2}$, RM, fit rectangulum ſub

1. 2. elem. tripla, DR, & ſub $\frac{1}{2}$, RM, cui ſi addatur rectangulum ſub, MR, & $\frac{1}{2}$, RM, fit rectangulum ſub cōpoſita ex tripla, RD, & ex, RM, .ſ. ſub compoſita ex, MD, & dupla, RD, & ſub $\frac{1}{2}$, RM, quod ſerua: Remanent rectangula adhuc ſub, DR,

7. l. 2. MA, & ſub, MR, & $\frac{1}{2}$, MA, triplicanda, quod ſic fiet; rectangulum ſub, DR, MA, æquatur rectangulo ſub dupla, DR,

DR, & $\frac{1}{2}$, MA, cui si addatur rectangulum sub $\frac{1}{2}$, MA, & sub, MR, fiet rectangulum sub $\frac{1}{2}$, MA, & sub composita ex, MR, & dupla, RD, .s. sub cõposita ex, MD, DR, quod triplicatum fit rectangulum sub composita ex, MD, DR, & sub sexquialtera, MA, quod simul cum rectangulo sub composita ex, MD, & dupla, DR, & sub $\frac{1}{2}$, MR, ad rectangulum, DRA, conuertendo, habebit eandem rationem, quam omnia quadrata portionis, ICFS, ad omnia quadrata trianguli, CMF; quod etiam verificabitur, si dictum parallelogrammum, & triangulum, sint quidem in eadẽ basi cum portione, sed non circa eundem axim, vel diametrum cum eadem portione, vt supra patere potest in antecedentibus, quod erat ostendendum.

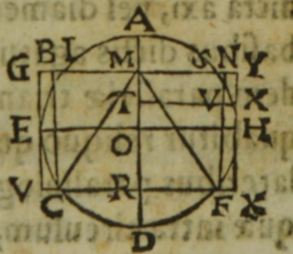
C. 2. elem.

Ex 9. & 8. Coro. 21. l. 2.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

IN eadem antecedentis figura si parallelogrãmum sit quidem in eadem altitudine cum portione, sed in basi æquali secundæ diametro; omnia quadrata dicti parallelogrãmi ad omnia quadrata dictæ portionis erũt, vt quadratum axis, vel diametri eorũdem ad eadem consequentia rectangula, retenta eadem regula.

Exponatur denuò antecedentis figura, & producatur, CF, ita vt, VX, sit æqualis secundæ diametro, quæ sit, EH, &, VR, æqualis, RX, & in, VX, basi sit constructum parallelogrammum, GX, in altitudine eadem cum portione, ICFS, sit etiam circa eandem axim, vel diametrum, MR, cũ portione, IECFHS: Omnia ergo qua-



drata parallelogrammi, GR, ad omnia quadrata parallelogrammi, BR, (regula, CF,) sunt vt quadratum, VR, ad quadratum, CR, .i. vt rectangulum, AOD, vel quadratum, AO, ad rectangulum, DRA, omnia autem quadrata parallelogrammi, BR, ad omnia quadrata semiportionis, ICRM, sunt vt rectangulum, DRA, ad rectangulum sub, DR, & sub composita ex $\frac{1}{2}$, RM, & ex, MA, vna cum rectangulo sub, RM, & sub composita ex $\frac{1}{6}$, RM, & $\frac{1}{2}$, MA, ergo ex æquali omnia quadrata parallelogrammi, GR, ad omnia quadrata semiportionis, ICRM, vel omnia quadrata parallelogrammi, GX, ad omnia quadrata portionis, ICES, erunt vt quadratum, AO, ad rectangulum sub, DR, & sub composita ex $\frac{1}{2}$, RM, & ex, MA, vna cum rectangulo sub, RM, & sub composita ex $\frac{1}{6}$, RM, & $\frac{1}{2}$, MA; quod etiam patet, si parallelogrammum, GX, non sit circa axim, vel diametrum, MR, quod erat ostendendum.

9. l. 2.

Ex 40. l. 1. & eiusdem Scholio.

Ex antec.

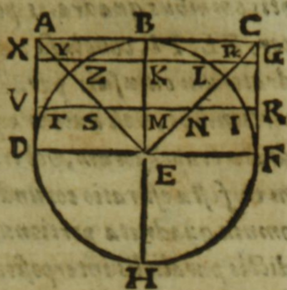
Ex 9 & B. Coro. 22. l. 2.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI in circulo, vel ellipsi ducantur coniugati axes, vel diametri, in altera autem eorundem sit tamquàm in basi parallelogrammum circa eundem axim, vel diametrum cum circulo, vel ellipsi, circa quem sit etiam triangulus, sed in basi opposita basi parallelogrammi, sumatur autem in dicta axi, vel diametro vtcunq; punctũ, per quod basibus dictis agatur parallela; quadratum eiusdem parallelæ trianguli lateribus interceptæ æquabitur reliquo quadrati eius, quæ intercipitur lateribus parallelogrãmi, dempto quadrato eius, quæ intra circulum, vel ellipsim concludetur.

Sit

Sit circulus, vel ellipsis, BDHF, eius coniugati axes, vel diametri, BH, DF, in altera autem earum, vt in, DF, tanquam in basi, & circa axim, vel diametrum, BE, sit parallelogrammum, AF, circa eundem verò, sed in basi, AC, sit triangulum, AEC, sumatur autem in, BE, vtcunque punctum, M, per quod ipsi, DF, agatur parallela, VR, secans curuam, DBF, in, T, I, & latera trianguli, AEC, in, S, N. Dico ergo quadratum, SN, æquari reliquo quadrati, VR, dempto quadrato, TI.



Nam rectangulum, HEB, ad rectangulũ, HMB, est vt quadratum, FE, vel quadratum, RM, ad quadratum, IM, ergo per conuersionem rationis rectangulum, HEB, .i. quadratum, BE, ad quadratum, ME, (quod est excessus rectanguli, HEB, super rectangulum, HMB,) erit vt quadratũ, RM, ad sui reliquum, dempto quadrato, MI, sed vt quadratum, BE, ad quadratum, EM, ita quadratũ, BC, .i. quadratum, MR, ad quadratum, MN, quia triangula, BEC, MEN, sunt æquiangula; ergo quadratum, BC, .i. quadratum, MR, ad quadratum, MN, erit vt idem quadratum, MR, ad sui reliquum, dempto quadrato, MI, & eorum quadrupla .s. quadratũ, SN, æquabitur reliquo quadrati, VR, dempto quadrato, TI, quod erat ostendendum.

Ex 40 l. 1. & ex eius Scholio.

5. 2. elem.

4. 6. elem.

COROLLARIVM.

QVONIAM autem punctum, M, sumptum est vtcunq;, hinc patet, quod omnia quadrata trianguli, AEC, (regula, DF,) æquantur reliquo omnium quadratorum parallelogrammi, AF, demptis omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, DBF; & duabus vtcunq; ductis ipsi, DF, parallelis, vt, XG, VR, patet, quod omnia quadrata trapezij, YSNR, æqua-

buntur residuo omnium quadratorum parallelogrammi, XR, demptis omnibus quadratis portionis semicirculi, vel semiellipsis inter, ZL, TI, conclusa: Quia verò ostensa est ratio omnium quadratorum cuiusuis parallelogrammorũ in altitudine eadem cum portionibus, basi autem æquali secundæ diametro, ad omnia quadrata trapeziorum, vel triangulorum in ijsdem existentium, hinc manifesta est ratio eorundem ad dicta residua, & consequenter ad omnia quadrata portionum semicirculi, vel semiellipsis, DBF, dictis parallelis interpositarum, vt ex. g. nota erit ratio, quam habent omnia quadrata parallelogrammi, XR, ad omnia quadrata portionis, ZTIL, & sic in reliquis. Quia verò omnia quadrata trianguli, AEC, ad omnia quadrata trianguli, SEN, sunt in tripla ratione ipsius, BE, ad, EM, ideò etiam patebit, quod omnia quadrata parallelogrammi, AF, demptis omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, DBF, ad omnia quadrata parallelogrammi, VF, demptis omnibus quadratis frusti, TDFR, sint in tripla ratione ipsius, BE, ad, EM, idest, vt cubus, BE, ad cubum, EM.

24. & 28. l. 2.

F. Cor. 23. l. 2.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI in circulo, vel ellipsi ad axim, vel diametrum eiusdem ordinatim applicetur vtcumque recta linea, quæ sumatur pro regula: Omnia quadrata eiusdem ad omnia quadrata alterutrius portionis per eam constitutæ, erunt vt parallelepipedum sub quadrato totius axis, vel diametri, altitudine eiusdem dimidia, ad parallelepipedum sub quadrato assumptæ portionis, altitudine autem linea composita ex reliquæ portionis axi, vel diametro, & dimidia totius: Vel erunt, vt cubus totius axis, vel diametri ad paral-

lelepipedum ſub quadrato aſſumptæ portionis axis, vel diametri, & ſub altitudine linea compoſita ex tripla axis, vel diametri reliquæ portionis, cum cubo axis, vel diametri reliquæ portionis.

Sit circulus, vel ellipſis, ABCD, cuius axis, vel diameter, AC, centrum, O, & ordinatim vtcunq; ad ipſam applicata, BD, conſtituẽs duas portiones, BAD, BCD, quæ quoq; ſit regula. Dico ergo omnia quadrata circuli, vel ellipſis, ABCD, ad omnia quadrata portionis, BAD, ex duabus portionibus, BAD, BCD, ad libitũ ſumptæ, eſſe, vt parallelepipedum ſub baſi quadrato, AC, altitudine, CO, vel, CX, quæ ſit æqualis, CO, & illi in directum conſtituta, ad parallelepipedum ſub baſi quadrato, AE, altitudine, EX, vel vt cubus, AC, ad parallelepipedum ſub baſi quadrato, AE, altitudine tripla. EC, cum cubo, AE; iungantur, BA, AD, BC, CD: Omnia ergo quadrata portionis, BCD, ad omnia quadrata portionis, BAD, habent rationem cõpoſitam ex ea, quam habent omnia quadrata portionis, BCD, ad omnia quadrata trianguli, BCD, & ex ea, quam habent hæc ad omnia quadrata trianguli, BAD, & ex ratione iſtorũ ad omnia quadrata portionis, BAD: Omnia verò quadrata portionis, BCD, ad omnia quadrata trianguli, BCD, ſunt vt compoſita ex, OA, AE, ad, AE: Omnia item quadrata trianguli, BCD, ad omnia quadrata trianguli, BAD, (quia triangula ſunt in eadem baſi, BD,) ſunt vt, CE, ad, EA: Omnia deniq; quadrata trianguli, BAD, ad omnia quadrata portionis, BAD, ſunt vt, EC, ad compoſitam ex, EC, CO; harum autem trium rationum componentium rationem ſupradictam illa, quam habet, CE, ad, EA, &, CE, ad, ECO, componit rationem quadrati, CE, ad rectangulum



Diff. 12. l. 1.

1. huius.

Per C. Co. 10. 22. l. 2.

2. huius.

6. l. 2.

ſub,

ſub, AE, & ſub, ECO, habemus ergo illas tres rationes in has duas reſolutas .ſ. in eam, quam habet quadratum, EC, ad rectangulum ſub, AE, & ECO, & in eam, quam habet compoſita ex, OA, AE, ad, AE; ratio autem quadrati, EC, ad rectangulum ſub, AE, &, ECO, & ratio ipſius, OAE, ſumptæ pro altitudine ad, AE, pariter pro altitudine ſum-
Per D. Co ptam, componunt rationem parallelepipedi ſub baſi qua-
ro. 4. Gen. drato, CE, altitudine autem, EAO, ad parallepipedũ ſub
34. l. 2. baſi quadrato, AE, altitudine autem, ECO, quod ſerua.

Duplicentur nunc horum parallelepipedorum altitudines, omnia ergo quadrata portionis, BCD, ad omnia quadrata portionis, BAD, erunt vt parallelepipedum ſub quadrato, EC, altitudine verò dupla, EA, & dupla, AO, quæ eſt, AC, ad parallelepipedum ſub baſi quadrato,
35. l. 2. AE, altitudine dupla, EC, & dupla, CO, quæ eſt, AC; parallelepipedum autem ſub quadrato, CE, & ſub compoſita ex dupla, AE, &, AC, æquatur parallelepipedis ſub quadrato, CE, & ſub, AE, bis, vna cum parallelepipe-
36. l. 2. do ſub, AC, & ſub quadrato, CE, ideſt vna cum parallelepipedo ſub, AE, adhuc ſemel, & ſub quadrato, EC, cum cubo, EC, quæ ſimul cum prædictis conficiunt parallelepipedum ter ſub, AE, & ſub quadrato, EC, cum cubo ipſius, EC. Similiter oſtẽdemus parallelepipedum ſub quadrato, AE, & ſub compoſita ex, CA, & dupla, CE, æquari parallelepipedis ter ſub, CE, & ſub quadrato, EA, cum cubo, EA, ergo omnia quadrata portionis, BCD, ad omnia quadrata portionis, BAD, erunt vt parallelepipedum ter ſub quadrato, CE, altitudine, EA, cum cubo, CE, ad parallelepipedum ter ſub quadrato, AE, altitudine, EC, cum cubo, AE, ergo, componendo, omnia quadrata circuli, vel ellipſis, ABCD, ad omnia quadrata portionis, BAD, erunt vt parallelepipedum ter ſub altitudine, AE, & quadrato, EC, cum cubo, EC, ſimul cum parallelepipedo ter ſub altitudine, CE, & ſub quadrato, EA, cum cubo, EA, ad parallelepipedum

ralle-

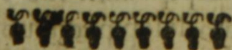
rallelepipedum ter sub quadrato, AE, altitudine, EC, cum cubo, AE, illa autem simul sumpta conficiunt cubum, AC, ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, ABCD, ad omnia quadrata portionis, BAD, erunt vt cubus, AC, ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE, altitudine linea composita ex dupla, EC, & ex, AC, ergo (dimidiatis huius rationis terminis) omnia quadrata circuli, vel ellipsis, ABCD, ad omnia quadrata portionis, BAD, erunt vt parallelepipedum sub basi quadrato, AC, altitudine, CO, vel, CX, (quod est dimidium cubi, AC,) ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE, altitudine, EX, (quæ est dimidia altitudinis parallelepipedi sub basi quadrato, AE, altitudine dupla, EC, & ipsa, CA, simul) patet ergo, quod omnia quadrata circuli, vel ellipsis, ABCD, ad omnia quadrata portionis, BAD, erunt vt parallelepipedum sub basi quadrato, AC, altitudine, CX, ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE, altitudine, EX, vel (vt probauimus) vt cubus, AC, ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE, altitudine linea composita ex dupla, EC, & ex, AC, .i. ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE, altitudine tripla, EC, cum cubo, AE, quæ erant demonstranda.

38.1 a.

Per C. Coro 4. Gen. 34. l. 2.

COROLLARIVM.

HINC etiam patet portionis, BCD, omnia quadrata ad omnia quadrata portionis, BAD, esse vt parallelepipedum sub basi quadrato, CE, altitudine autem, EAO, ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE, altitudine autem, ECO, patet ergo si circulus, vel ellipsis per applicatam ad eorum axim, vel diametrum, in duas portiones vtcunq; diuidantur, quaq; sumatur pro regula, quod nota erit ratio omnium quadratorum vtriusque portionis inter se.



THEO-

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI in circulo, vel ellipsi duæ ad eundem axim, vel diametrum ordinatim applicentur rectæ lineæ; Omnia quadrata vnius portionis (regula basi) ad omnia quadrata alterius portionis erunt, vt parallelepipedum sub basi quadrato axis, vel diametri illius, & sub composita ex axi, vel diametro reliquæ portionis, & dimidia totius, ad parallelepipedum sub basi quadrato axis, vel diametri alterius portionis, & sub composita ex axi, vel diametro reliquæ portionis, & dimidia totius.

SIT circulus, vel ellipsis, ACND, cuius axis, vel diameter, AN, centrum, O, duæ ad ipsum vtcunq; ordinatim applicatæ sint, BF, CD, sit autem producta, AN, in, X, ita vt, XN, sit æqualis, NO; regula verò alterutra applicatarũ, vt, CD. Dico ergo omnia quadrata portionis, BAF, ad omnia quadrata portionis, CAD, esse, vt parallelepipedum sub basi quadrato, AE, altitudine autem, EX, ad parallelepipedum sub basi quadrato, AM, altitudine, MX. Nam omnia quadrata portionis, BAF, ad omnia quadrata



Ex antec. circuli, vel ellipsis, ACND, sunt vt parallelepipedum sub basi quadrato, AE, altitudine, EX, ad parallelepipedũ sub basi quadrato, AN, altitudine, NX, item omnia quadrata circuli, vel ellipsis, ACND, ad omnia quadrata portionis,
Ex antec. CAD, sunt vt parallelepipedum sub basi quadrato, AN, altitudine, NX, ad parallelepipedũ sub basi quadrato, AM, altitudine, MX, ergo ex æquali omnia quadrato portionis,

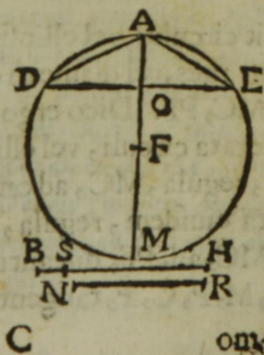
BAF,

BAF, ad omnia quadrata portionis, CAD, erunt vt parallelepipedum ſub baſi quadrato, AE, altitudine, EX, ad parallelepipedum ſub baſi quadrato, AM, altitudine, MX, quod erat oſtendendum.

PROBLEMA I. PROPOS. VIII.

A Dato circulo, vel ellipſi portionem abſcindere per lineam ad eiuſdem axim, vel diametrum ordinatim applicatam, cuius omnia quadrata ad omnia quadrata trianguli in eadem baſi, & altitudine cum ipſa portione, habeant rationem datam; oportet autem hanc eſſe maiorem ſexquialtera, exiſtente regula ipſa ordinatim applicata.

Sit circulus, vel ellipſis, ADME, axis, vel diameter, AM, centrum, F, oportet igitur ad ipſum axim, vel diametrum, lineam ordinatim applicare, quæ ab ipſo circulo, vel ellipſi abſcindat, portionem, cuius omnia quadrata (regula ipſa applicata) ad omnia quadrata trianguli in eadem baſi, & altitudine cum ipſa habeant rationem datam; hanc dico prius oportere eſſe maiorem ſexquialtera, nam cuiuslibet abſciſſæ portionis (vt oſtenſum eſt) omnia quadrata ad omnia quadrata trianguli in eadem baſi, & altitudine cum ipſa ſunt, vt compoſita ex dimidia totius axis, vel diametri, & ex diametro reliquę portionis, ad axim, vel diametrum reliquę portionis, & diuidendo exceſſus omnium quadratorum dictæ portionis ſuper 1. huius.

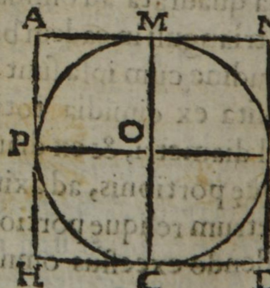


omnia quadrata dicti trianguli, ad omnia quadrata dicti trianguli, sūt vt dimidia totius axis, vel diametri ad axim, vel diametrū reliquæ portionis, oportet ergo, quòd dicta ratio diuisa sit maior ea, quam habet, FM, ad, MA, quæ cōponendo euadit sexquialtera: sit ergo data ratio, quam habet, BH, ad, NR, maior sexquialtera, & abscindatur, HS, æqualis ipsi, NR, & fiat, vt, BS, ad, SH, ita, FM, ad, MO, & ducatur per, O, ipsa, DE, ad axim, vel diametrum, AM, ordinatim applicata, & iungantur, DA, AE; quoniam ergo, vt, BS, ad, SH, ita est, FM, ad, MO, cōponendo, BH, ad, HS, vel, NR, erit, vt, FM, MO, ad, MO, sunt autem omnia quadrata portionis, DAE, (regula, DE,) ad omnia quadrata trianguli, DAE, vt, FM, MO, ad, MO, & ideò sunt ad ea in ratione data, in ea scilicet, quam habet, BH, ad, NR, quod efficere opus erat.

3. huius.

THEOREMA VIII. PROPOS. IX.

OMnia quadrata circuli, vel ellipsis, regula altero axium, vel diametrorum, ad omnia quadrata eiusdem, regula reliquo axium, vel diametrorum, erunt, vt dictus primus axis, vel diameter, ad dictum secundum axim, vel diametrum.



Sit circulus, vel ellipsis, MPCF, cuius axes, vel diametri coniugatæ, MC, PF. Dico ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MPCF, regula, MC, ad omnia quadrata eiusdem, regula, PF, esse, vt, MC, ad, PF; ducantur per pūcta, M, P, C, F, tangentes circu-

lum,

lũ, vel ellipsim, MPCF, quæ sint, AN, ND, DH, HA, constituentes parallelogrammũ, AD, circulo, vel ellipsi, MP CF, circumscriptum, cuius latera parallela sint ipsis, PF, MC, axibus, vel diametris coniugatis: Omnia ergo quadrata circuli, vel ellipsis, MPCF, regula, MC, sunt subsexquialtera omnium quadratorum parallelogrammi, AD, regula eadem, MC, omnia verò quadrata eiusdem circuli, vel ellipsis, regula, PF, sunt subsexquialtera omnium quadratorum parallelogrammi, AD, regula eadem, PF, ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MPCF, regula, MC, ad omnia quadrata eiusdem regula, PF, erũt, vt omnia quadrata parallelogrammi, AD, regula, MC, ad omnia quadrata eiusdem, regula, PF, sed omnia quadrata parallelogrammi, AD, regula, MC, ad omnia quadrata eiusdem, regula, PF, sunt, vt, MC, ad, PF, ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MPCF, regula, MC, ad omnia quadrata eiusdem, regula, PF, erunt, vt, MC, ad PF, quod ostendere oportebat.

iux. 2. l. 1. Coroll. 1. huius.

29. l. 2.

COROLLARIVM.

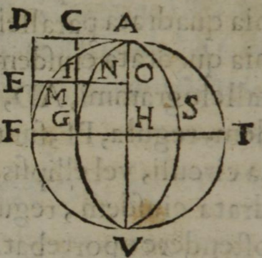
HINC patet, si ad, MC, PF, ordinatim applicentur rectæ lineæ portiones abscindẽtes à dicto circulo, vel ellipsi, quoniam ostensa est ratio omnium quadratorum abscissæ portionis, regula basi, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MPCF, & item ostẽsa est ratio omnium quadratorum circuli, vel ellipsis, MPCF, regula altero axium, vel diametrorum, ad omnia quadrata eiusdem, regula reliquo axi, vel diametro, & deniq; ostensa est ratio omnium quadratorum eiusdem circuli, vel ellipsis, ad omnia quadrata portionis per aliam ordinatim applicatam abscissæ, regula basi dictæ portionis, quod ideo nota erit ratio omnium quadratorum duarum portionum per dictas applicatas abscissarum, regulis dictarum portionum basibus, quod, &c.

6. huius. Ex antec. 6. huius.

THEOREMA IX. PROPOS. X.

SI circulus, & ellipsis, vel duæ ellipses fuerint circa eundem axim, vel diametrũ, illi erunt inter se, vt eorum secũdi axes, vel diametri.

Sint circulus, & ellipsis, vel duæ ellipses, AFVT, AGVS, circa eundem axim, vel diametrum, AV, sint verò secundi axes, vel diametri, FT, GS. Dico circulũ, vel ellipsim, AFVT, ad circulum, vel ellipsim, AGVS, esse, vt, FT, ad, GS; duæ igitur, DA, DF, tangentes easdem in terminis coniugatarum axium, vel diametrorum, inter se conueniant in, D, erit ergo, DH, parallelogrammum, ducatur etiam per, G, ipsa, GC, parallela



17. 1. Conicorum. ipsi, AV, quæ tanget ellipsim, AGVS, in, G, erit ergo etiam, CH, parallelogrammum in eadem basi, & altitudine cum semiportione, AGH, vt etiam parallelogrammum, DH, est in eadem basi, & altitudine cum semiportione, AFH; sumatur vtcunq; in, AH, punctum, O, & per ipsum ducatur ipsi, FT, parallela, OE, secans curuam, AG, in, N, CG, in, I, curuam, AF, in, M, &, DF, in, E.
Ex 40. l. 1. & eius Scholio. Igitur quadratum, FH, ad quadratum, MO, erit vt rectangulum, VHA, ad rectangulum, VOA, .i. vt quadratũ, GH, ad quadratum, NO, ergo quadratum, FH, vel quadratum,
16. l. 2. EO, ad quadratum, MO, erit vt quadratũ, IO, ad quadratum, ON, ergo, EO, ad, OM, erit vt, IO, ad, ON, est autem, EO, ducta vtcũq; parallela, FT, & sunt parallelogramma, DH, CH, in iisdem basibus, & altitudinibus cum semipor-
Coroll. 3. 26. l. 2. tionibus, AFH, AGH, ergo omnes lineæ parallelogrammi, DH, ad omnes lineas semiportionis, FAH, erũt vt omnes lineæ parallelogrammi, CH, ad omnes lineas semiportionis,

tionis, AGH, ergo parallelogrammum, DH, ad semipor- 3.l.2.
tionem, AFH, erit vt parallelogrammũ, CH, ad semiportionem, AGH, ergo, permutando, DH, ad, CH, parallelogrammum erit, vt semiportio, AFH, ad semiportionem, AGH, ergo vt, DH, ad, CH, .s. vt basis, FH, ad basim, HG, 5 l.2.
vel vt, FT, ad, GS, ita erit semiportio, AFH, ad semiportionem, AGH, vel sic eorum quadrupla .s. ita erit circulus, vel ellipsis, AFVT, ad circulũ, vel ellipsim, AGVS, qđ, &c.

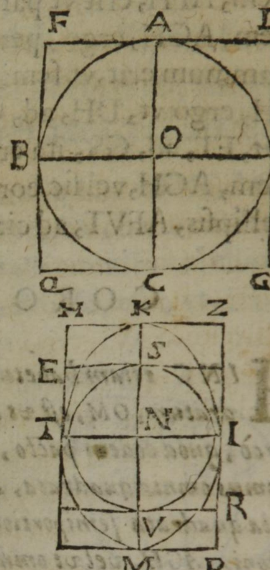
COROLLARIVM.

HINC etiam habetur, quoniam quadratum, EO, ad quadratum, OM, est vt quadratum, IO, ad quadratum, ON, idcircò, quod eodem pacto, iuxta Th. antecedens, concludere possumus omnia quadrata, DH, ad omnia quadrata, CH, esse, vt omnia quadrata semiportionis, AFH, ad omnia quadrata semiportionis, AGH, vel vt omnia quadrata circuli, vel ellipsis, AFVT, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, AGVS, sunt autem omnia quadrata parallelogrammi, DH, ad omnia quadrata paralle- 9.l.2.
logrammi, CH, vt quadratum, FH, ad quadratum, GH, habetur ergo inquã, quod omnia quadrata circuli, vel ellipsis, AFVT, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, AGVS, sunt vt quadratũ, FH, ad quadratum, HG, vel vt quadratum, FT, ad quadratum, GS, .s. sunt vt quadrata secundorum axium, vel diametrorum.

THEOREMA X. PROPOS. XI.

CIrculus, vel ellipsis ad quemlibet circulũ, vel ellipsim habet eandem rationẽ, quam rectãgulum sub ipsius coniugatis axibus, vel diametris, ad rectangulum sub istius coniugatis axibus, vel diametris, æquè tamen diametris ad inuicem inclinatis.

Sit circulus, ABCD, cuius axes cõiugati sint, AC, BD, cẽtrum, O, ductis verò per puncta, A, C, parallelis ipsi, BD, FL, QG, & per puncta B, D, parallelis ipsi, AC, LG, FQ, vt sit, FG, rectangulũ circulo, ABCD, circumscriptum, sit, STVI, quilibet circulus, vel ellipsis, cui rectangulum, ER, sit circumscriptum, habens latera parallela cõiugatis axibus, SV, TI. Dico circulum, ABCD, ad ellipsem, STVI, esse vt rectangulum, FG, ad rectangulum, ER; producatur, SV, hinc inde, ita vt, NK, sit æqualis, OA, &, NM, ipsi, OC, & circa, KM, TI, axes intelligatur, KT, MI, ellipsis, vel circulus, & productis tangentibus, TE, IR, vt occurrant ipsis, HK, MP, sit rectangulum, HP, circumscriptum ipsi, KTMI, ellipsi, vel circulo, habens latera coniugatis axibus, KM, TI, parallela: Est ergo vt rectangulum, FG, ad rectaogulum, HP, ita circulus, ABCD, ad circulum, vel ellipsim, KTMI, quia sunt ambo circa, AC, KM, axes æquales; item parallelogrammum, HP, ad parallelogrammum, ER, est vt circulus, vel ellipsis, KTMI, ad circulum, vel ellipsim, STVI, ergo ex æquali rectangulum, FG, ad rectangulum, ER, erit vt circulus, ABCD, ad circulum, vel ellipsim, STVI.



Ex antec. § (margin note)

Ex antec. (margin note)

Sit nunc, ABCD, ellipsis, vt etiam, STVI, poterit esse, quod, AC, BD, sint non axes, sed coniugatæ diametri, &, FG, parallelogrammum, oportet autem sumere in ellipsi, ST, VI, coniugatas diametros, SV, TI, ita vt æqualiter sint inclinatæ ac ipsæ, AC, BD, tunc.n.circumscripta parallelogramma, licet non sint rectangula, tamen erunt æqui-

angula, vnde æquiangulum erit parallelogrammi, HP, ipsi, FG, & ellipses, ABCD, KTMI, erunt circa, AC, KM, æquales diametros, ita vt si superponerẽtur ad inuicem isti ellipses, vt, KM, esset in, AC, ipsa, TI, esset in, BD, & ideo eodem modo ostendemus, vt supra ellipses, ABCD, STVI, esse inter se, vt parallelogramma illis circumscripta, FG, ER, & quia illa sunt æquiangula habebunt rationem ex ratione laterum compositam, sed etiam parallelogramma rectangula sub eisdem lateribus habent rationem compositam ex ratione eorundem laterum, ergo ellipsis, ABCD, ad ellipsim, STVI, erit vt parallelogrammum, FG, ad parallelogrammũ, ER, sibi æquiangulum .i. vt rectangulum sub, FL, LG, vel sub, BD, AC, diametris, ad rectangulum sub, TI, SV, diametris, patet igitur circulum, vel ellipsim, ABCD, ad circulum, vel ellipsim, STVI, esse vt rectangulum sub axibus, vel diametris, AC, BD, ad rectangulum sub axibus, vel diametris, SV, TI, quæ diametri æquè ad inuicem inclinantur, quod ostendere opus erat. 6. l. 2.

COROLLARIVM I.

HINC ergo colligitur, quod quando circulus comparatur ad circulum, illi sunt inter se, vt rectangula sub eorum axibus .i. vt quadrata axium, & ideo sunt in dupla ratione axium, siue diametrorum, quando verò circulus comparatur ad ellipsim, erit ad illum, vt sui axis quadratum ad rectangulum sub axibus ellipsis. Denique, si ellipsis comparetur ad ellipsim, erit ad illum, vt rectangulum sub axibus illius ad rectangulum sub axibus alterius, vel vt rectangulum sub diametris (coniugatis semper intellige, nisi aliud addatur) illius ad rectangulum sub diametris alterius, quæ vt prædicti æqualiter ad inuicem sunt inclinatæ; vel tandem, vt parallelogramma illis circumscripta, quorum latera sint prædictis diametris parallela, quæ ideo sunt æquiangula, vniuersaliter igitur prædicta sunt iter se, vt parallelogrãma rectangula,

gula, vel æquiangula illis circumscripta; Vnde etiam habetur parallelogramma rectangula illis circumscripta esse, vt parallelogramma æquiangula pariter illis circumscripta.

A

COROLL. II. A. SECTIO I.

HINC vlterius colligitur, quod quæcunq; de binis parallelogrammis ostensa sunt in Theorem. 5. 6. 7. 8. lib. 2. præsuppositis conditionibus illic consideratis circa eorum bases, & altitudines, vel circa eorum latera, eadem & de ellipsibus verificabuntur easdem conditiones in proprijs axibus, vel diametris habentibus; nam his positis parallelogramma illis circumscripta, & æquiangula habent in suis lateribus, vel in basi, & altitudine easdem conditiones, vnde sicuti dictæ conclusiones sequuntur pro parallelogrammis circumscriptis, ita etiam verificantur pro inscriptis ellipsibus, ad quas dicta parallelogramma habent easdem rationes, vt probatum est, quæ igitur hic non sunt pro ellipsibus ad inuicem comparatis ostensa, per supracitata Theoremata supplentur, pro circulis autem hoc tantum habemus, quod sint, vt eorum axium, vel (si mauis dicere) diametrorum quadrata, non aliaque circa eosdem variatio contingit.

11. huius.

B

B. SECTIO II.

Colliguntur ergo hæc de binis ellipsibus. s. quod quæ sunt circa eandem diametrum, sunt vt reliquæ secundæ diametri.

C

C. SECTIO III.

QVæcunq; ellipses habent rationem ex axibus, vel diametris coniugatis, æqualiter ad inuicem inclinatis, compositam.



D. SECTIO IV. D

Ellipses habentes axes, vel diametros coniugatas, quæ æqualiter sunt inclinatæ, reciprocè respondentes, sunt æquales; & quæ sunt æquales, & habent axes, vel diametros ad inuicem æqualiter inclinatas, easdem habent reciprocè respondentes.

E. SECTIO V. E

Similes ellipses sunt in dupla ratione suorum axium, vel diametrorum homologarum, vel vt eorundem quadrata.

F. SECTIO VI. F

Pro circulis autem (vt supra dictum est) hoc tantum habetur, quod sint vt diametrorum quadrata, vel in dupla ratione diametrorum; neque illis alia variatio contingit, sicuti ellipsibus competere ex superioribus compertum est.

THEOREMA XI. PROPOS. XII.

Quæcunq; de omnibus quadratis parallelogrammorum, appositas ibi cōditiones habentium, ostensa sunt in Theor. 9. 10. 11. 12. 13. lib. 2. eadem de omnibus quadratis circulorum, vel ellipsiū illis inscriptorum (regula in vtrisque altero axium, vel diametrorum coniugatarum) verificabuntur.

Patet hęc propositio, nam omnia quadrata circulorum, vel ellipsium (regula altero axium, vel diametrorum) sunt subsexquialtera omnium quadratorū parallelogrammorum, quibus inscribuntur, latera habētium dictis axibus, Coroll. 1. huius.

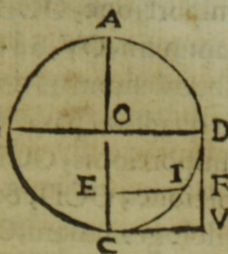
vel diametris parallela; habentibus autem illis appositas ibi conditiones in suis lateribus, eædem adsunt in axibus, vel diametris circulorum, vel ellipsium, quibus circumscribuntur, & è contra; & ideò conclusiones, quæ collectæ sunt pro illis in dictis Theor. etiam pro omnibus quadratis circulorum, vel ellipsium illis inscriptorum, vt demonstratæ recipi possunt, cum sint eorum partes proportionales, ijsdem regulis pro omnibus quadratis circulorum, vel ellipsium, & pro omnibus quadratis parallelogrammorum illis circumscriptorum, assumptis, quod, &c.

THEOREMA XII. PROPOS. XIII.

SI circulum, vel elli psim duæ rectæ lineæ in terminis coniugatarum diametrorum tetigerint inter se conuenientes, eisdem diametris ductis: Omnia quadrata constituti parallelogrammi ad omnia quadrata trilinei à dictis tangentibus, & ab inclusa curua comprehensi, regula altera diametrorum, erunt vt dictum parallelogrammum ad sui reliquum, dempto quadrante circuli, vel ellipsis iam dictæ, quod inscribitur prædicto parallelogrammo, simul cum excessu dicti quadrantis super duas tertias iam dicti parallelogrammi, quæ ratio erit proximè, vt 21. ad 2.

Sit circulus, vel ellipsis, ABCD, cuius diametri coniugatæ, AC, BD, in quorum terminis, C, D, duæ rectæ lineæ ipsum tangentes inter se cõueniant in, V. Dico ergo (sumpta regula qualibet diametrorum, vt, BD,) quod omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad omnia quadrata trilinei,

nei, DCV, duabus tangentibus, DV, VC, & ab ijs inclusa curua, DC, cōprehēsi sunt, vt idem parallelogrammum, OV, ad sui reliquum dempto quadrante, OCD, circuli, vel ellipsis, ABCD, simul cū eo spatio, quo idem quadrans excedit duas tertias parallelogrammi, OV. Sumatur intra, OC, vtcunq; punctum, E, & per, E, ducatur ipsi, BD, parallela, EF, secans curuam, DC, in, I. Omnia ergo quadrata parallelogrammi, OV, ad rectangula sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, sunt vt parallelogrammum, OV, ad eandem semiportionem, OCD; sed eadem ad omnia quadrata semiportionis, OCD, sunt sexquialtera, ergo ad residuum erunt vt parallelogrammum, OV, ad residuum semiportionis, OCD, demptis ab ea $\frac{2}{3}$. parallelogrammi, OV, quarum idem parallelogrammum, OV, est sexquialterum; residuum autem rectangulorum sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, demptis omnibus quadratis semiportionis, OCD, sunt rectangula sub semiportione, OCD, & trilineo, CDV, nam veluti in, EF, ducta, vtcunq; quadratum, EI, detractū à rectangulo sub, IE, EF, relinquit rectangulum sub, EI, IF, ita in cæteris sequitur; & illis simul collectis sequitur etiam, quod detractis omnibus quadratis semiportionis, OCD, à rectangulis sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, relinquantur rectangula sub semiportione, OCD, & trilineo, DCV, ad hæc igitur, quæ sunt dictum residuum, omnia quadrata parallelogrammi, OV, erunt vt parallelogrammum, OV, ad residuum semiportionis, OCD, ab ea demptis $\frac{2}{3}$. parallelogrammi, OV; eadem autem omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad rectangula sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, .i. ad omnia quadrata semiportionis, OCD, vna cum rectangulis sub



Coroll. 1. 26. l. 2. Coroll. 1. huius.

Iux. dicta pro C. 23. l. 2.

Per C. 23. l. 2.

ſemiportione, OCD, & trilineo, CVD, ſunt vt parallelogrammum, OV, ad ſemiportionem, OCD, vt paulò ſupra in hac demonſtratione oſtendimus, ergo, colligẽdo, omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad omnia quadrata ſemiportionis, OCD, vna cum rectangulis bis ſub ſemiportione, OCD, & trilineo, CVD, ſumptis, erunt vt parallelogrammum, OV, ad ſemiportionem, OCD, vna cum exceſſu, quo dicta ſemiportio, OCD, excedit $\frac{2}{3}$. parallelogrammi, OV, ergo, per conuerſionem rationis, omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad omnia quadrata trilinei, DCV, quæ remanent detractis omnibus quadratis ſemiportionis, OCD, vna cum rectangulis ſub illa, & ſub trilineo, DCV, bis ſumptis, ab omnibus quadratis parallelogrammi, OV; (veluti detracto quadrato, EI, vna cum rectangulo bis ſub, EI, IF, remanet quadratũ, IF,) ad omnia quadrata trilinei, DCV, erunt vt parallelogrammum, OV, ad reſiduum, detracta ſemiportione, OCD, vna cum exceſſu, quo ipſa ſuperat duas tertias parallelogrammi, OV, à dicto parallelogrammo, OV.

Per D 23. l. 2.

Eſt verò parallelogrammum, OV, ad dictum ſpatium reſiduum proximè, vt 21. ad 2. nam ſi ſupponamus parallelogrammum, OV, eſſe 21. erit ſemiportio, OCD, earumdem partium proximè 16. $\frac{1}{2}$. eſt .n. ad eam, ſicut rectangulum, quod eſſet circulo, vel ellipſi, ABCD, circumſcriptum, habens latera ipſis, AC, BD, axibus parallela, ad eundem circulum, vel ellipſim .i. vt 14. ad 11. proximè, vt oſtendit Archimedes lib. de Dimenſione Circuli, eſt .n. vt 14. ad 11. ita 21. ad 16$\frac{1}{2}$. rurſus duæ tertiæ parallelogrammi, OV, ſunt 14. ſemiportio verò, OCD, quæ eſt proximè 16$\frac{1}{2}$. excedit $\frac{2}{3}$. parallelogrammi, OV, .ſ. 14. per 2$\frac{1}{2}$. ſi ergo ſemiportioni, OCD, quæ eſt ꝓximè 16$\frac{1}{2}$. iunxerimus exceſſum eiuſdem ſemiportionis ſuper $\frac{2}{3}$. parallelogrammi, OV, .i. 2$\frac{1}{2}$. fiet totum conſequens proximè 19. hoc ſi detrahatur à toto parallelogrammo, OV, quod

31. huius.

quod est 21. relinquentur 2. erit ergo parallelogrammũ, OV, ad hoc residuum proximè, vt 21. ad 2. vnde & omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad omnia quadrata trilinei, DCV, erunt proximè vt 21. ad 2. quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC patet, si nos præcisè sciamus, quam rationem habeant omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad omnia quadrata trilinei, DCV, quia etiam scimus, quam rationem habeant omnia quadrata, CD, ad omnia quadrata semiportionis, OCD, sciemus etiam, quam rationem habeant eadem ad rectangula sub semiportione, OCD, & trilineo, DCV, bis sumpta, & item nota erit ratio ad eadem semel sumpta, quæ si iungãtur omnibus quadratis semiportionis, OCD, componentur rectangula sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, & fiet nota ratio omnium quadratorum, OV, ad rectangula sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, quæ est eadem ei, quam habet parallelogrammum, OV, ad semiportionem, OCD, & ideò hæc erit nota, sicut etiam erit nota ratio parallelogrãmi circulo, vel ellipsi, ABCD, circumscripti, habentis latera parallela ipsis, AC, BD, ad eundem circulum, vel ellipsim, ABCD, & hinc haberetur circuli quadratura; ideò quærendum est, quam rationem habeãt præcisè omnia quadrata, OV, ad omnia quadrata trilinei, CDV; quod hucusq; nec alijs, nec mihi compertum esse potuit.

Per C. 23. l. 2.

Coroll. 1. 26. l. 2.

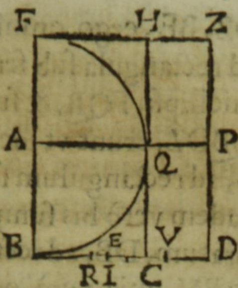
THEOREMA XIII. PROPOS. XIV.

SI circa parallelogrammi rectanguli quodlibet laterum, tamquam circa diametrum integrorum, semicirculus, vel semiellipsis, etiam ipso non existente rectangulo, descripti fuerint, circumferentia autem circuli, vel curua

elli-

ellipſis non pertingat, neque ſecet oppoſitum prædicto latus, ſit autem regula parallelogrammi baſis: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata figuræ, quæ reliquis tribus parallelogrammi lateribus (dempto eo, quod pro axi ſumptum eſt) & curua circuli, vel ellipſis continetur, erunt proximè, vt baſis eiuſdem parallelogrammi ad ſui reliquum, demptis ab ea $\frac{4}{1}\frac{1}{4}$. rectæ lineæ, quæ ſit æqualis dimidiæ ſecundæ diametri prædicti circuli, vel ellipſis, ſimnl cũ exceſſu, quo dicti $\frac{1}{1}\frac{1}{4}$. excedunt $\frac{2}{3}$. tertiæ proportionalis duarum, quarum prima eſt dicta baſis, ſecunda autem dicta ſecundæ diametri dimidia.

Sit parallelogrammum, FD, & circa latus, FB, vtcunque tamquam circa diametrum (intellige autem ſemper diametrum hic, & in ſequentibus, vt eſt nomen commune diametro, & axi) integri ſit deſcriptus ſemicirculus, vel ſemiellipſis, FQB, cuius curua, FQB, neq; tangat, neq; ſecet latus, ZD, oppoſitum lateri, FB, bifariam autem diuiſa, FB, in, A, & per, A, ipſi, BD, baſi ducta parallela, AP, ſecetur à curua, FQB, vtcunq; in, Q; erit aũt, AQ, dimidia ſecundæ axis circuli, vel ellipſis, cuius centrum, A; ducatur inſuper per, Q, ipſi, FB, parallela, HC,
37.1 Con. quæ tanget circulum dictum, vel ellipſim, & erit, BC, æqualis ipſi, AQ; fiat deinde, vt, DB, ad, BC, ita, BC, ad, BI, & ſumatur, BR, quæ ſit $\frac{2}{3}$, BI, & BE, quæ ſit $\frac{1}{7}\frac{1}{4}$. ipſius, CB, &, EV, quæ ſit æqualis ipſi, ER, regula verò ſit, BD. Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, FD, ad omnia quadrata figuræ, quę comprehenditur tribus lateribus, FZ, ZD, DB, & curua, FQB, eſſe, vt, BD, ad, DV, proximè. Omnia .n. quadrata parallelogrammi, FD, ad re-



rectangula sub parallelogrãmo, FD & semicirculo, vel semiellipsi, FQB, sunt vt parallelogrammum, FD, ad eundem semicirculum, vel semiellipsim, FQB; quia verò parallelogrammum, FD, ad parallelogrammum, FC, est vt, DB, ad, BC, & item parallelogrammum, FC, ad semicirculum, vel semiellipsim, FQB, est proximè vt 14. ad 11. idest vt, CB, ad, BE, ergo ex æquali parallelogrammum, FD, ad semicirculum, vel semiellipsim, FQB, erit vt, DB, ad, BE, & ideò omnia quadrata parallelogrammi, FD, ad rectangula sub parallelogrammo, FD, & semicirculo, vel semiellipsi, FQB, erunt vt, DB, ad, BE, .i. sumpta, DB, communi altitudine erunt, vt quadratum, DB, ad rectangulum sub, DB, BE, quod seruа.

Coroll. 1. 26. l. 2.

5. l. 2. Arch. de Dim. Cir.

5. l. 2.

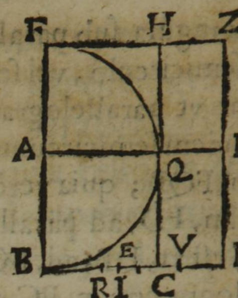
Aduerte nunc, quod rectangula sub parallelogrammo, FD, & semicirculo, vel semiellipsi, FQB, diuiduntur per curuam, FQB, in rectangula sub quadrilineo, FQBDZ, & semicirculo, vel semiellipsi, FQB, & in omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB, videndum ergo nunc est, quam rationem habeant omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB, quod sic patet; omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata, FC, sunt vt quadratum, DB, ad quadratum, BC, .i. ad rectangulum sub, DB, BI, nam tres, DB, BC, BI, sunt cõtinuè proportionales, omnia item quadrata, FC, omnium quadratorum semicirculi, vel semiellipsis, FQB, sunt sexquialtera .i. sunt vt rectangulum, DBI, ad rectangulum, DBR, quia, BR, est $\frac{2}{3}$, BI, ergo ex æquali omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB, sunt vt quadratũ, DB, ad rectangulum sub, DB, BR, omnia autem quadrara, FD, ad rectangula sub, FD, & semicirculo, vel semiellipsi, FQB, erant vt idem quadratum, DB, ad rectangulum sub,

Per C. 23. l. 2.

9. l. 2. Elici etiã potest ex 12. l. 2.

Coroll. 1. huius. 5. l. 2.

DB,



DB, BE, ergo omnia quadrata, FD, ad rectangula sub semicirculo, vel semiellipsi, FQB, & sub quadrilineo, FQBDZ, erunt vt idem quadratum, DB, ad rectangulum sub, DB, &, RE, ad eadem verò bis sumpta, vt idem quadratum, DB, ad rectangulũ sub, DB, & RV, quia verò omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB, sunt vt quadratum, DB, ad rectangulum sub, DB, BR, ergo colligendo omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB, vna cum rectangulis sub semicirculo, vel semiellipsi, FQB, & quadrilineo, FQBDZ, bis sumptis, erunt vt quadratum, DB, ad rectangula sub, DB, BR, DB, RV, .i. ad rectangulum sub, DB, BV; quia verò si ab omnibus quadratis, FD, subtraxeris omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB, vna cum rectangulis bis sub eodem semicirculo, vel semiellipsi, FQB, &
Per D.23. l.2. sub quadrilineo, FQBDZ, remanent omnia quadrata quadrilinei, FQBDZ, ideò, per conuersionem rationis, omnia quadrata parallelogrammi, FD, ad omnia quadrata quadri-
5. l.2. linei, FQBDZ, erunt vt quadratum, BD, ad rectangulum sub, BD, DV, .i. vt, BD, ad, DV, quod tantum proximè verificatur, non .n. parallelogrammum, FC, ad semicirculum, vel semiellipsim, FQB, est præcisè, vt 14. ad 11. sed tantum proximè, ideò, &c.

Desiderari nunc tantum videtur in hac demonstratione, quod probetur punctum, R, non identificari puncto, E, sed cadere inter, BE, quod sic facilè patet, cum .n. ostensum sit omnia quadrata, FD, ad rectangula sub parallelogrammo, FD, & semicirculo, vel semiellipsi, FQB, esse vt quadratum, DB, ad rectangulum sub, DB, BE, insuper ostensum sit omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB, esse vt quadratum, DB, ad

rectan-

rectangulum sub, DB, BR, quoniam rectangula sub, FD, & semicirculo, vel semiellipsi, FQB, sunt maiora omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, FQB, ideò etiam rectangulũ sub, DB, BE, semper maius est rectangulo sub, DB, BR, & ideò punctum, R, semper cadet inter punctum, B, & punctum, E, quocunq; deinde cadat punctum, I, vnde patet, &c.

Similiter, quia omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB, vna cum rectangulis sub eodem, & sub quadrilineo, FQBDZ, bis sumptis, minora sunt omnibus quadratis, FD, ideò, BV, composita ex tribus, BR, RE, EV, minor est ipsa, BD, nam, DB, ad, BV, est, vt omnia quadrata, FD, ad compositum ex omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, FQB, & ex rectangulis sub eodem, & sub quadrilineo, FQBDZ, bis sumptis, vnde omnia clarè patent.

COROLLARIVM.

HINC habetur omnia quadrata, FD, ad reliquũ sui, demptis omnibus quadratis quadrilinei, FQBDZ, esse, vt, DB, ad, BV.

THEOREMA XIV. PROPOS. XV.

SI circulo, vel ellipsi circumscribatur parallelogrammum, habebit latera eorundem diametris parallela; sumpto autem quolibet laterum pro regula; omnia quadrata dicti parallelogrammi rectanguli, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis inscripti, vna cum rectangulis bis sub eodẽ circulo, & duobus trilineis cuilibet laterum adiacentibus, quæ non fuerunt sumpta pro regu-

la, erunt, vt dictum parallelogrammum ad dictum circulum, vel ellipsim.

Sit circulus, vel ellipsis, MBEG, cuius centrum, A, per quod transeat diametri, ME, BG, ductis autem tangentibus circulum, vel ellipsim in punctis, M, B, E, G, donec cõcurrant, sit eidem circumscriptum parallelogrammum, HF, quod habebit latera parallela ipsis axibus, ME, BG, sit autem regula vtcunque, DF. Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, HF, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MBEG, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, MBEG, & sub trilineis, MGN, GFE, adiacentibus lateri, NF, sumpto vtcunque ex duobus, HD, NF, quæ non sunt regula, esse vt parallelogrammum, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG. Omnia .n. quadrata parallelogrammi, HF, sunt sexquialtera omnium quadratorum circuli, vel ellipsis, MBEG, & ideò sunt ad illa, vt parallelogrammum, HF, ad sui ipsius duas tertias, quod seruã.

27.1.Con.

Coroll. 1. huius.



Quoniam verò omnia quadrata parallelogrammi, AF, ad rectangula sub eodem, & sub semiportione, AEG, sunt vt parallelogrammum, AF, ad semiportionem, AEG, eadem verò ad omnia quadrata semiportionis, AEG, sunt sexquialtera .i. sunt vt parallelogrammum, AF, ad sui ipsius $\frac{2}{3}$. igitur eadem ad reliqua .s. ad rectangula sub semiportione, AEG, & trilineo, GEF, erunt vt parallelogrammum, AF, ad excessum, quo semiportio, AEG, excedit $\frac{2}{4}$. parallelogrammi, AF, omnia autẽ quadrata, BF, sunt quadrupla omnium quadratorum, AF, ergo omnia quadrata, BF, ad rectangula sub semiportione, AEG, & trilineo, GEF, erunt vt quater parallelogrammum, AF, ad dictum excessum

Coroll. 1. 26. l. 2.

9. l. 2.

cessum .i. vt parallelogrammum, HF, ad dictum excessum, & consequentibus quadruplicatis, omnia quadrata parallelogrammi, BF, ad rectangula quater sub semiportione, AEG, & trilineo, GEF, .i. ad rectangula bis sub portione, BEG, & trilineo, GEF, erunt vt, HF, ad dictum excessum quater sumptum, quia enim, AE, est diameter bifariam diuidit in portione, BEG, omnes ipsi, DF, æquidistantes, & ideò rectãgula quater sub semiportione, AEG, & trilineo, GEF, fiunt rectangula bis sub portione, BEG, & trilineo, GEF, omnia ergo quadrata parallelogrammi, BF, ad rectangula bis sub portione, BEG, & trilineo, GEF, vel eorum dupla .s. omnia quadrata parallelogrammi, HF, ad rectangula bis sub circulo, vel ellipsi, MBEG, & sub trilineis, MGN, GEF, erunt vt parallelogrammum, HF, ad quatuor excessus semiportionis, AEG, super duas tertias parallelogrammi, AF, .i. ad excessum circuli, vel ellipsis, MBEG, super $\frac{2}{3}$. parallelogrãmi, HF, erant autem omnia quadrata parallelogrammi, HF, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MBEG, vt idem parallelogrammum, HF, ad $\frac{2}{3}$. sui ipsius, ergo omnia quadrata parallelogrammi, HF, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MBEG, simul cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, MBEG, & sub trilineis, MNG, GFE, erunt vt parallelogrammum, HF, ad sui ipsius $\frac{2}{3}$. vna cum excessu circuli, vel ellipsis, MBEG, super easdem duas tertias .i. erunt vt parallelogrammum, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG, quod erat ostendendum.

10. l. 2.

ALITER.

Omnia quadrata, BF, ad rectangula sub, BF, & sub portione, BEG, sunt vt, BF, ad portionem, BEG, rectangula verò sub portione, BEG, & parallelogrammo, BF, diuiduntur in rectangula sub, BEG, & , BDE, trilineo .i. sub trilineo, GEF, & sub, BEG, & trilineo, GEF, & sub, BEG, & eadem portione, BEG, .i. in omnia quadrata portionis, BEG, ergo omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata portionis,

Coroll. 1. 26. l. 2. Per A. 13. l. 2.

nis, BEG, ſimul cum rectangulis ſub portione, BEG, & trilineo, GEF, bis ſumptis, vel omnia quadrata, HF, ad omnia quadrata circuli, vel ellipſis, MBEG, ſimul cum rectãgulis ſub circulo, vel ellipſi, MBEG, & trilineis, MNG, GFE, bis ſumptis, erunt vt, BF, ad portionem, BEG, vel vt, HF, ad circulum, vel ellipſim, MBEG, quod erat oſtendendum.

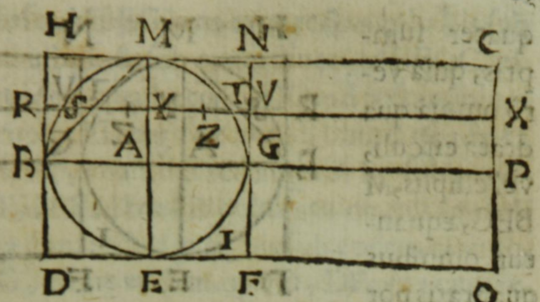
THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

SI à parallelogrammo per lineam lateribus parallelam parallelogrammum abſcindatur, quod intelligatur circulo, vel ellipſi circumſcriptum, regula autem ſit parallelogrammi baſis: Omnia quadrata circũſcripti parallelogrammi, ſimul cum rectangulis bis ſub eodem, & ſub reliquo parallelogrammo per dictam parallelam conſtituto, ad omnia quadrata dicti circuli, vel ellipſis, ſimul cum rectangulis bis ſub eodem circulo, vel ellipſi, & ſub quadrilineo duabus parallelis circulum, vel ellipſim tangentibus, incluſaque ab ijſdem curua, & latere totius parallelogrammi, quod circulum, vel ellipſim non tangit, comprehenſo, erunt, vt dictum circumſcriptum parallelogrammum ad eundem circulum, vel ellipſim.

Sit ergo parallelogrammum, HO, cuius baſis, & regula, DO, ductaque, NF, intra ipſum lateribus, HD, CO, parallela, ſit abſciſſum à toto parallelogrammo, HO, parallelogrammum, HF, intelligatur autem circumſcriptũ circulo, vel ellipſi, MBEG, cuius centrum, A, per quod tranſeant diametri, ME, &, BG, quæ ſit producta vſque in, P,

erunt

erunt autem dictæ diametri parallelæ parallelogrāmi, HO, lateribus, transibuntque per puncta cōtactuum, M, B, E, G.

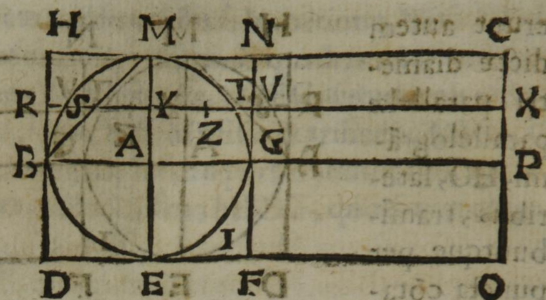


Dico igitur omnia quadrata parallelogrammi, HF, simul cum rectangulis bis sub, HF, & parallelogrammo, FC, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MBEG, simul cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, MBEG, & sub quadrilineo, MGEOC, esse vt parallelogrammum, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG: Omnia .n. quadrata parallelogrammi, HO, ad omnia quadrata parallelogrammi, MO, sunt vt quadratum, DO, ad quadratum, OE, omnia item quadrata parallelogrammi, MO, ad rectangula sub parallelogrammo, MO, & portione, MGE, sunt vt, MO, ad portionem, MGE, fiat vt, MF, ad portionem, MGE, ita, FE, ad, EI, erit ergo vt, MO, ad portionē, MGE, ita, OE, ad, EI, ergo omnia quadrata, MO, ad rectāgula sub, MO, & portione, MGE, erunt vt, OE, ad, EI, .i. vt quadratum, OE, ad rectangulum sub, OE, EI, erant autem omnia quadrata, HO, ad omnia quadrata, OM, vt quadratum, DO, ad quadratum, OE, ergo ex æquali omnia quadrata, HO, ad rectangula sub, MO, & sub portione, MGE, erunt vt quadratum, DO, ad rectangulum sub, OE, EI, ad eadem verò quater sumpta, vt quadratum, DO, ad rectangulum sub, OE, & quadrupla, EI; rectangula autem sub, MO, & portione, MGE, æquantur rectāgulis sub quadrilineo, MGEOC, & portione, MGE, vna cum omnibus quadratis portionis, MGE, illa igitur quater sumpta reddunt quater rectāgula sub portione, MGE, & quadrilineo, MGEOC, vna cum omnibus quadratis portionis, MGE,

9. l. 2.
Coroll. 1. 26 l. 2.
5 l. 2.
Per C 23. l. 2.

qua-

Per D. 23. l. 2. quater sumptis, quia verò omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M BEG, æquantur omnibus quadratis por



tionis, MBE, & portionis, MGE, vna cum rectangulis bis sub vtrisq; portionibus .i. vna cum omnibus quadratis portionis, MGE, bis sumptis, & omnia quadrata portionis, M BE, æquantur omnibus quadratis portionis, MGE, ideò omnia quadrata portionis, MGE, quater sumpta æquãtur omnibus quadratis circuli, vel ellipsis, MBEG, item rectã-gula sub portione, MGE, & quadrilineo, MGEOC, quater æquantur rectangulis sub toto circulo, vel ellipsi, MBEG, & sub quadrilineo, MGEOC, bis sumptis, itaut hucusque probauerimus rectangula sub portione, MGE, & parallelogrammo, MO, quater sumpta æquari omnibus quadratis circuli, vel ellipsis, MBEG, vna cum rectãgulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, & sub quadrilineo, MGEOC, quoniam verò ostensum est omnia quadrata, HO, ad rectangula sub portione, MGE, & parallelogrammo, MO, quater sumpta esse, vt quadratum, DO, ad rectangulum sub, OE, & quadrupla, EI, ideò ex æquali omnia quadrata, HO, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MBEG, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, & sub quadrilineo, MGEOC, erunt vt quadratum, DO, ad rectãgulum sub, OE, & sub quadrupla, EI, quod serua.

24. l. 2. Quoniam verò omnia quadrata, HF, vna cum rectangulis bis sub parallelogrammis, HF, FC, ad omnia quadrata, HO, sunt, vt vnum, ad vnum .s. vt quadratum, DF, vna cum rectangulo bis sub, DF, FO, ad quadratum, DO, omnia quadrata verò parallelogrammi, HO, ad omnia quadra-

ta

ta circuli, vel ellipsis, MBEG, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, & sub quadrilineo, MGEOC, esse ostensa sunt, vt idem quadratum, DO, ad rectangulum sub, OE, & quadrupla, EI; ergo ex æquali omnia quadrata parallelogrammi, HF, vna cum rectangulis bis sub parallelogrammis, HF, FC, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MBEG, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, MBEG, erunt vt quadratum, DF, vna cum rectangulo sub, DF, FO, bis, ad rectangulũ sub, OE, & quadrupla, EI, vel erunt, vt eorum dimidia .s. vt dimidiũ quadrati, DF, quod erit rectangulum, DFE, vna cum rectangulo sub, DFO, semel (ex quibus cõponetur rectangulum sub, OE, FD,) ad rectangulum sub, OE, & dupla, EI, vel, vt adhuc horum dimidia .s. vt rectangulũ sub, OE, &, ED, ad rectangulũ sub, OE, &, EI, .i. vt, DE, ad, EI, quia, OE, altitudo est communis, ostensum ergo est omnia quadrata, HF, vna cũ rectangulis bis sub parallelogrammis, HF, FC, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MBEG, vna cum rectangulis bis sub eodem, & sub quadrilineo, MGEOC, esse, vt, DE, vel, FE, ad, EI, .i. vt parallelogrammũ, MF, ad portionem, MGE, vel vt parallelogrammum, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG, quod erat propositum.

17. huius
5.l.2.

11 huius

THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

OMnia quadrata parallelogrammi circulo, vel ellipsi circumscripti (regula basi) ad omnia quadrata figuræ compositę ex circulo, vel ellipsi, & ex duobus trilineis adiacẽtibus lateri, quod non est regula, nec ipsi parallelum, veluti dicitur in Th. 14. erunt, vt idem parallelogrammum ad circulum, vel ellipsim, cui circum-

scri-

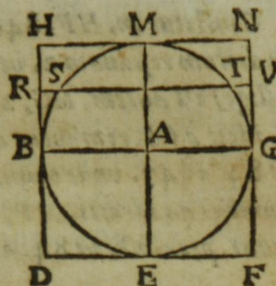
ſcribitur, vna cum eo ſpatio, quod relinquitur, dempto à quarta parte dicti parallelogrammi circuli, vel ellipſis quadrante, ſimul cũ exceſſu, quo idem quadrãs ſuperat duas tertias dicti parallelogrammi .i. erit, proximè, vt 21. ad 17.

Exponatur denuò figura Theor. 14. Dico omnia quadrata parallelogrãmi, HF, ad omnia quadrata figuræ compoſitæ ex circulo, vel ellipſi, MBEG, & trilineis, MGN, EGF, eſſe vt, HF, ad circulum, vel ellipſim, MBEG, vna cum reſiduo, dempto à parallelogrammo, MG, circuli, vel ellipſis, quadrante, MGA, ſimul cum eo exceſſu, quo idem quadrans ſuperat duas tertias parallelogrammi, MG. Ete-
15. huius. nim oſtenſum eſt omnia quadrata, HF, ad omnia quadrata circuli, vel ellipſis, MBEG, vna cum rectãgulis bis ſub eodem, & ſub trilineis, MNG, GFE, eſſe vt, HF, ad circulum, vel ellipſim, MBEG, quod ſeruã.

Vlterius, quia omnia quadrata, HG, ad omnia quadra-
9. l. 2. ta, MG, ſunt vt quadratum, BG, ad quadratum, GA, .i. vt parallelogrammum, HF, ad parallelogrammum, MG; in-
23. huius. ſuper omnia quadrata, MG, ad omnia quadrata trilinei, MGN, ſunt vt, MG, ad reſiduũ dempto quadrante, MAG, ſimul cum eo ſpatio, quo idem ſuperat duas tertias rectanguli, MG, ab eodem rectangulo, MG, ergo ex æquali omnia quadrata, HG, ad omnia quadrata trilinei, MGN, erunt vt, HF, ad reſiduum, dempto quadrante, MAG, ſimul cum eo ſpatio, quo idem ſuperat $\frac{2}{3}$. rectanguli, MG, ab eodem
10. l. 2. rectangulo, MG, &, duplicatis proportionis terminis, omnia quadrata, HF, ad omnia quadrata trilineorum, MNG, GFE, erunt vt duplum, HF, ad duplum illius reſidui .i. vt, HF, ad vnum illud reſiduum; omnia autem quadrata eiuſdem, HF, ad omnia quadrata circuli, vel ellipſis, MBEG, ſimul cũ rectangulis bis ſub eodem, & ſub trilineis, MNG,

GFE,

GFE, sunt vt, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG, ergo, colligẽdo, omnia quadrata, HF, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MBE G, & ad omnia quadrata trilineorum, MNG, GFE, simul cũ rectangulis bis sub circulo, vel ellipsi, M BEG, & trilineis, MNG, GFE, idest



ad omnia quadrata figuræ, NMBEF, erunt vt, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG, simul cum residuo, dempto à parallelogrammo, MG, quadrante, MAG, & eo spatio, quo idem excedit duas tertias parallelogrammi, MG. Per D. 18. l. 2.

Dico nunc hanc rationem esse, vt 21. ad 17. proximè, parallelogrammum enim, MG, ad dictum residuum est, vt 21. ad 2. proximè, vt ostendimus Th. 12. parallelogrammum verò, HF, quadruplum est ipsius, MG, ergo, HF, ad illud residuum est, vt 84. ad 2. proximè, est autem idem, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG, vt 14. ad 11. proximè .i. vt 84. ad 66. ergo parallelogrammũ, HF, ad compositum ex circulo, vel ellipsi, MBEG, & dicto residuo est, vt 84. ad 68. proximè .i. vt 21. ad 17. proximè, ideò omnia quadrata, HF, ad omnia quadrata figuræ, NMBEF, sunt proximè, vt 21. ad 17. patet ergo propositum.

COROLLARIVM I.

HINC patet, quoniam omnia quadrata, HF, omnium quadraterũ, MF, sunt quadrupla, quod sunt ad illa, vt, HF, ad, MG, & ideò, si dempseris omnia quadrata, MF, ab omnibus quadratis figuræ, NMBEF, omnia quadrata, HF, ad residuum erunt, vt, HF, ad illud, quod relinquitur, dempto, MG, à circulo, vel ellipsi, MBEG, & residuo sæpius dicto .s. quod remanet ablato ab, MG, quadrãte, MAG, & eo excessu, quo idem superat $\frac{2}{3}$, *MG, est aũt, HF, ad hac remanẽtia spatia proximè, vt 84. ad 47.* p. l. 2.

Conſtitue .n. HF, 84. erit circulus, vel ellipſis, MBEG, 66. & dictum reſiduum 2. vt ſupra oſtendimus (proximè ſemper intellige) eſt autem, MG, 21. demas ergo 21. à compoſito ex 66. & 2. ideſt à 68. remanent 47. eſt ergo, HF, ad remanentia ſpatia, vt 84 ad 47. vnde omnia quadrata, HF, ad reſiduum, demptis omnibus quadratis, MF, ab omnibus quadratis figuræ, NMBEF, erunt, proximè, vt 84. ad 47. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM II.

HINC *etiam patet, quoniam omnia quadrata, MF, ad omnia quadrata trilineorum, MNG, GFE, ſunt, vt 21. ad 2. proximè, quod ad ſui reliquum erunt, vt 21. ad 19. proximè, ſunt autem omnia quadrata, HF, quadrupla omnium quadratorum, MF, & ideò omnia quadrata, HF, ad reſiduũ, demptis omnibus quadratis trilineorum. MNG, GFE, ab omnibus quadratis, MF, erunt proximè, vt 84. ad 19. ſunt autem omnia quadrata, HF, ad reſiduum, demptis omnibus quadratis, MF, ab omnibus quadratis figuræ, NMBEF, vt 84. ad 47. proximè, ergo reſiduũ primum .i. quod relinquitur, demptis omnibus quadratis trilineorum, MNG, GFE, ab omnibus quadratis, MF; ad reſiduum ſecundum .i. ad id, quod relinquitur, demptis omnibus quadratis, MF, ab omnibus quadratis figuræ, NMBEF, erit proximè, vt 19. ad 47. vnde patet, &c.*

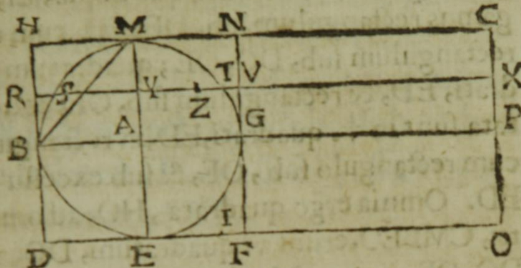
THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

EXponatur denuo figura Prop. 16. Dico omnia quadrata, HO, (regula eadem ibi ſumpta) ad omnia quadrata figuræ compoſitæ ex parallelogrammo, MO, & ſemicirculo, vel ſemiellipſi, MBE, eſſe, vt quadratum, DO, ad rectangulum ſub, DO, OE, vna cum rectãgulo ſub,

OE,

OE, & sub excessu, quo dupla, EI, superat, EF, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, DE.

QVoniam ergo omnia quadrata figuræ, CMBEO, diuiduntur per lineam, ME, in omnia quadrata parallelogrammi, MO, in omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, MBE, & in rectangula bis sub, MO, & sub semicirculo, vel semiellipsi, MBE, patet primò, quod omnia quadrata, HO, ad omnia quadrata, MO, sunt, vt quadratũ, DO, ad quadratum, OE. Insuper omnia quadrata, HO, ad omnia quadrata, HE, sunt vt quadratum, OD, ad quadratum, DE, omnia verò quadrata, HE, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, MBE, sunt vt quadratum, DE, ad sui ipsius $\frac{2}{3}$. ergo ex æquali omnia quadrata, HO, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, MBE, sũt vt quadratum, OD, ad $\frac{2}{3}$. quadrati, DE. Vlterius omnia quadrata, HO, ad omnia quadrata, MO, sunt vt quadratum, DO, ad quadratum, OE, omnia item quadrata, MO, ad rectangula sub, MO, & semicirculo, vel semiellipsi, MBE, sunt vt, OM, ad semicirculum, vel semiellipsim, MBE, .i. vt, OE, ad, EI, nam facta est, FE, ad, EI, vt, MF, ad semicirculum, vel semiellipsim, MGE; ad eadem verò rectangula bis sumpta, erunt vt, OE, ad duplam, EI; igitur, colligendo, omnia quadrata, HO, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, MBE, ad omnia quadrata, MO, & ad rectangula bis sub semicirculo, vel semiellipsi, MBE, & sub, MO, simul sumpta .i. ad omnia quadrata figuræ, CMBEO, erunt



Per D. 25 l. 2.

Coroll. 1 huius.

Coroll. 1. 26 l. 2.

vt quadratum, OD, ad quadratũ, OE, ad $\frac{2}{3}$. quadrati, DE, cum rectangulo sub, OE, & dupla, EI, simul sumpta; quia verò semicirculus, vel semiellipsis, MGE, est plusquam dimidium parallelogrammi, MF, etiam, EI, erit plusquam dimidia, EF; & ideò dupla, EI, excedet ipsam, EF, vel ipsam, DE, rectangulum ergo sub, OE, & dupla, EI, poterimus diuidere in rectangulum sub, OE,&, ED, & in rectangulũ sub, OE, & excessu, quo dupla, EI, superat, ED, iungamus rectangulum sub, DE, EO, cum quadrato, EO, fiet rectangulum sub, DO, OE; quadratum ergo, OE, $\frac{1}{3}$. quadrati, ED, & rectangulum sub, OE, & dupla, EI, commutata sunt in $\frac{2}{3}$. quadrati, ED, in rectangulum sub, DO, OE, cum rectangulo sub, OE, & sub excessu duplæ, EI, super, ED. Omnia ergo quadrata, HO, ad omnia quadrata figuræ, CMBEO, erunt vt quadratum, DO, ad rectangulũ sub, DO, OE, cum rectãgulo sub, OE, & sub excessu duplæ, EI, super, ED, vel, EF, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, DE, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

PATET autem omnia quadrata, HP, ad omnia quadrata figuræ, BMCP, esse pariter, vt quadratum, BP, ad rectangulum sub, BP, PA, vna cum rectangulo sub, PA, & sub excessu, quo dupla, EI, superat, EF, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, BA. Et quoniam, iuncta, BM, ostensum est omnia quadrata, HP, ad omnia
28. l. 2. *quadrata trapezij, MB, PC, esse vt quadratum, BP, ad rectãgulum, BPA, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, AB, ideò eadem omnia quadrata, HP, ad residuum omnium quadratorum figuræ, quæ eisdem, MCPB, & curua, MB, continetur, demptis ab ijsdem omnibus quadratis trapezij, BMCP, erunt vt idem quadratum, BP, ad rectangulum sub, AP, & sub excessu duplæ, EI, super, EF, vna cum $\frac{2}{3}$. quadrati, BA.*

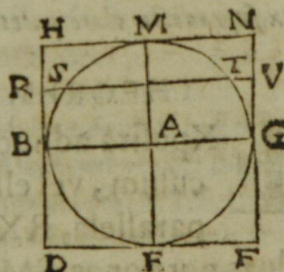
THEO-

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

EXposita adhuc figura Propos. 15. & intra circulum, vel ellipsim, MBEG, ducta, RV, vtcunq; regulę, DF, parallela, diuidente ipsum circulum, vel ellipsim in duas vtcunque portiones, SMT, SET. Dico omnia quadrata portionis, SMT, cum rectangulis bis sub eadem portione, & sub quadrilineo, MTVN, ad omnia quadrata portionis, SET, cum rectangulis bis sub eadem portione, & sub trilineis, TGV, GEF, esse vt portio, SMT, ad portionem, SET.

Quoniam .n. rectangula sub portione, SMT, & parallelogrammo, HV, ad omnia quadrata, HV, sunt vt portio, SMT, ad parallelogrāmum, HV, rectangula verò sub, SMT, & parallelogrammo, HV, diuiduntur in rectangula sub, SMT, & sub, SMT, .i. in omnia quadrata, SMT, & in rectangula sub, SMT, & sub quadrilineis, HRSM, MTVN, .i. bis sub, SMT, & sub quadrilineo, MTVN; nam cū, ME, sit diameter, bifariam diuidit tum ordinatim applicatas in parallelogrammo, HF, tum in circulo, vel ellipsi, MBEG, & ideò e cceſſus earundem linearum hinc inde relinquuntur æquales, vnde in quadrilineis, HRSM, MTVN, lineæ in eadem rectitudine sumptæ sunt æquales, ideò omnia quadrata portionis, SMT, & rectangula sub eadem, & sub quadrilineo, MTVN, bis sumpta, sunt ad omnia quadrata, HV, vt portio, SMT, ad parallelogrammum, HV. Omnia insuper quadrata, HV, ad

Coroll. 1. 26. l. 2.
Per A. 23. l. 2.



ad

10 l. 2. ad omnia quadrata, VD, sunt vt, HR, ad, RD, .i. vt, HV, ad, VD; eodem deniq; modo, quo supra, ostendemus omnia quadrata, RF, ad omnia quadrata portionis, SET, cum rectangulis bis sub eidem, & sub trilineis, TGV, GEF, esse vt, RF, ad portionem, SET, ergo ex æquali, omnia quadrata portionis, SMT, cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, MTVN, ad omnia quadrata portionis, SET, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, TGV, GFE, erunt vt portio, SMT, ad portionem, SET, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM.

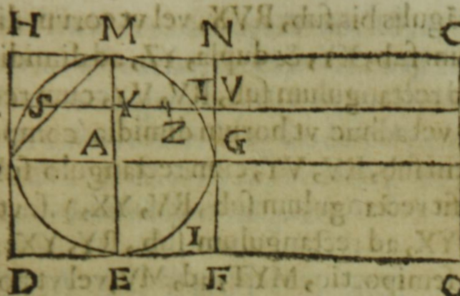
HINC patet omnia quadrata parallelogrammorum in eadem altitudine cum portionibus, vel frustibus portionum existentium, ad omnia quadrata earundem simul cum rectangulis bis sub ijsdem, & sub quadrilineis, vel trilineis, quæ illis è regione respondent lateri, NF, adiacētia, veluti supra fuerunt quadrilineum, MTVN, & trilineum, TGV, GEF, esse, vt eadem parallelogramma ad easdem portiones, vel portionum frusta, quod ex supradictis clarè patet.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

EXposita adhuc figura Prop. 16. & intra circulum, vel ellipsim ducta quacunq; regulæ parallela, RX, diuidente ipsum vtcunq; in duas portiones, SMT, SET. Dico omnia quadrata portionis, SMT, cum rectāgulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, MTXC, ad omnia quadrata portionis, SET, cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, TGEOX, esse vt portio, SMT, ad portionem, SET.

Fiat

Fiat prius, vt, MV, ad semiportionem MYT, sic, VY, ad, YZ: Omnia ergo quadrata, MX, ad rectãgula sub, MX, & semiportione, MYT, sunt vt, MX, ad, MYT, diuide rectangula sub, MX, & MYT, in omnia quadrata, MYT, & in rectangula sub, MYT, & sub, MTXC, omnia ergo quadrata, MX, ad omnia quadrata, MYT, cum rectangulis sub, MYT, & sub quadrilineo, MTXC, erunt vt, MX, ad, MYT, .i. vt, XY, ad, YZ, .i. vt quadratum, XY, ad rectangulum sub, XY, &, YZ, eadem verò ad hæc quater sumpta erunt, vt quadratum, XY, ad rectangulum sub, XY, & quadrupla, YZ, sunt autem omnia quadrata semiportionis, MYT, quater sumpta æqualia omnibus quadratis portionis, MST, & rectangula sub, MYT, & quadrilineo, MTXC, quater sumpta æqualia rectangulis sub eodem quadrilineo, & sub portione, SMT, bis sumptis, nam portio, SMT, bis cõtinet semiportionem, MYT, ergo conuertendo, omnia quadrata portionis, SMT, cum rectangulis bis sub eadem, & quadrilineo, MTXC, ad omnia quadrata, MX, erunt vt rectangulum sub quadrupla, YZ, & sub, YX, ad quadratũ, YX, omnia autem quadrata, MX, ad omnia quadrata, HV, cum rectangulis bis sub parallelogrammis, HV, VC, sunt vt vnum ad vnum .i. vt quadratum, YX, ad quadratum, RV, cum rectangulis bis sub, RV, VX, ergo ex æquali omnia quadrata portionis, SMT, cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, MTX, ad omnia quadrata, HV, cum rectangulis bis sub parallelogrammis, HV, VC, erunt vt rectangulum sub, XY, & quadrupla, YZ, ad quadratum, RV, cum



Coroll. 1. 26. l. 2.

C.23. l. 2.

D.23. huius.

re-

rectãgulis bis ſub, RVX, vel vt eorum dimidia .ſ. vt rectangulum ſub, XY, & dupla, YZ, ad dimidium quadrati, RV, .ſ. ad rectangulum ſub, RV, VY, cum rectangulo ſub, RV, VX, vel adhuc vt horum dimidia (compone autem rectangulum ſub, RV, VY, cum rectangulo ſub, RV, VX, ex quibus fit rectangulum ſub, RV, YX,) .ſ. vt rectangulum ſub, ZY, YX, ad rectangulum ſub, RY, YX, .ſ. vt, ZY, ad, YR, .ſ. vt ſemiportio, MYT, ad, MV, vel vt portio, SMT, ad, HV.

Inſuper omnia quadrata, HV, cum rectangulis bis ſub parallelogrammis, HV, VC, ad omnia quadrata, RF, cum rectangulis bis ſub parallelogrammis, RF, FX, ſunt vt, HR, ad, RD, & tandem modo ſuperiori oſtendemus omnia quadrata, RF, cum rectangulis bis ſub parallelogrammis, RF, FX, ad omnia quadrata portionis, SET, cum rectãgulis bis ſub eadem, & ſub quadrilineo, TGEOX, eſſe vt, RF, ad portionem, SET, ergo ex æquali omnia quadrata portionis, SMT, cum rectangulis bis ſub eadem, & ſub quadrilineo, MTXC, ad omnia quadrata portionis, SET, cum rectangulis bis ſub eadem, & ſub quadrilineo, TGEOX, erunt vt portio, SMT, ad portionem, SET, quod oſtendere oportebat.

COROLLARIVM.

HINC patet omnia quadrata parallelogrammorum in eadem altitudine cum portionibus, vel portionum fruſtibus exiſtentium, vna cum rectangulis bis ſub iiſdem parallelogrammis, & reliquis parallelogrammis illis in directum exiſtentibus, ad omnia quadrata portionum, vel fruſtorũ eorundem, ſimul cum rectangulis bis ſub iiſdem, & ſub quadrilineis illis in directum iacentibus, veluti fuerant quadrilineum, MTXC, TGEOX, eſſe, vt dicta parallelogramma ad dictas portiones, vel portionum fruſta; quod ex prædictis clarè patet; Vnde ex. g. omnia quadrata, RG, ſimul cum rectangulis bis ſub parallelogrammis, RG, GX, ad omnia quadrata fruſti, SBGT, cum rectangulis bis ſub, SGBT,

& qua-

& quadrilineo, TG, PX, erunt vt parallelogrămum, RG, ad finitum, SBGT, hoc .n. pariter ostendetur, veluti probatum est omnia quadrata, HV, simul cum rectangulis bis sub, HV, VC, ad omnia quadrata portionis, SMT, simul cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, MTXC, esse vt, HV, ad portionem, SMT, vnde manifestum est, quod in hoc Corollario colligitur.

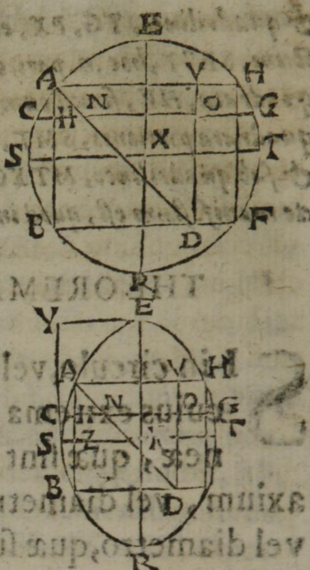
THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

SI in circulo, vel ellipsi aptetur recta linea, per cuius extrema puncta ducantur duæ rectæ lineæ, quæ sint (existente apta parallela vni axium, vel diametrorum) parallelæ secundo axi, vel diametro, quæ sumatur pro regula: Rectangula sub portione minori abscissa per aptatam, & sub quadrilineo, quod aptata, & duabus dictis parallelis vsq; ad curuam circuli, vel ellipsis productis, & ab ijsdem inclusa curua comprehenditur, in circulo, erunt æqualia rectangulis sub duobus triangulis per diametrum quadrati, vel rhombi (& hoc in ellipsi cum diametri coniugatę se obliquæ secabunt, quibus latera dicti rhombi sint æquidistantia) ab eadem aptata descripti in ijsdem constitutis: In ellipsi verò ad eadem rectangula, erunt vt quadratum secundi axis, vel diametri, ad quadratum primæ.

Sit primò circulus, ABFH, & in eo vtcunque aptata recta, AB, parallela diametro, ER, & per puncta, AB, producantur vsq; ad circumferentiam, HF, duæ, AH, BF, parallelæ secundæ diametro, ST, quæ sumatur pro regula, quia Defin. 5. 4. Elem.

 autem

autem circulus est, ESRT, ideò coniugatæ diametri, ER, ST, se secant ad angulos rectos, & sunt coniugati axes, & ideò, AH, BF, sunt perpendiculares ipsi, AB; super, AB, ergo sit descriptum quadratum, AD, & in eo ducta diameter, AD. Dico ergo rectangula sub portione, ASB, & quadrilineo, AB, FH, esse æqualia rectangulis sub duobus triãgulis, ABD, AVD, sumatur enim in, AB, vtcunq; punctum, M, & per, M, ducatur ipsi, BF, parallela, CG, secans, AD, in, N; VD, in, O; & curuam circuli in, CG;



quia ergo duæ, AB, CG, in circulo se secant in puncto, M, rectangulum, GMC, est æquale rectangulo, BMA, & quia, AM, est æqualis ipsi, MN, &, MB, ipsi, NO, rectangulum, AMB, est æquale rectangulo, MNO, ergo rectangulum, CMG, erit æquale rectangulo, MNO, idem de cæteris probabitur, ergo rectangula sub portione, ACB, & quadrilineo, ABFGH, erunt æqualia rectangulis sub triangulis, ABD, AVD, quod est propositum in circulo.

35.3.ele.

Sit nunc in inferiori figura ellipsis, ESRT, centrum, X, axes, vel diametri coniugatæ, ER, prima, ST, secunda, sit autem in ipso aptata, AB, parallela ipsi, ER, per cuius extrema puncta, AB, productæ sint vsque ad curuam ellipsis duæ, AH, BF, parallelæ secundæ axi, vel diametro, ST; sit insuper descriptum quadratum, vel rhombus, AD, cuius latera diametris, ER, ST, sint parallela, & in eo ducta diameter, AD, & per puncta, E, S, sint etiam ductæ tangentes, EY, SY, coincidentes in, Y, quæ erunt parallelæ diametris, ER, ST, .s. YE, ipsi, ST, & YS, ipsi, ER; erit ergo,

Velut in circulo.

vt quadratum, EY, ad quadratum, YS, ita rectangulum, TZS, ad rectangulum, BZA, eodem modo (sumpto in, AB, vtcunq; puncto, M, & per, M, ducta, CMG, parallela ipsi, BF,) sequetur rectangulum, GMC, ad rectangulum, BMA, esse vt quadratum, EY, ad quadratum, YS, ergo rectangulum, TZS, ad rectangulum, BZA, erit vt rectangulū, GMC, ad rectangulum, BMA, & sic de reliquis ostendemus .i. rectangula sub portione, ASB, & quadrilineo, AHTFB, ad rectangula sub omnibus abscissis, AB, & residuis abscissarum eiusdem .i. ad rectangula sub triangulis, ABD, AVD, (sunt .n. rectangula sub omnibus abscissis, AB, & residuis abscissarum eiusdem, æqualia rectāgulis sub duobus triangulis, ABD, AVD,) erunt vt rectangulum, TZS, ad rectangulum, AZB, .i. vt quadratum, EY, ad quadratum, YS, vel vt quadratum, SX, ad quadratum, XE, vel vt quadratum, ST, ad quadratū, ER; ergo rectangula sub portione, ASB, & quadrilineo, AHTFB, ad rectangula sub triangulis, ABD, AVD, erunt vt quadratum, ST, ad quadratum, ER; quod ostendere oportebat. Ex 3. Conic p. 17. Coroll 2. prop. 19. l. 2.

COROLLARIVM.

HINC patet, quoniam probauimus, omnia quadrata, AD, sexcupla esse rectangulorum sub triangulis, ABD, AVD, quod in circulo eadem quadrata sint sexcupla rectangulorum sub portione, ASB, & quadrilineo, AHTFB. In ellipsi verò, quia pariter omnia quadrata, AD, rectangulorum sub triangulis, ABD, AVD, sunt sexcupla .i. sunt ad illa, vt cubus, AB, ad sui ipsius sextam partem, insuper rectangula sub triangulis, ABD, AVD, ad rectangula sub portione, ASB, & quadrilineo, AHTFB sunt vt quadratum, ER, conuertendo, ad quadratum, ST, .i. vt sexta pars cubi, AB, ad eiusdem talem partem, ad quam ipsa sexta pars sit, vt quadratum, ER, ad quadratum, ST, hinc ex æquali omnia quadrata, AD, in ellipsi, ad rectāgula sub portione, ASB, & qua- Corol. 24. l. 2.

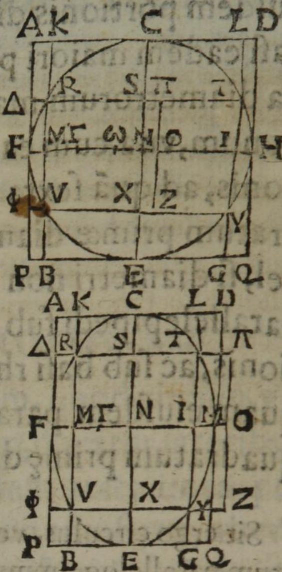
drilineo, AHTFB, erunt vt cubus, AB, ad sui ipsius eam partem, ad quam eiusdem cubi, AB, sexta pars sit veluti quadratum, ER, ad quadratum, ST. Verum si in ellipsi diametri non sint axes, vice cubi, AB, concludemus omnia quadrata, AO, ad rectangula sub portione, ASB, & quadrilineo, AHTFB, esse vt parallelepipedum sub altitudine, AB, basi rhombo, quod ab ipsa, AB, describitur, ad sui ipsius eam partem, ad quam eiusdem parallelepipedi pars sexta sit veluti quadratum, ER, ad quadratum, ST.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII.

SI intra parallelogrammum, quod circulo, vel ellipsi sit circumscriptum, ducatur lateribus eiusdem parallela quædam recta linea per circuli, vel ellipsis centrum non transiens, altero reliquorum laterum regula existente. Omnia quadrata parallelogrammi, quod maiori portioni circuli, vel ellipsis iam dicti, remanet circũscriptum, ad omnia quadrata figuræ compositæ ex maiori portione, & duobus trilineis, qui ad basim eiusdem hinc inde extra constituuntur, demptis eorundem trilineorum omnibus quadratis, erunt in circulo, vt parallelepipedum sub basi parallelogrammo dictæ portioni maiori circumscripto, altitudine eiusdem portionis diametro ad cylindricum sub basi eadem maiori portione, altitudine differentia diametrorum maioris, ac minoris factarum portionum, vna cum sexta parte cubi basis eiusdem portionis. In ellipsi verò erunt, vt parallelepipedum sub basi parallelogrammo maiori portioni similiter circumscripto, altitudine

eiuſdem portionis diametro, ad cylindricum ſub baſi eadem maiori portione, altitudine differentia diametrorum maioris, ac minoris factarũ portionum, vna cum ea parte cubi baſis eiuſdem portionis, ad quã ſexta pars eiuſdem cubi ſit, vt quadratum primæ diametri ad quadratum ſecundæ, vel, ſi diametri non ſint axes, vna cum ea parte parallelepipedi ſub altitudine baſi eiuſdem portionis, ac ſub baſi rhombo ab eadem deſcripto, ad quam eiuſdem parallelepipedi pars ſexta ſit, vt quadratum primę diametri ad quadratũ ſecundæ.

Sit ergo circulus, vel ellipſis, CFEH, cui ſit circumſcriptum parallelogrammum, AQ, & centrum ſit, N, diametri autem tranſeuntes per puncta contactuum laterum circumſcripti parallelogrammi, & per centrum, N, ſint, CE, FH; ſit autem, FH, regula, cui inſiſtens, & lateribus, AP, DQ, parallela intra ipſum ducta ſit, LG. Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, AG, ad omnia quadrata figuræ, LCFEC, demptis omnibus quadratis trilineorũ, CLT, YGE, eſſe, in circulo, vt parallelepipedum ſub baſi parallelogrammo, AG, altitudine, FI, ad cylindricum ſub baſi portione, TCFEY, altitudine, IM, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY. In ellipſi verò, vt parallelepipedũ ſub baſi parallelogrammo, AG, altitudine, FI, ad cylindricum ſub baſi portione, TCFEY, altitudine, MI, vna cũ ea parte cubi, TY, ad quam eiuſdem cubi ſexta pars ſit, vt quadratum, CE, primæ diametri, ad quadratum ſecundæ .ſ. ad quadratum, FH, vel, ſi diametri non ſint axes, vna cum ea parte parallelepipedi ſub, TY, & rhombo, RZ, ad quam illius pars ſexta ſit, vt quadratum, CE, primæ diametri ad quadratum ſecundæ. Ducantur per, T, Y, ipſi, PQ, parallelæ, TΔ, YΦ, ſecantes curuam,



curuam, CFE, in punctis, R, V, quæ iungantur recta, RV, producta in, B, K, quoniam ergo, EC, est diameter, ad quam ordinatim applicantur, RT, VY, eas quoq; bifariam secabit, est autem, ST, æqualis, XY, ob parallelogrammum, SY, ergo, VX, erit etiam æqualis ipsi, RS, & tota, VY, toti, RT, cui etiam est parallela, ergo, RV, TY, sunt etiam æquales, & parallelæ, estque, RV, in, M, bifariam secta.

Diuidamus igitur omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, EGY, in omnia quadrata figuræ, LCRT, demptis omnibus quadratis trilinei, LCT, in omnia quadrata figuræ, GEVY, demptis omnibus quadratis trilinei, EGY, & in omnia quadrata figuræ, TRFVY.

Per D.23. l.2. Rursus per rectam, RV, diuiduntur omnia quadrata figuræ, TRFVY, in omnia quadrata, YR, in omnia quadrata portionis, RFV, & in rectãgula bis sub, YR, & portione, RFV, his separatis, ad eorum singula comparemus nunc omnia quadrata parallelogrammi, KG.

10. l. 2. Igitur omnia quadrata, KG, ad omnia quadrata, RY, sunt vt, KB, ad, RV, vel vt parallelogrammum, KG, ad parallelogrammum, RY; omnia insuper quadrata, KG, ad omnia quadrata, KT, sunt vt, BK, ad, KR, .i. vt, KG, ad, KT; item omnia quadrata, KT, ad omnia quadrata figuræ, LCRT, demptis omnibus quadratis trilinei, LCT, .i. ad omnia quadrata portionis, RCT, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineo, CLT, sunt vt, KT, ad portionem, RCT, er-

Corol. 19. huius. go ex æquali omnia quadrata, KG, ad omnia quadrata figuræ,

guræ, LCRT, demptis omnibus quadratis trilinei, CLT, erunt vt, KG, ad portionem, RCT. Eodem modo ostendemus omnia quadrata, KG, ad omnia quadrata figuræ, VEGY, demptis omnibus quadratis trilinei, EGY, esse vt, KG, ad portionem, VEY, quæ consorma.

Omnia insuper quadrata, KG, ad omnia quadrata, RY, vt probauimus, sunt vt, KG, ad, RY, item omnia quadrata, RY, ad rectangula sub, RY, RΦ, sunt vt, RY, ad RΦ, & tandem rectangula sub, RΦ, RY, ad rectangula sub portione, RFV, & sub, RY, sunt vt, RΦ, ad portionem, RFV, ergo ex æquali omnia quadrata, KG, ad rectangula sub portione, RFV, & sub, RY, erunt vt, KG, ad portionem, RFV, ergo, colligendo, omnia quadrata, KG, ad omnia quadrata figurarum, LCRT, VEGY, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, EGY, & ad omnia quadrata, RY, & ad rectangula semel sub portione, RFV, & sub, RY, erunt vt, KG, ad portiones, RCT, VEY, RFV, & ad rectangulū, RY, .i. vt, KG, ad portionem, TCFEY.

Coroll. 1. 26. l. 2.

Coroll. 1. 26. l. 2.

Reliquum est, vt comparemus omnia quadrata, KG, ad omnia quadrata portionis, RFV, & ad rectangula sub eadem, & sub, RY, quia autem, RV, æquatur ipsi, TY, portio, RFV, æquatur portioni, THY, etiam in ellipsi, quia, RV, TY, sunt parallelæ, ideò omnia quadrata portionis, RFV, sunt rectangula sub portione, RFV, & sub portione, THY, quibus si iunxeris rectangula sub eadem portione, RFV, & sub, RY, componentur rectangula sub eadem portione, RFV, & sub quadrilineo, RTHYV. Nunc vel, RV, est æqualis ipsi, VY, & sic, RY, erit quadratum, siue rhombus, vel, RV, non est æqualis ipsi, VY, & tunc in ipsa, VY, producta, si opus sit sumatur, VZ, æqualis ipsi, VR, & ducta per, Z, ZΠ, ipsi, RV, parallela, sit constitutum, RZ, quadratum, vel rhombus ipsius, RV: Omnia ergo quadrata, KG, ad omnia quadrata, RZ, habent rationem compositam ex ratione quadrati, KI, ad quadratum, RΠ, vel ad quadratum, RV, A. 23. l 2.

& ex

Diffin. 12. l. 1. & ex ratione ipsius, KB, ad, RV, quæ duæ rationes componunt rationem parallelepipedi rectanguli sub altitudine, BK, basi autem quadrato, KL, ad cubum, RV. Si autem, CE, FH, sint tantum diametri, sic dicemus, nempè, Omnia quadrata, KG, ad omnia quadrata, RZ, rhombi habent rationem compositam ex ratione, KL, ad, RΠ, bis sumpta, & ex ratione, KB, ad, RV, quæ tres rationes componunt rationem parallelepipedi sub altitudine, KL, basi parallelogrammo, KG, ad parallelepipedum sub altitudine, RV, basi autem rhombo, RZ: Omnia verò quadrata, RZ, in circulo sunt sexcupla rectangulorum sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, .i. sunt ad illa, vt cubus, RV, ad sui ipsius sextam partem. In ellipsi verò omnia quadrata, RZ, ad rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, sunt vt cubus, RV, vel parallelepipedū sub altitudine, RV, basi rhombo, RZ, ad sui ipsius eam partem, ad quam sexta pars eiusdem cubi, vel parallelepipedi sit, vt quadratum, CE, primæ diametri, ad quadratum, FH, secundæ; ergo ex æquali in circulo omnia quadrata, KG, ad rectangula sub portione, RFV, & sub quadrilineo, RTHYV, erunt vt parallelepipedum sub altitudine, BK, basi quadrato, KL, vel (quod idem est) vt parallelepipedum sub, LK, & rectangulo, KG, ad $\frac{1}{6}$. cubi, RV. In ellipsi verò eadē erunt, vt parallelepipedum sub altitudine, LK, basi parallelogrammo, KG, ad eam partem cubi, RV, vel dicti parallelepipedi sub, RV, & rhombo, RZ, ad quā eiusdem cubi, vel parallelepipedi sexta pars sit, vt quad. CE, ad quadratum, FH.

11. l. 2.

D. Cor. 4. Gen. 34. l. 2.

33. huius.



Sunt

Sunt autem omnia quadrata, KG, ad omnia quadrata figurarũ, RCLT, VEGY, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, EGY, vna cum omnibus quadratis, RY, & cum rectangulis sub portione, RFV, & sub, RY, semel, vt, KG, ad portionem, TCFEY, vt ostendimus .i. sumpta, KL, communi altitudine, vt parallelepipedum sub altitudine, KL, basi parallelogrammo, KG, ad cylindricum sub eadem altitudine, KL, & sub basi portione, TCFEY, ergo, colligendo, omnia quadrata, KG, ad omnia quadrata portionum, RCT, VEY, cum rectangulis bis sub ijsdem, & sub trilineis, CLT, EGY, insuper ad omnia quadrata, RY, cum rectangulis sub, RY, & portione, RFV, semel, & ad rectangula sub eadem portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, .i. ad omnia quadrata portionis, RFV, cum rectangulis iterum sub eadem, & sub, RY, quia rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, separantur per lineam, TY, in rectangula sub, RY, & portione, RFV, & sub portione, THY, & portione, RFV, quæ sunt omnia quadrata portionis, RFV, .i. (his omnibus in vnam summam collectis) ad omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, EGY, erunt vt parallelepipedum sub altitudine, KL, basi parallelogrammo, KG, ad cylindricum sub altitudine, KL, basi portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, RV, in circulo. In ellipsi autem, vt idem parallepipedum ad eundem cylindricũ, vna cum ea parte cubi, RV, vel parallelepipedi sub, RV, & rhõbo, RZ, ad quam eiusdem cubi, vel parallelepipedis sexta pars sit, vt quadratum, CE, ad quadratum, FH: Omnia autem quadrata, AG, ad omnia quadrata, KG, sunt vt parallelepipedum sub altitudine, AL, basi parallelogrammo, AG, ad parallelepipedũ sub altitudine, LK, basi parallelogrãmo, KG, ergo ex æquali pariter omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, EGY, erunt in circulo, vt parallelepipedum sub altitu-

G. B Cor. 4. Gen 34. l 2.

A. 23. l 2.

36. l. 2.

titudine, AL, vel, FI, basi autem parallelogrammo, AG, ad cylindricum sub altitudine, LK, vel, MI, basi autem portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, RV, vel, TY. In ellipsi verò erunt, vt parallelepipedũ sub altitudine, FI, basi autem parallelogrammo, AG, ad cylindricum sub altitudine, MI, basi autem ipsa portione, TCFEY, vna cum ea parte cubi, RV, vel, TY, siue parallelepipedi sub altitudine, TY, & basi rhombo, RZ, ad quam eiusdem cubi, vel parallelepipedi sexta pars sit, vt quadratum, CE, ad quadratum, FH; quod ostendere oportebat.

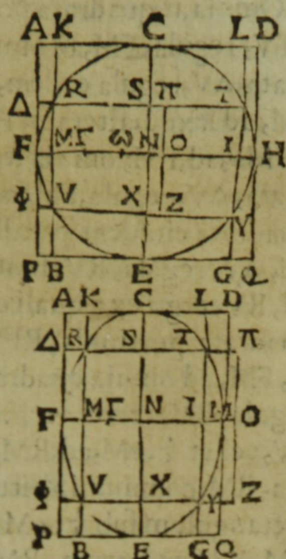
THEOREMA XXII. PROPOS. XXIII.

Exposita figura circuli Theorematis superioris, & in eo sumpta vtcunq; portione minori, RFV, cæteris, prout stant, suppositis. Dico omnia quadrata, ΔV, ad omnia quadrata portionis, RFV, esse, vt sexquialtera, FM, ad reliquum diametri, MH, maioris portionis, ab eodem dempta recta linea, ad quam tripla, MN, sit, vt parallelogrammum, ΔV, ad portionem, RFV.

Rectangula enim sub, ΔV, VT, ad omnia quadrata, RZ,
9. l. 2. sunt vt vnum ad vnum .i. vt rectangulum, FMI, ad quadratum, VZ, vel ad quadratum, RV, omnia item quadrata, RZ,
Corol. 21. huius. sunt sexcupla rectangulorum sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, .i. sunt ad illa, vt quadratum, RV, ad sui $\frac{1}{6}$. ergo ex æquali rectangula sub, ΔV, VT, ad rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, erunt vt rectang. FMI, ad $\frac{1}{6}$. quadrati, RV, vel vt rectangulũ, FMN, ad
Vlt. l. 2. e lem. $\frac{1}{6}$. quadratorum, RM, MV, .i. ad $\frac{1}{3}$. quadrati, RM, .i. ad rectangulum sub, FM, & $\frac{1}{3}$. MH, .i. vt, MN, ad $\frac{1}{3}$. MH, vel vt tripla, MN, ad, MH. Insuper eadem rectangula sub, ΔV,

VT,

VT, ad rectangula ſub portione, RFV, & ſub, RY, ſunt vt parallelogrammum, ΔV, ad portionem, RFV, ergo ſi fiat, vt, ΔV, ad portionem, RFV, ita tripla, MN, ad, Hω; rectãgula ſub, ΔV, VT, ad reliquũ, demptis rectangulis ſub portione, RFV, & ſub, RY; à rectangulis ſub eadem portione, & ſub quadrilineo, RTHYV, .i. ad rectãgula ſub portione, RFV, & portione, THY, .i. ad omnia quadrata portionis, RFV, erũt vt tripla, MN, ad, Mω, omnia autem quadrata, ΔV, ad rectangula ſub, ΔV, VT, ſunt vt quadratum, FM, ad rectangulum, FMI, .i. vt, FM, ad, MI, vel vt ſexquialtera, FM, ad ſexquialteram, MI, .i. ad triplam, MN, rectangula autem ſub, ΔV, VT, ad omnia quadrata portionis, RFV, ſunt vt tripla, MN, ad, Mω, ergo ex æquali omnia quadrata, ΔV, ad omnia quadrata portionis, RFV, erunt vt ſexquialtera ipſius, FM, ad, Mω, quæ eſt reſiduum ipſius, MH, dempta, Hω, ad quam tripla, MN, eſt vt, ΔV, ad portionem, RFV, quod oſtendere opus erat.



Coroll. 1. 26. l 2.

14. l. 2.

5. l. 2.

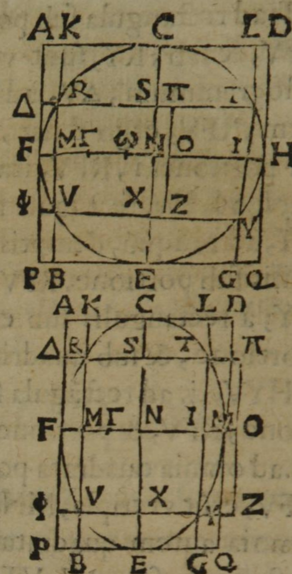
THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIV.

EXpoſita denuò figura circuli Th. 21. oſtendendum eſt omnia quadrata portionis minoris, RFV, vtcunq; ſumptæ regula diametro .ſ. FM, ad omnia quadrata eiuſdem regula baſi ſ. RV, eſſe vt rectangulũ ſub, M, & ſub baſi, RV, ad tria quadrata lineæ, RM, cum quad. MF.

ex antec. Omnia .n. quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata, ΔV, regula eadem, sunt vt, ωM, ad sexquialteram, FM, .i. vt $\frac{2}{3}$. Mω, ad, FM; omnia item quadrata, ΔV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem parallelogrāmi, ΔV, regula, RV, sunt vt, FM, ad, RV, ergo ex æquali omnia quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata, ΔV, regula, RV, erunt vt $\frac{2}{3}$. ωM, ad, RV, vel vt $\frac{1}{3}$. ωM, ad, RM, .i. sumpta, RM, communi altitudine, vt rectangulum sub $\frac{1}{3}$. ωM, & sub, RM, ad quadratum, RM, vel ad rectangulum, FMH; omnia verò quadrata, ΔV, regula, RV, ad omnia quadrata portionis, RFV, regula eadem, sunt vt, HM, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. HM, & $\frac{1}{6}$. MF, .i. sumpta, MF, communi altitudine, vt rectangulum, FMH, ad rectangulum sub, FM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. HM, & $\frac{1}{6}$. MF, erant autem omnia quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata, ΔV, regula, RV, vt rectangulum sub $\frac{1}{3}$. Mω, & sub, RM, ad rectangulum, FMH, ergo ex æquali omnia quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem, regula, RV, erunt vt rectangulum sub $\frac{1}{3}$. Mω, & sub, RM, ad rectangulum sub, FM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. HM, & $\frac{1}{6}$. MF, .i. vt rectangulum sub tota, Mω, & sub, RM, ad rectangulū sub, FM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. FM, & sexquialtera, MH, .i. & sub composita ex $\frac{1}{2}$. FM, & sexquialtera, MI, & sexquialtera, IH, porrò sexquialtera, IH, cum $\frac{1}{2}$. FM, efficit duas, FM, IH, quibus si iunxeris, MI, detractam de sexquialtera ipsius, MI, fiet tota, FH, cum, MN, æqualis dimidio, FM, & sexquialteræ, MH: Omnia ergo

29. l. 2.

vlt. 2. ele.
1. huius.
9. l. 2.



qua-

quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiuſdem portionis, regula, RV, erunt vt rectangulum ſub, Mω, & ſub, RM, ad rectangulum ſub, FM, & ſub compoſita ex, FH, MN, .i. ad rectangulũ ſub, FM, & ſub, MN, ſub, FM, & ſub, MH, & ad quadratum, FM: quia verò rectangulum, FMH, æquatur quadrato, RM, erunt omnia illa quadrata, vt rectangulum ſub, ωM, & ſub, RM, ad quadratum, RM, quadratum, MF, & rectangulum ſub, FM, MN, vel vt iſtorum dupla .ſ. vt rectangulum ſub, ωM, & ſub, RV, ad quadratum, RM, quadratum, MV, duo quadrata, FM, & duo rectangula ſub, FM, MN, .i. vnum ſub, FM, MI, cui ſi iunxeris vnum de duobus quadratis ipſius, FM, componetur rectangulum, FMH, quod eſt æquale quadrato, RM. Sunt ergo omnia quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiuſdem portionis, regula, RV, vt rectangulum ſub, ωM, & ſub, RV, ad tria quadrata, RM, cum vno quadrato, FM, quod oſtendere oportebat.

Ex vlt. 2. elem.

1 2 elem.

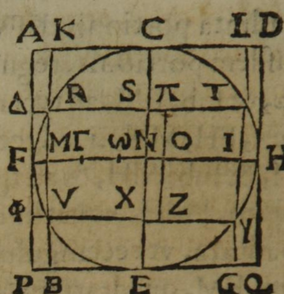
Vlt. 2. ele.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXV.

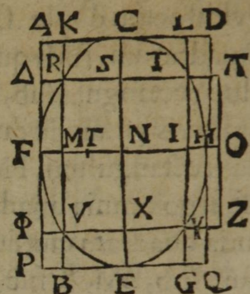
IN figura circuli, & ellipſis eiuſdem Theor. 21. oſtendendum eſt, ibi appoſitis retentis, ſumpta tamen vtcunq; portione minori, RFV, & regula diametro eiuſdem portionis .ſ. FM; omnia quadrata parallelogrammi, ΔV, ad omnia quadrata portionis, RFV, eſſe vt quadratum, FM, ad ſpatium, quod remanet, dempto rectangulo ſub, IM, & ſub, M, (ad quam, FM, ſit, vt, ΔV, ad portionem, RFV,) à rectangulo ſub, FM, & ſub $\frac{2}{3}$. ipſius, MH.

Sit igitur vt, ΔV, ad, RFV, ita, FM, ad, MΓ: omnia ergo quadrata, ΔV, ad rectangula ſub, ΔV, VT, ſunt vt quadra-

tum,



34. l. 2. tum, FM, ad rectangulum, FMI, rectangula insuper sub, ΔV, VT, ad rectãgula sub portione, RFV, & sub, VT, sunt vt, ΔV, ad portionem, RFV, .i. vt, FM, ad, MΓ,
Coroll. 1. 26. l. 2. .i. sumpta, MI, communi altitudine, vt rectangulum, FMI, ad rectangulum, ΔMI, ergo ex æquali
5. l. 2. omnia quadrata, ΔV, ad rectangula sub portione, RFV, & sub, VT, erunt vt quadratum, FM, ad rectangulum, ΓMI, quod serua.



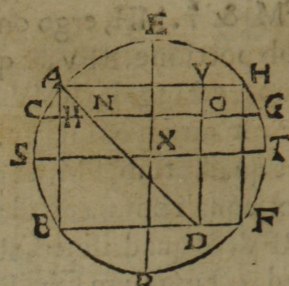
9. l. 2. Vlterius omnia quadrata, ΔV, ad omnia quadrata, VΠ, sunt vt quadratum, FM, ad quadratum, MO, vel ad quadratum, RV, .i. ad quatuor rectangula sub, RM, MV: Omnia insuper quadrata, VΠ, ad rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, sunt vt sex quadrata, CE, ad quadratũ, FH,
Elicitur ex 21. huius. nam in circulo omnia quadrata, RZ, sunt sexcupla rectangulorum sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, & ideo sunt ad illa, vt sex quadrata, CE, ad quadratum, CE, vel ad quadratum, FH, in ellipsi verò omnia quadrata, RZ, sunt ad rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, vt sex quadrata, CE, ad quadratum, FH, quod elicitur ex Prop. 21. huius. Quia verò rectãgulum, RMV, ad re-
17. 3. Com. ctangulũ, FMH, (tum in circulo, tum in ellipsi) est vt quadratum, CN, ad quadratum, NF, vel vt quadratum, CE, ad quadratum, FH, ideò sex rectangula, RMV, ad rectangulum, FMH, erunt vt sex quadrata, CE, ad vnũ quadratum, FH, .i. erunt vt omnia quadrata, RZ, ad rectãgula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, vt autem sunt sex rectangula, RMV, ad rectangulum, FMH, ita quatuor rectangula, RMV, ad $\frac{2}{3}$. rectanguli, FMH, .i. ad rectangulum sub,

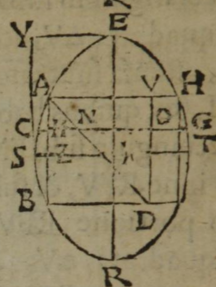
FM, & $\frac{2}{3}$. MH, ergo omnia quadrata, RZ, ad rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, erunt vt quatuor rectangula, RMV, ad rectãgulum sub FM & $\frac{2}{3}$. MH, erant autem omnia quadrata ΔV ad omnia quadrata RZ, vt quadratum, FM, ad quatuor rectangula sub, RMV, ergo ex æquali omnia quadrata, ΔV, ad rectãgula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV erunt vt quadratum FM, ad rectangulum sub, FM, & sub $\frac{2}{3}$. MH, eadem verò omnia quadrata, ΔV, ad rectangula sub portione, RFV, & sub, VT, ostensa sunt esse, vt quadratum, FM, ad rectangulum, ΓMI, (ex quibus habemus rectãgulum sub, ΓMI minus esse rectangulo sub, FM & sub $\frac{2}{3}$. MH, nam rectangula sub portione, RFV, & sub VT, minora sunt rectangulis sub eadem portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV) ergo omnia quadrata, ΔV, ad residuum omnium rectangulorum sub portione RFV, & quadrilineo, RTHYV, demptis rectangulis sub portione, RFV, & sub, VT, .i. ad rectangula sub vtrisq; portionibus, RFV, THY, .i. ad omnia quadrata portionis, RFV, erunt vt quadratum, FM, ad residuum spatium, dempto rectangulo, ΓMI, à rectangulo sub, FM, & sub $\frac{2}{3}$. MH, (hoc autem vocetur residuum rectangulum huius Theor.) quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVI.

EXposita adhuc figura Theor. antecedentis, ostendemus omnia quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem portionis, regula basi, esse vt parallelepipedum sub basi residuo rectangulo antecedentis Theor. altitudine tripla, MH, ad parallelepipedum sub basi rectangulo ipsius, FM, ductæ in, RV, altitudine linea composita ex, MH, HN.

Om-





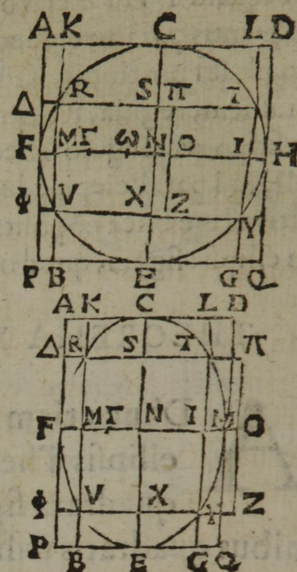
Omnia .n. quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem, regula, RV,
Defin. 12. l. 1. habēt rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, RFV, ad omnia quadrata, ΔV, regula, FM, .i. ex ea, quam ha-
Ex antec. bet residuum rectangulū Theor. antecedētis ad quadratum, FM,
29. l. 2. & ex ratione omnium quadratorum ΔV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem ΔV, regu-
1. huius. la, RV, .i. ex ea, quā habet, ΔR, ad, RV, vel, sumpta, ΔR cōmuni altitudine ex ea, quam habet quadratum, ΔR, vel quadratum, FM, ad rectangulum sub, FM, RV; & tandem ex ea, quam habēt omnia quadrata ΔV, ad omnia quadrata portionis, RFV, .i. ex ea, quam habet, MH, ad cōpositam ex $\frac{1}{2}$.MH,
Defin. 12. l. 1. & $\frac{1}{6}$.FM. Rationes autem rectanguli residui Theor. antecedentis ad quadratum, FM, & quadrati, FM, ad rectāgulum sub, FM, RV, resoluuntur in rationem rectanguli residui Theor. antecedentis ad rectangulum sub, FM, RV, quæ iuncta rationi ipsius, MH, ad compositam ex $\frac{1}{2}$.MH & $\frac{1}{6}$.FM, componit rationem parallelepipedi sub basi residuo rectangulo Theor. antecedentis, altitudine, MH, ad paral-
G. Cor. 4. gen. 34. l. 2. lelepipedum sub basi rectangulo sub, FM, RV, & sub composita ex $\frac{1}{2}$.MH, & $\frac{1}{6}$.FM: Triplicentur horum parallelepipedorum altitudines, fiet pro antecedentis altitudine tripla, MH, & pro altitudine parallelepipededi consequentis tripla dimidiæ, MH, .i. sexquialtera ipsius, MH, .i. sexquialtera, MI, & sexquialtera, IH, cum $\frac{1}{2}$.FM, porrò si sexquialteræ, MI, iunxeris sexquialteram, IH, cum dimidia, FM, .s. duplam, IH, quoniam sexquialtera, IH, est, MI, IN, si in-

si inquam illi iunxeris bis, IH, componetur altitudo consequentis parallelepipedi, quæ erit, MH, HN; omnia ergo quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem, regula, RV, erunt vt parallelepipedum sub basi residuo rectangulo Theor. antecedentis, altitudine tripla, MH, ad parallelepipedum sub basi rectãgulo, sub, FM, RV, altitudine linea cõposita ex, MH, HN, tum in circuli, tum in ellipsis figura, quod ostendere oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVII.

ADhuc etiam exponatur figura circuli, & ellipsis Theor. 21. ostendemus .n. omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, regula, FI, ad omnia quadrata portionis, TCFEY, regula basi, TY, esse, in circulo, vt cylindricus sub, IM, & portione, TCFEY, vna cũ $\frac{1}{6}$. cubi, TY, ad parallelepipedũ sub altitudine, FI, basi verò rectangulo sub, FI, & sexquitertia duarum, IH, HN. In ellipsi verò habere rationem compositam ex ea, quam habet cylindricus sub, IM, & portione, TCFEY, vna cum ea parte cubi, TY, vel parallelepipedi sub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiusdẽ cubi, vel parallelepipedi sexta pars sit, vt quadratum, CE, ad quadratum, FH, ad parallelepipedum sub altitudine, LG, basi parallelogrãmo, AG; & ex ea, quam habet quadratum, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub sexquitertia duarum, IH, HN.

24. huius. Omnia quadrata namq; figuræ, LCFG, dēptis omnibus quadratis trilineotum, CLT, YGE, ostensa sunt esse ad omnia quadrata, AG, regula, FI, vt cylindricū sub, MI, & sub basi portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY, in circulo (in ellipsi verò vna cum ea parte cubi, TY, vel parallelepipedi sub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiusdem $\frac{1}{6}$. sit vt quadratū, CE, ad quadratum, FH,) ad parallelepipedū sub, LA, & parallelogrammo, AG. Vlterius omnia quadrata, AG, regula, FI, ad omnia quadrata eiusdē,



29. l. 2. AG, regula, LG, sunt vt, AL, ad, LG, .i. vt parallelepipedum sub, AL, & parallelogrammo, ALG, ad parallelepipedum sub, LG, & parallelogrammo eodem, ALG, ergo ex æquali omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, regula, FI, ad omnia quadrata, AG, regula, TY, erunt vt cylindricus sub, MI, & portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY, in circulo, in ellipsi verò vna cum dicta parte cubi, TY, vel parallelepipedi sub, RV, & rhombo, RZ, ad parallelepipedum sub, LG, & parallelogrammo, ALG.

Tandem omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata portionis, TCFEY, regula, TY, sunt vt rectangulum sub, FN,
2. huius. & tripla, NH, .i. vt $\frac{3}{4}$. quadrati, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub, IHN, .i. vt totum quadratum, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub sexquitertia ipsarum, IHN, .i. in circulo, vt quadratum, AP, (quod æquatur quadrato, FH,) ad idem rectangulum .i. sumpta, FI, communi altitudine, vt parallelepipedum sub, FI, & quadrato, AP, .i. vt parallelepipe-

pipe-

pipedum ſub, AP, vel, LG, & parallelogrammo rectangulo ſub, FI, ſiue, AL, &, LG, ad parallelepipedum ſub, FI, & ſub baſi rectangulo ſub, FI, & ſub ſexquitertia, IHN; ergo ex æquali omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorū, CLT, YGE, regula, FI, ad omnia quadrata portionis, TCFEY, regula, TY, erunt vt cylindricus ſub, MI, & ſub portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY, ad parallelepipedum ſub, FI, & ſub rectangulo ſub, FI, & ſexquitertia, IHN; & hoc in circulo.

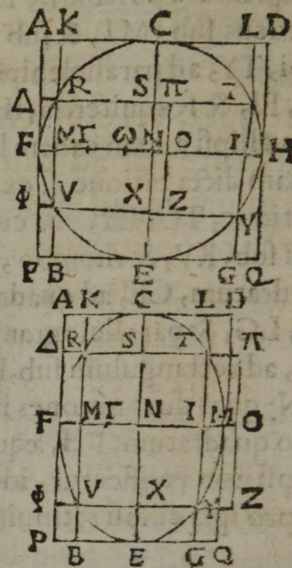
In ellipſi autem eadem habebunt rationem compoſitam ex iam dicta ratione .ſ. ex ratione cylindrici ſub, MI, & ſub portione, TGFEY, vna cum ea parte cubi, vel parallelepipedi ſub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiuſdem $\frac{1}{6}$. ſit, vt quadratum, CE, ad quadratum, FH, ad parallelepipedum ſub, LG, & parallelogrammo, AG, & ex ratione quadrati, FH, ad rectangulum ſub, FI, & ſub ſexquitertia ipſarum, IHN; quas duas rationes in circulo in vnā reſoluimus, quia in eo quadratum, FH, æquatur quadrato, AP, quod cum in ellipſi non verificetur, ideò has duas rationes componentes pro ipſa ellipſi retinuimus; quod oſtendere oportebat.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVIII.

IN eadem ſuperioris figura oſtendemus, tum in circulo, tum in ellipſi, omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, regula, FI, ad omnia quadrata circuli, vel ellipſis, CFEH, eſſe vt cylindricum ſub, MI, & portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY, pro circulo, pro ellipſi verò, vna cum ſæpius dicta parte cubi, TY, vel parallelepipedi ſub, RV, & rhōbo, RZ, ad $\frac{2}{3}$. parallelepipedi ſub,

AD, & parallelogrammo, AQ,ideſt,in circulo ad .cubi, FH.

Omnia .n. quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE,ad omnia quadrata, AG,ſunt vt cylindricus ſub, MI, & portione, TCFEY, vna cũ $\frac{1}{6}$. cubi, TY, pro circulo, pro ellipſi verò, vna cum ſæpius dicta parte cubi, TY,vel dicti parallelepipedi, ad parallelepipedum ſub,LA, & parallelogrammo, AG;omnia verò quadrata, AG, ad omnia quadrata, AQ, ſunt vt quadratum, AL, ad quadratum, AD, .i. ſumpta, AP, communi altitudine,vt parallelepipedum ſub,PA, & quadrato, AL, ad parallelepipedũ ſub, PA, & quadrato, AD, hoc eſt,vt parallelepidedum ſub, LA,& parallelogrammo,AG,ad parallelepipedum ſub, DA,& parallelogrammo, AQ, omnia autem quadrata, AQ, omnium quadratorum circuli, vel ellipſis, CFEH, ſunt ſexquialtera.i.ſunt ad ea,vt parallelepipedum ſub, AD, & parallelogrammo, AQ, ad eiuſdem $\frac{2}{3}$. ergo ex æquali omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, ad omnia quadrata circuli,vel ellipſis,CFEH, erunt vt cylindricus ſub, MI, & portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY, pro circulo, pro ellipſi verò,vna cum ſæpius dicta parte cubi, TY, vel parallelepipedi ſub, RV, & rhombo, RZ, ad $\frac{2}{3}$. parallelepipedi ſub, AD, & parallelogrammo, AQ, .i. pro circulo ad $\frac{2}{3}$. cubi, AD, vel cubi, FH, quod oſtendere opus erat.



22. huius.

9. l. 2.

Corol. 1. huius.

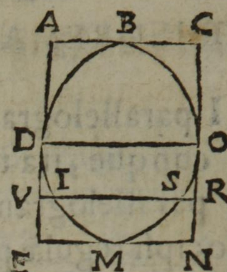
THEO-

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXIX.

SI parallelogrammo ſit inſcripta figura quæcunque, ita tamen, vt, ſumpto vno laterum parallelogrammi pro regula, &, ductis vtcunq; ipſi regulæ parallelis intra parallelogrammum, earum quælibet, vel tota ſit intra figuram inſcriptã, vel eiuſdem aliqua parte extra figuram exiſtente, ac ad vnum laterum parallelogrammi terminante, ad latus eiuſdem parallelogrãmi prędicto oppoſitum terminet alia portio eiuſdem, regulæ æquidiſtantis, ſint autem duæ quælibet portiones extra figuram ad oppoſita latera terminantes, & in eadem recta linea conſtitutæ integræ, & inter ſe æquales: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata inſcriptæ figuræ, cum rectangulis bis ſub eadem figura, & ſub dictarum portionum ijs omnibus, quæ extra figuram ad vnum dictorum laterum oppoſitorum eiuſdem parallelogrammi terminantur, erunt vt prædictum parallelogrammum ad inſcriptam figuram.

Sit igitur parallelogrammum, AN, & illi inſcripta vtcunq; figura, BDMO, & ſumpta pro regula, EN, ſit ducta vtcunq; intra parallelogrammum, AN, ipſa, DO, quæ cadat etiam tota intra figuram, BDMO, ſit etiam ducta alia vtcunq; parallela ipſi, EN, nempè, VR, portiones autem eiuſdem, VR, ſint extra figuram, ad latera oppoſita, AE, CN, terminantes .ſ. VI, SR, quæ ſint integræ, & inter ſe æquales. Dico omnia quadrata, AN, ad omnia quadrata figuræ, BDMO, cum rectangulis bis ſub figura, BDMO, & ſub

ſub trilineis, BCO, ONM, .i.ſub omnibus portionibus, quæ terminãt ad latus, CN, extra figuram, BDMO, conſtitutis, eſſe vt, AN, ad figuram, BDMO: Omnia.n.quadrata, AN, ad rectangula ſub, AN, & ſub figura, BDMO, ſunt vt, AN, ad figuram, BD MO, ſed rectangula ſub, AN, & ſub



Coroll. 1. 26. l. 2. figura, BDMO, diuiduntur in rectangula ſub eadem figura, BDMO, & ſub trilineis, BAD, DEM, ſub eadem, & ſub trilineis, BCO, ONM, & in rectangula ſub eadem in eandem figuram.ſ.in omnia quadrata eiuſdem figuræ, BDMO, (A. 23. l. 2.) quia verò linearum æquidiſtantium, regulæ, EN, portiones, quæ ſunt in eadem recta linea extra figuram adiacentes lateribus oppoſitis, AE, CN, ſunt & integræ, & æquales, ideò ſicuti rectangulum, VIS, eſt æquale rectangulo, ISR, ita rectangula ſub figura, BDMO, & trilineis, BAD, DEM, erunt æqualia rectãgulis ſub eadem figura, BDMO, & ſub trilineis, BCO, ONM, ſunt ergo rectãgula ſub, AN, & ſub figura, BDMO, æqualia omnibus quadratis figuræ, BDMO, cum rectangulis bis ſub eadem, & ſub trilineis, BCO, ONM; omnia autem quadrata, AN, ad rectãgula ſub, AN, & ſub figura, BDMO, ſunt vt, AN, ad figuram, BDMO; ergo omnia quadrata, AN, ad omnia quadrata figuræ, BDMO, cum rectangulis bis ſub eadem figura, & ſub trilineis, BCO, ONM, erunt vt, AN, ad figuram, BDMO, quod oſtendere opus erat.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXX.

EXponatur figura Theor. antecedentis, dimiſſis tamen rectis lineis, DO, VR, & ſit adhuc regula, EN, producantur autem ad eaſdem partes, AC, EN, in, HF, ita vt, CH, ſit æqua-

lis, NF, iuncta igitur, HF, erit, HF, parallela ipsi, CN, quoniam, CH, NF, sunt æquales, & parallelæ, & erit parallelogrammum, AF, &, CF. Dico ergo omnia quadrata, AN, cum rectangulis bis sub, AN, NH, ad omnia quadrata figurę, BDMO, cum rectãgulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, BOMFH, esse vt, AN, ad figuram, BDMO.

Omnia quadrata .n. parallelogrammi, AN, ad omnia quadrata figuræ, BDMO, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, BCO, ONM, sunt vt, AN, ad figuram, BDMO. Item rectangula sub, AN, NH, ad rectangula sub figura, BDMO, & sub, NH, sunt vt, AN, ad figuram, BDMO, & eadem rectangula sub, AN, NH, bis sumpta ad rectangula sub figura, BDMO, & sub, NH, bis sumpta erunt pariter, vt, AN, ad figuram, BDMO, .i. vt omnia quadrata, AN, ad rectangula bis sub figura, BDMO, & sub trilineis, BCO, ONM, cum omnibus quadratis eiusdem figuræ, BDMO, ergo vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia .s. vt omnia quadrata, AN, ad omnia quadrata figurę, BDMO, cum rectangulis bis sub eadem figura, & sub trilineis, BCO, ONM, ita omnia quadrata, AN, cum rectangulis bis sub, AN, NH, ad omnia quadrata figuræ, BDMO, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, BCO, ONM, & bis sub eadem, & sub, NH, .i. ad rectãgula bis sub eadem, & sub quadrilineo, BOMFH; sunt autem omnia quadrata, AN, ad omnia quadrata figuræ, BDMO, cũ rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, BCO, ONM, vt, AN, ad, BDMO; ergo omnia quadrata, AN cum rectangulis bis sub, AN, NH, ad omnia quadrata figuræ, BDMO,

Ex antec.

Coroll. 1. 26. l. 2.

A B C H
D O
E M N F

BDMO,

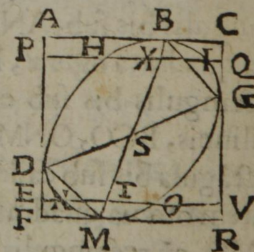
BDMO, cum rectãgulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, BOMFH, erunt vt, AN, ad figuram, BDMO, quod ostendere oportebat. Per hanc autem, & antecedentem Propositionem vniuersalius ostenduntur Prop. 15. 16. necnon Corollaria Prop. 19. & 20.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXI.

SI parallelogrammum fuerit ellipsi circumscriptum, ita tamen, vt eiusdem latera non tangant ellipsim in extremis punctis axium eiusdem; portiones coalternè tangentes erunt æquales; & si duabus oppositis tangentibus ducantur parallelæ abscindentes à reliquis coalternis tangentibus rectas lineas æquales, sumptas versus puncta contactuum; rectangulum, quod continetur sub vnius parallelarum ea parte, quæ manet intra curuam ellipsis, & tangentem ex ea parte, & sub reliqua illi in directum manente intra ellipsim, erit æquale rectangulo ad coalternam tangentem similiter sumpto.

Sit ergo ellipsis, BDMG, cui sit circumscriptum parallelogrammũ, AR, ita tamen, vt puncta contactuum non sint puncta extrema axium eiusdem, tangant autem in punctis, BDMG, & iungãtur, BM, DG, & quoniam, AC, FR, sunt tangentes parallelæ, vt etiam, AF, CR, ideò, BM, GD, per centrum ellipsis transibunt, sit earum communis sectio punctum, S, ergo, S, erit centrum ellipsis, cum, BM,

Elicitur ex 27.2.Con.



BM, GD, ſint diametri. Dico ergo portiones laterum parallelogrãmi, AR, coalternè tangentes eſſe æquales .ſ. AD, ipſi, GR, AB, ipſi, MR, BC, ipſi, FM, &, CG, ipſi, DF; iungantur, BG, DM; in triangulis ergo, BSG, DSM, latus, BS, æquatur lateri, SM, & latus, GS, lateri, SD, item angulus, BSG, angulo, DSM, ergo baſis, BG, æquatur baſi, DM, & angulus, SBG, angulo, SMD, &, SGB, ipſi, SDM, totus autem angulus, CBS, æquatur toti, FMS, ſibi coalterno, ergo reliquus angulus, CBG, æquatur reliquo angulo, DMF, & ſimiliter probabimus angulum, BGC, æquari angulo, MDF, ergo reliquus, BCG, æquabitur reliquo, DFM, (qui etiam ſunt æquales, quia ſunt anguli oppoſiti parallelogrammi, AR,) & ideò trianguli, BCG, DFM erunt æquianguli & BG, DM, latera homologa ſunt æqualia, ergo etiam, BC, æquabitur ipſi, FM, &, CG, ipſi, DF, eſt autem, AC, æqualis ipſi, FR, &, AF, ipſi, CR, ergo reliqua, AB, æquabitur reliquæ, MR, & reliqua, AD, reliquæ, GR, ſunt igitur portiones laterum parallelogrammi, AR, coalternè tangentes inter ſe æquales. 4. 1. Elem.

Sumantur nunc vtcunq; duæ coalternè tangentes, AD, RG, & ab ipſis verſus puncta contactuum, DG, abſcindantur vtcunq; duæ rectæ æquales, PD, VG, & per puncta, PV; ducantur baſi, FR, parallelæ, PQ, EV, ſecantes curuam ellipſis in punctis, HI, ipſa, PQ, & in punctis, NO, ipſa, EV. Quoniam ergo, AB, AD, tangunt ellipſim, BDMG, coincidentes in puncto, A, eſt autem, QP, parallela vni tãgentium .ſ. ipſi, AB, ſecans curuam ellipſis in, H, & aliam tangentem in, P, rectangulum ergo, IPH, ad quadratum, PD, erit vt quadratum, BA, ad quadratum, AD, .i. vt quadratum, MR, ad quadratum, RG: conſimili modo oſtendemus rectangulum, NVO, ad quadratũ, VG, eſſe vt quadratum, MR, ad quadratum, RG, .i. vt rectangulum, IPH, ad quadratum, PD, vel ad quadratum, VG, ergo rectangulũ, IPH, eſt æquale rectangulo, NVO. Nunc oſtendemus, PH, eſſe 16. 3. Cor.

æqualem ipſi, OV, conſideremus duo quadrilatera, APXB, MTVR, quæ ſunt ſimilia polygona, nam angulus, PAB, eſt æqualis angulo, MRV, &, ABX, ipſi, RMT, tum, BXP, ipſi, MTV, & tandem, XPA, ipſi, TVR, quæ facilè apparent, & duo latera, AB, MR, ſunt æqualia, vt etiam, AP, RV, ergo reliqua latera erunt æqualia, quæ æqualibus adiacẽt angulis, vnde, TV, erit æqualis ipſi, PX, &, MT, ipſi, BX, vnde rectangulum, MTB, æquabitur rectangulo, MXB, & quoniam, vt rectangulum, MTB, ad rectangulum, MXB, ita quadratum, TO, ad quadratum, XI, quoniam, NO, HI ſunt parallelæ tãgenti, AC, & ideò ordinatim applicatæ ad diametrum, BM, erit ergo quadratum, TO, æquale quadrato, XI, &, TO, ipſi, XI, vel, HX, ergo reliqua, OV, erit æqualis reliquæ, PH, & quia rectangulum, IPH, eſt æquale rectangulo, NVO, erit, IP, æqualis ipſi, NV, & quia, PH, eſt æqualis, OV, erit, HI, æqualis, NO, & ideò rectangulum, IHP, erit æquale rectangulo, NOV.

Ex 40. 1. I. & eiuſdem Scholio.

Vel breuius ſic proceſſiſſet demonſtratio, dimiſſo Apollonij theoremate, oſtenſo .n. OV, eſſe æqualem ipſi, PH, &, TO, ipſi, XI, manet oſtenſum, NO, æquari ipſi, HI, quoniam, NO, HI, bifariâ diuiduntur à diametro, BM, & ideò illicò manifeſtum euadit rectangulum, NOV, æquari rectangulo, IHP, quod oſtendere oportebat.

COROLLARIVM.

Hinc patet nedum rectangulum, NOV, æquari rectangulo, IHP, ſed etiam portiones interceptas tangentibus, & curua ellipſis eſſe inter ſe æquales, velut, OV, ipſi, PH.

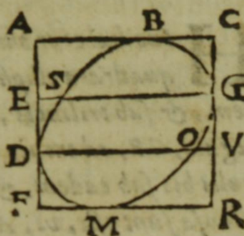
THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXII.

Expoſita ellipſi, cum parallelogrammo illi circumſcripto Theorem. antecedentis, cæteris

omiſ-

omissis, ostendemus, regula, FR, omnia quadrata parallelogrãmi, AR, ad omnia quadrata ellipsis, BDMG, cum rectangulis bis sub eadem ellipsi, & sub trilineis, BCG, GRM, esse, vt parallelogrammum, AR, ad ellipsim, BDMG.

Ducantur à punctis contactuum regulæ, FR, parallelæ, GE, DV; omnia ergo quadrata, AR, ad rectangula sub ellipsi, BDMG, & sub, AR, sunt vt, AR, ad ellipsim, BDMG; verum rectangula sub ellipsi, BDMG, & sub, AR, sunt æqualia rectangulis sub ellipsi, BDMG, & sub duob. trilineis, BAD, DFM, item sub ellipsi, BDMG, & sub eadem .i. omnibus quadratis ellipsis, BDMG, & sub eadem ellipsi, BDMG, & sub duobus trilineis, BCG, GRM, verũ rectangula sub ellipsi, BDMG, & sub trilineis, BAD, DFM, æquantur rectangulis sub eadem ellipsi, & sub trilineis, BC G, GRM, quod sic patet, quoniam .n. AD, RG, coalternè tangentes sunt æquales, & ductis ipsi, FR, parallelis intra ellipsim, ex ipsis coalternè tangentibus, AD, RG, abscindentibus portiones æquales versus puncta contactuum, rectangula sumpta, vt dictum est in antecedenti Theor. sunt æqualia, ideò & omnia omnibus erunt æqualia .s. rectangula sub portione, OGBD, & trilineo, BAD, erunt æqualia rectangulis sub portione, SMG, & sub trilineo, GMR, eadem ratione rectangula sub portione, OMD, & trilineo, D FM, æquantur rectangulis sub portione, SBG, & trilineo, BCG, ergo rectangul a sub ellipsi, BDMG, & duobus trilineis, BAD, DFM, æquantur rectãgulis sub ellipsi, BDMG, & sub trilineis, BCG, GRM; ergo omnia quadrata, AR, ad omnia quadrata ellipsis, BDMG, cum rectangulis bis sub



Corol. 1. 26. l. 2.

A. 23. l. 2.

Ex antec.

eadem, & sub trilineis, BCG, GRM, erunt vt, AR, ad ellipsim, BDMG. Eodem modo, sumpta pro regula, CR, ostendemus omnia quadrata, AR, ad omnia quadrata ellipsis, BDMG, vna cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, DAB, BCG, esse vt, AR, ad ellipsim, BDMG, quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM.

Hinc habetur omnia quadrata, AR, regula, FR, ad omnia quadrata ellipsis, BDGM, vna cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, BCG, GRM, esse vt omnia quadrata, AR, regula, CR, ad omnia quadrata ellipsis, BDMG, vna cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, DAB, BCG; vtraque enim ostensa sunt esse, vt, AR, ad ellipsim, BDMG.

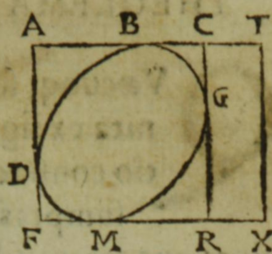
THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXIII.

ASsumpta antecedentis figura, dimissis lineis, EG, DV, producantur ad eandem partem, AC, FR, in, TX, ita vt, AT, sit æqualis, FX, & iungatur, TX, ergo ipsa, AX, CX, erunt parallelogramma. Dico igitur, omnia quadrata, AR, cum rectangulis bis sub, AR, RT, ad omnia quadrata ellipsis, BDMG, cum rectangulis bis sub eadem, & quadrilineo, BGMXT, esse vt, AR, ad ellipsim, BDMG, regula, FX.

Omnia .n. quadrata, AR, ad rectangula bis sub ellipsi, BDMG, & sub trilineis, BCG, GRM, vna cum omnibus
Ex antec. quadratis eiusdem ellipsis, BDMG, sunt vt, AR, ad ellipsim, BDMG, item rectangula sub, AR, RT, ad rectangula sub
Coroll. 1. 26. l. 2. ellipsi, BDMG, & sub, RT, sũt vt, AR, ad ellipsim, BDMG,

& ca-

& eadem bis sumpta sunt pariter, vt, AR ad ellipsim, BDMG, ergo omnia quadrata, AR cum rectã-gulis bis sub, AR, RT, ad omnia quadrata ellipsis, BDMG, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis BCG, GRM, & cum rectangulis bis sub eadem, & sub, RT, .i. cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, BGMXT, erunt vt, AR, ad ellipsim, BDMG. Sic etiam fiet demonstratio, si producantur, FA, RC, similiter ac producte sunt, AC, FR, quarum altera pro regula sumatur.



COROLLARIVM.

Hinc patet, si, BDMG, non esset ellipsis, sed alia vtcunq; figura plana parallelogrammo, AR, inscripta, dummodo portiones laterum coalternè tangentes essent aequales, & rectangula sumpta ad coalternè tangentes, eo modo, quo dictum est in Theor. antecedenti, essent quoq; aequalia, quod omnia quadrata, AR, ad omnia quadrata talis figurae, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis adiacentibus lateri, quod non sumitur pro regula, erunt vt, AR, ad talem figuram; Veluti erunt etiam omnia quadrata, AR, cum rectangulis bis sub, AR, RT, ad omnia quadrata talis figurae, cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo simili ipsi, BGMXT, haec .n. eodem modo colliguntur, quo pro ellipsi, BDMG, per demonstrationem collecta sunt, aderunt enim eadem principia, ex quibus demonstratio pro ellipsi pendebat: Exemplum facile haberi potest in figura ex duabus aequalibus circuli, vel ellipsis portionibus minoribus composita tali pacto, vt basis vnius portionis alterius basi cogruat, quae quidem figura sit inscripta dicto rectangulo, cuiusque latera eam tangant non in punctis extremis axium, sed in quatuor alijs vtcunque, vnde, &c.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIV.

QVæcunq; ſolida ad inuicem ſimilaria, genita ex figuris ſuperius in hoc Libro Tertio conſideratis, iuxta regulas ibidem aſſumptas, quarũ patefacta eſt ratio omnium quadratorũ, habent inter ſe rationẽ notam.

Quoniam enim alibi oſtenſum eſt, vt omnia quadrata duarum figurarum inter ſe ſumpta cum datis regulis, ita eſſe ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex iiſdem figuris, iuxta eaſdem regulas, ideò cum in Theorematibus huius Libri inuenta eſt ratio omnium quadratorum duarũ quarundam figurarum cum talibus regulis, colligimus etiam nũc eandem eſſe rationem duorum ad inuicem ſimilarium ſolidorum, quæ ex illis figuris iuxta eaſdem regulas genita dicuntur; Vt exempli gratia in Prop. 1. conſpectis, iterum eiuſdem figuris, cum ibi oſtenſum eſt, ſumpta regula, DP, omnia quadrata portionis, DEP, ad omnia quadrata parallelogrammi, FP, eſſe vt compoſita ex ſexta parte, EB, & dimidia, BR, ab ipſam, BR, oſtenſum etiam eſt ſolidum ſimilare genitum ex portione, DEP, ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex parallelogrammo, FP, eſſe vt cõpoſita ex ſexta parte, EB, & dimidia, BR, ad ipſam, BR. Cum verò oſtenſum eſt omnia quadrata portionis, EDP, ad omnia quadrata trianguli, DEP, eſſe vt compoſita ex dimidia totius, ER, & ipſa, BR, ad eandem, BR; pariter oſtenſum eſt ſolidum ſimilare genitum ex portione, EDP, ad ſibi ſimilare genitum ex triangulo, DEP, iuxta eaſdem regulas eſſe, vt compoſita ex dimidia totius, ER, & ipſa, BR, ad eandem, BR.

33. l. 2.

Cum verò in Corollario eiuſdem Theor. collectum eſt, omnia quadrata parallelogrammi, FP, eſſe ſequialtera omnium quadratorũ portionis, DEP, (ſi, DP, per centrum, A,

tran-

transfeat) hæc verò esse dupla omnium quadratorum trianguli, DEP; patet, quod etiam solidum similare genitum ex parallelogrammo, FP, sexquialterum erit solidi sibi similaris geniti ex portione, DEP, iuxta eandem regulam, DP, hoc verò erit duplum solidi sibi similaris geniti ex triangulo, DEP, iuxta eandem regulam, DP.

SCHOLIVM.

QVoniam verò solida ad inuicem similaria genita ex duabus figuris planis, iuxta datas regulas, totuplicia sunt, quotuplices sunt figuræ similes, quæ dicuntur, omnes figuræ similes duarum genitricium figurarũ, cum eisdem regulis assumptæ, iuxta quas dicta solida similaria genita dicuntur, figurarum autem variationes nullo dato numero clauduntur, ideò nec horum similarium solidorũ variationes vllo dato coarctãtur numero, vnde euidentissimè apparet hanc demonstrandi methodum, ipsamq; demonstrationem, infinitè (vt ita dicam) locupletem esse; vt igitur ad particularia solida similaria descendamus, expendendæ sunt ipsæ figuræ, quæ dicuntur (omnes figuræ similes, &c) patet igitur ex alibi à me ostensis, si figuræ assumptæ sint omnes figuræ similes parallelogrammi, quod tunc istæ erunt omnia plana cylindrici; si verò illæ sint omnes figuræ similes trianguli (intellige in parallelogrammo, & triangulo vnum laterum pro regula) illæ erunt omnia plana Conici; & si parallelogrammum sit rectangulum, & figuræ eidem erectæ erit cylindricus rectus, scalenus autem nisi sit rectãgulum, vel figuræ non eidem erectæ; ex quo habes, qualescunq; figuras intellexeris esse eas, quæ dicuntur omnes figuræ similes parallelogrammi, FP, regula, DP, vel trianguli, EDP, regula eadem, solidum genitum ex parallelogrammo, FP, quod dicimus similare, semper esse cylindricum, genitũ verò ex triangulo, DEP, semper esse conicum, vt etiam accidit in omni parallelogrammo, & triangulo, dummodò regula sit vnum laterum eorundem, solida igitur similaria genita ex parallelogrammis sunt cylindrici,

A. Def. 8. l. 1.

34. l. 2.

34. l. 2.

genita

genita verò ex triangulis sunt conici, genita inquam, regula vno laterum eorundem existente; quod si figuræ, quæ dicuntur omnes figuræ similes parallelogrammi dati, regula vno laterum, sint circuli, ille cylindricus erit cylindrus; & si, quæ dicuntur omnes figuræ similes dati triãguli sint pariter circuli, regula vno laterum, conicus erit conus; nomine ergo communi hic cylindrus, & conus dicti sunt solida similaria nomine particulari dicti sunt cylindricus, & conicus, sed nomine magis particulari, & proprio dicuntur
34.l 2. cylindrus, & conus, quotiescunq; dictæ figuræ sint circuli, iuxta alibi à me ostensa.

Pariter si figuræ genitrices solidorum sint circuli, vel ellipses, illæ autem, quæ dicuntur (omnes figuræ similes earundem sumptæ cum datis regulis) sint pariter circuli, quorum describentes rectæ lineæ in figuris genitricibus sint eorundem diametri, solida simi-
46.l 1. laria genita ex eisdem iuxta easdem regulas, erunt, alterũ sphæra, quod scilicet gignitur ex circulo, alterum sphæroides, quod scilicet gignitur ex ellipsi, si figuræ similes rectè secent axem ellipsis, & sint erectæ tum circulo, tum ellipsi; poterit etiam esse sphæroi-
47. eiusd. l. 1. des, etiamsi figuræ similes non sint circuli, sed ellipses iuxta alibi ostensa; quæ igitur in hoc casu nomine communi dicuntur, solida similaria genita ex circulo, vel ellipsi iuxta datas regulas, nomine particulari, & proprio, dicuntur sphæra, vel sphæroides: Et quæ pariter dicerẽtur nomine communi solida similaria genita ex portione tali, vel tali, iuxta talem regulam, portione inquam circuli, vel ellipsis, quotiescunq; figuræ, quæ dicuntur, omnes figuræ similes talis portionis iuxta eandem regulam, sint circuli erecti genitricibus, & figura genitrix portio circuli, erit, & dicetur nomine
36.l. 1. particulari, & proprio, portio sphæræ; si verò figura genitrix sit ellipsis portio, & figuræ similes sint circuli erecti genitricibus, rectè
47.l 1. axem portionis secantes, fiet portio sphæroidis, quod si sint ellipses erectæ genitricibus, diametros habentes, vt postulat propos. 47. Lib. 1. fiet etiam portio sphæroidis: Sic igitur nominibus particularibus hæc solida vocari consueuerunt. Cum verò figuræ similes non sunt neq; circuli, neq; ellipses sumptæ, vt dictum est, sufficiet eadem

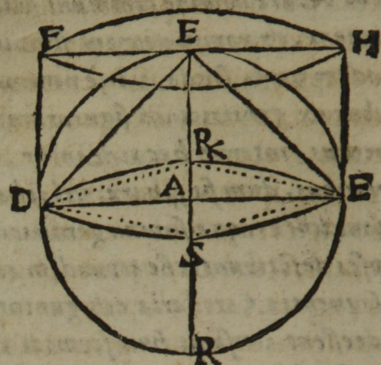
dem vocare nomine communi solidi similaris, &c. licet ad variationem, & nominationem similium figurarum, consequenter & eadem varia solida, variè nominari poßent; fortè autem in sequẽtibus ex genitricium figurarum variatione varia nomina componemus, interim hæc teneantur, hoc animaduerso, quod in superioribus, dum fit sphæra, vel sphæroides, vel eorundem portio, suppono lineas, quæ sunt in genitricibus figuris, & circulos, vel ellipses describunt, eße eorundem axes. His autem prædemonstratis sequentia Corollaria colliguntur, quæ quidem cum Typographo deeßent consueti huiuscemodi caracteres, diuersis imprimi neceße fuit.

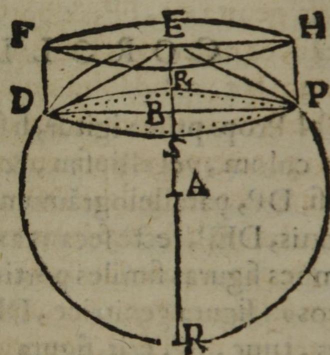
COROLLARIVM I.

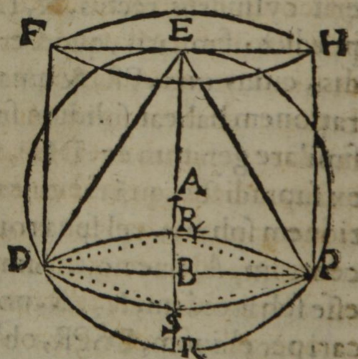
IN Prop. prima igitur, si supposuerimus, PRDE, esse circulum, vel ellipsim, & axem, ER, & circa eandem in basi, DP, parallelogrãmum, FP, quæ quidem sit basis portionis, DEP, rectè secans axim, ER, deinde intellexerimus omnes figuras similes portionis, DEP, esse circulos diametros in figura genitrice, DEP, (cui sint erecti) sitos habentes, tunc, FP, erit figura genitrix solidi similaris, quod erit cylindrus rectus, &, DEP, erit figura genitrix solidi prædicto similaris, quod erit portio sphæræ, vel sphæroidis, cuius axis, ER, & quia patet ex supradictis, quam rationem habeat solidum similare genitum ex, FP, ad sibi similare genitum ex, DEP, iuxta regulam, DP, ideò patet ex supradictis, quã rationem habeat cylindrus, FP, ad portionem sphæræ, vel sphæroidis, DEP, siue, DP, trãseat per centrum, A, siue non. Similiter si supposuerimus, EDRP, esse sphæroidem, &, ER, non axim, sed diametrum, & secari per ellipsim, DSPR, obliquè ad diametrum, ER, & circa eandem diametrum, EB, in eadem basi ellipsi, DSPR, esse cylindricum, FP, secari autem cylindricum, & portionem sphæroidis planis parallelis ipsi ellipsi, DP, quæ intel-

ligatur erecta plano, DE PR, conceptæ in ipso cylindrico figuræ erunt omnes figuræ similes parallelogrammi, FP, & quæ fiunt in portione sphæroidis, DE P, erunt omnes figuræ similes portionis, DEP, omnes inquam ellipses similes ellipsi, DP, (est enim idem, siue intelligas has figuras similes describi omnibus lineis figurarũ genitricium, FP, DEP, siue percipias easdem produci per sectionem corporum per plana factam ipsi, DP, parallela) & quia patet ratio harum omnium similium figurarum, siue ellipsium inter se ex supradictis, & subinde solidorum similarium genitorum ex, FP, & portione, DEP, quorum vnum est cylindricus, alterũ est portio sphæroidis secta plano, DP, ideò patet, quam rationẽ habeat cylindricus, FP, ad portionem, DEP, .s. esse eandem, quam habet composita ex sexta parte, EB, & dimidia, BR, ad ipsam, BR, & hoc, siue, ER, sit axis, siue nõ; Quod si, DP, transeat per centrum, A, cylindricum, FP, esse sexquialte-

Corol. 47. l. 2.







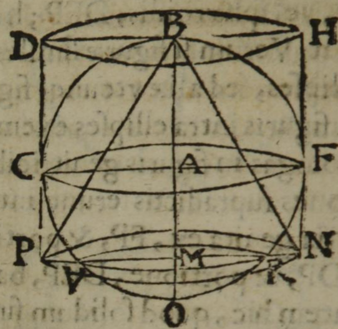
rum

rum portionis ſphæræ, vel ſphæroidis, DEP. Ijſdem vijs patebit conum, ſiue conicum, EDP, ad portionem ſphæræ, vel ſphæroidis, DEP, eſſe vt, BR, ad compoſitam ex, BR, & dimidia totius, ER, quod ſi, DP, per centrum tranſeat, conum, vel conicum, EDP, eſſe ſubduplum portionis ſphæræ, vel ſphæroidis, DEP; hæc autem etiam ab alijs oſtenſa ſunt. Verum ſi figuræ ſimiles iam dictæ non ſint circuli, vel ellipſes, ſed aliæ vtcunq; figuræ, vt ex. g. quadrata, veluti in figuris intra ellipſes exemplificare volui, diametros homologas in figuris genitricibus habentia, adhuc eædem rationes ſupradictis erunt inter hæc ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex, FP, & portione, DEP, ſiue ex triangulo, EDP, & portione, DEP, baſes habentia quadratas; patet autem hic, quod ſolidum ſimilare genitum ex, FP, baſem habens rectilineam, ſicuti eſt priſma, ita & hoc nomine vocari poteſt magis particulari, veluti & ſolidum ſimilare genitum ex triangulo, EDP, nomine piramidis vocari poteſt, dum baſim habet rectilineam.

Deniq; vniuerſaliſſimè habetur ratio quorumcũq; duorum ſolidorum genitorum ex, FP, & portione, DEP, ſiue ex triangulo, DEP, & portione, DEP, iuxta regulam, DP, quacunq; in ſimilibus figuris variatione facta. Quæ autem in huius Theorematis declaratione animaduerſa ſunt, memoria teneantur, nam & ſequentia conſimili methodo, ſed breuiori declarabimus; ſufficiat autem tot figurarum variationes in duabus tãtum exemplificaſſe, quas ſolidorum indicant baſes, nempè circulus, & quadratum, inſcriptum eidem circulo, habens vtrunq; diametrum in figura genitrice, impoſterum enim cum ſine figurarum confuſione id ægrè fieri poſſit vna tantum poſitione contenti erimus, ea nempè, qua omnes figuræ ſimiles circuli eſſe ſupponuntur, cæteras ergo variationes ex his facillimè auidus veritatis indagator proprio marte comprehendere poterit, quæ pro huius Theo. declarat. ad ſeq. quoq; dilucidat. ſatis eſſe reor.

COROLLARIVM II.

IN Propositione secunda, exposita figura Coroll. ant. conformiter, patet, quam rationem habeat solidum similare genitum ex, DN, idest cylindricus in basi figura descripta à basi, PN, cuius latus est, HN, ad solidum sibi similare genitum ex portione, V CBFR, .i. (si omnes figuræ similes ipsius, DN, sint circuli diametros in, DN, habentes, & omnes figuræ similes portionis, VCBFR, sint pariter circuli rectè axem, BO, secātes, & diametros in eadem portione sitos habētes, qui circuli sint genitricibus erecti) cylindrus, DN, ad portionem



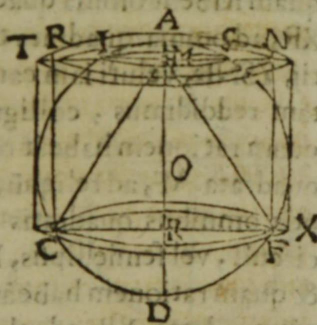
sphæræ, vel sphæroidis, VCBFR, vel si figurę sint recti lineæ, patet ratio, quam habet prisma, DN, ad solidum sibi similare genitum ex portione, VCBFR, circuli, vel ellipsis, BC OF. Ductis autē rectis, BP, BN, patet similiter ratio, quam habet conus, BPN, ad portionem sphæræ, vel sphæroidis, VCBFR, siue pyramis, BPN, ad solidum similare genitum ex triangulo, BPN, (intellige semper hæc solida inuicem genita iuxta regulas in Theorematibus assumptas, ne toties id repetatur) siue tādem, quam habet vniuersaliter solidum similare genitum ex, DN, vel triangulo, BPN, ad solidum sibi similare genitum ex portione, VCBFR, & hoc si, BO, sit axis, quod si tantum sit diameter eædem rationes colligentur ad modum superioris Theorematis. Est ergo in figura cylindricus, DN, ad portionem sphæræ, vel sphæroidis, VCBFR, vel prisma, DN, ad solidum similare genitum ex portione, VCBFR, vel tandem quodlibet solidum similare genitum ex, DN, siue quilibet cylindricus genitus ex,

DN,

DN, ad solidum sibi similare genitũ ex portione, VCBFR, vt rectangulum sub, BA, & tripla, AO, ad rectangulũ sub, BM, & sub composita ex, MO, OA. Solidum verò similare genitum ex triangulo, BPN, siue sit conus, siue pyramis, siue tantum conicus, ad sibi similare genitum ex portione, VCBFR, siue hoc sit portio sphæræ, vel sphæroidis, siue tantum solidum similare genitum ex portione, VCBFR, vt rectangulum, BAO, siue quadratum, BA, ad rectangulum sub, BM, & sub composita ex, MO, OA, nam sicut rectangulum, BAO, est tertia pars rectanguli sub, BA, & tripla, AO, ita solidum similare genitum ex triangulo, BPN, est tertia pars solidi similaris geniti ex, DN, vnde patet, &c. 1 Propos. 24. l. 2.

COROLLARIVM III.

IN Proposit. tertia colligitur, quam rationem habeat solidum similare genitum ex, BF, siue sit cylindrus, siue prisma, siue tantum conicus, ad sibi similare genitũ ex portione circuli, vel ellipsis, ICFS, siue hoc sit frustum sphæræ, vel sphæroidis, siue tantũ solidum similare genitum ex portione, ICFS, siue, AD, sit axis, siue non, quæ eadem est ei, quã habet rectangulum, DRA, ad rectãgulum sub, DR, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. RM, & ex, MA, vna cum rectangulo sub, RM, & sub composita ex $\frac{1}{6}$. RM, & $\frac{1}{2}$. MA. Solidum autem similare genitum ex triangulo, MCF, siue sit conus, siue prisma, siue tantum conicus, ad sibi similare genitũ ex portione, ICFS, siue hoc sit frustum sphæræ, vel sphæroidis, siue tantum solidum similare genitum ex tali portione, ICFS, erit vt rectangulum, DRA, ad rectangulum sub composita



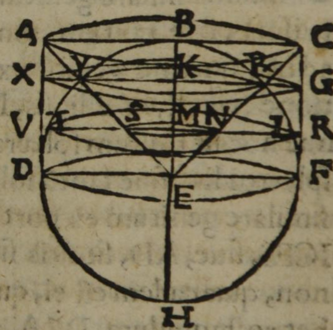
ex, MD, DR, & sub sexquialtera, MA, vna cum rectangulo sub composita ex, MD, & dupla, DR, & sub $\frac{1}{2}$. MR, siue, AD, sit axis, siue tantum diameter, quæ iuxta antecedentium declarationem facilè percipi possunt.

COROLLARIVM IV.

IN Propos. quarta patet ratio, quam habet solidum similare genitum ex, GX, quod apparet in superioris figura, ad sibi similare genitum ex portione, ICFS, quæ ratio ibi conspiciatur.

COROLLARIVM V.

IN Corollario Propos. quintæ, si supponamus notam rationem, quam habent omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata trianguli, AEC, vel quam habent omnia quadrata, XR, ad omnia quadrata trapetij, YSN℞, veluti iam eam notam reddidimus, colligimus, quam rationem habeât omnia quadrata, AF, ad reliquũ, demptis omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, DBF, & quam rationem habeât omnia quadrata, XR, ad reliquum, demptis omnibus quadratis portionis, YTI℞, & ideò patet, quam rationem habeât omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, DBF, & quam rationem habeant omnia quadrata, XR, ad omnia quadrata portionis, YTI℞, vnde apparet, quam rationem habeat solidum similare genitum ex, AF, siue sit cylindrus, siue prisma, siue tantum cylindricus, ad solidum sibi similare genitum ex semicirculo, vel semiellipsi,

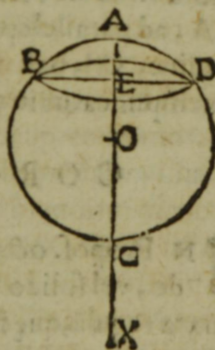


ellipsi,

ellipsi, DBF, siue hoc sit hæmisphęrium, siue hæmisphęroides, siue tantum solidum similare illi, genitum ex, DBF. Item patet, quam rationem habeat solidum similare genitum ex, XR, quodcunque illud sit, ad sibi similare genitum ex portione, YTIR. Eodem pacto manifesta fieret ratio solidi similaris geniti ex, AG, ad sibi similare genitũ ex portione, YBR, & ita in reliquis. Inuentæ igitur sunt alio modo à prædictis, rationes solidorum inuicem similarium genitorum ex parallelogrammis in basi æquali secundæ diametro constitutis.s. in basi æquali ipsi, DF, & circa eosdem axes, siue diametros vtcunq; portionum, YBR, TYRI, DTIF, &, DBF, quod explicare opus erat, & in suprapoſita figura modo solito declaratum est, sed tantum vnico exemplo ne ipsa confunderetur.

COROLL. VI. SECTIO PRIOR.

IN Propos. sexta, & eiusdem figura apparet solidũ similare genitũ ex circulo, vel ellipsi, ABCD, siue sit sphæra, vel sphæroides, vel tantum solidum similare, ad solidum sibi similare genitum ex altera portionum, BAD, BCD, vtrâuis, vt ex, BAD, siue hoc sit portio sphæræ, vel sphæroidis, vel tantum solidum similare genitum ex, BAD, esse vt parallelepipedũ sub altitudine, XC, basi quadrato, CA, ad parallelepipedũ sub altitudine, XE, basi quadrato, EA, vel vt cubus, AC, ad parallelepipedum sub altitudine tripla, EC, basi quadrato, AE, cum cubo, AE.

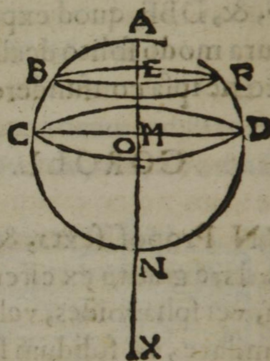


SECTIO POSTERIOR.

VNde colligitur in Corollario solidum similare genitum ex portione, BAD, ad sibi similare genitum ex portione, BCD, esse vt parallelepipedum sub altitudine, XE, basi quadrato, EA, ad parallelepipedum sub altitudine, OAE, basi quadrato, EC, qualiacunque sint illa solida similaria, siue sit, AC, axis, siue tantum diameter.

COROLLARIVM VII.

IN Propos. septima colligitur solidum similare genitum ex portione, BAF, ad sibi similare genitum ex portione, CAD, siue hæc solida sint portiones sphæræ, vel sphæroidis, siue tantum solida similaria, siue, AN, sit axis, siue tantum diameter, esse vt parallelepipedum sub altitudine, XE, basi quadrato, EA, ad parallelepipedum sub altitudine, XM, basi quadrato, MA, vt exemplificatur in præsenti figura more solito.



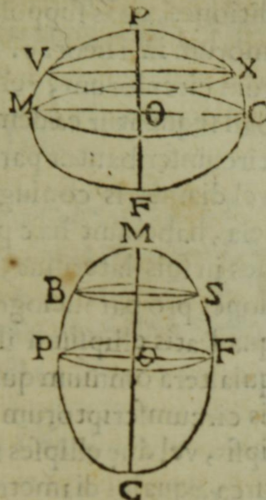
COROLLARIVM VIII.

IN Propos. octaua discimus à data sphæra, vel sphæroide, vel solido quocunq; genito ex circulo, vel ellipsi, iuxta regulã, quę sit vna ex ordinatim applicatis, abscindere portionem, quę ad solidum similare sibi genitũ ex triangulo in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum cum portione constituto, habeat datam rationem, quam oportet esse maiorem sexquialtera; quę omnia ibi clarè patent, & ideò figuram non appono.

CO-

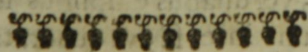
COROLL. IX. SECTIO PRIOR.

IN Propoſ. nona patet ratio, quam habet ſolidum ſimilare genitum ex circulo, vel ellipſi, iuxta regulam primum axim, vel diametrum, ad ſolidum ſimilare genitum ex eodem, iuxta ſecundum axim, vel diametrum tamquam regulam, ſiue hæc ſolida ſint ſphæra, vel ſphæroides, vel tantum ſolida ſimilaria, quæ in his appoſitis figuris clarè patent, in quarũ vna conſpici poteſt ſphæroides prolatum, in altera oblongum, prædicta autem ratio eſt ea, quam habet prima axis, vel diameter ad ſecundam axim, vel diametrum: quæ etiam pro reliquis ſolidis ad inuicem ſimilaribus manifeſta ſunt.



SECTIO POSTERIOR.

IN Corollario autem eiuſdem Theorematis colligimus eſſe notam rationem omnium quadratorum duarum portionum circuli, vel ellipſis abſciſſarum per lineas, quarum vna ſit parallela primo, altera ſecundo axi, vel diametro, quales ſint in appoſitis figuris portiones, BMS, VPX, vnde etiam nota erit ratio ſolidorum ſimilariũ, BMS, VPX, ex ipſis genitorum, vnum iuxta regulam, BS, alterum iuxta regulam, VX, ſiue ſint hæc portiones ſphæræ, vel ſphæroidis, ſiue ſolida ſimilaria genita ex portionibus, BMS, VFX.



COROLL. X. SECTIO PRIMA.

IN Propoſ. 12. dicimus, quod ſi circuli, vel ellipſes habuerint in ſuis cõiugatis axibus, vel diametris eas conditiones, quas ſuppoſuimus in eſſe lateribus parallelogrãmorum in Theor. 9. 10. 11. 12. 13. Lib. 2. quod pro eorum circulorum, vel ellipſium omnibus quadratis regula baſi ſequentur eædem concluſiones ibi collectæ, ſi.n. his circumſcribantur parallelogramma latera habẽtia axibus, vel diametris coniugatis circulorum, vel ellipſium parallela, habebunt hæc parallelogramma requiſitas conditiones in ſuis lateribus, & ideò ſequentur iam dictæ concluſiones pro parallelogrammis, & cõſequenter pro omnibus quadratis ellipſium illis inſcriptorũ, cum hæc ſint ſubſexquialtera omnium quadratorum parallelogrammorum illis circumſcriptorum .i. vt clarius loquar, ſi circulus, & ellipſis, vel duę ellipſes fuerint circa eandem diametrum, vel circa æquales diametros, vel axes, erunt omnia quadrata eorundem regulis ſecundis axibus, vel diametris, vt omnia quadrata parallelogrammorum illis circumſcriptibilium, latera habentium dictis axibus, vel diametris parallela, regulis eiſdem retentis, & quia omnia quadrata parallelogrammorũ, latera baſibus ęquè inclinata æqualia habentiũ regulis baſibus, ſunt vt quadrata baſium, ideò omnia quadrata circulorum, vel ellipſium circa eũdem axim, vel diametrum, vel æquales conſtitutorum, erunt vt quadrata ſecundorũ axium, vel diametrorum, & ideò ſolida ſimilaria genita ex ipſis iuxta eaſdem regulas, erunt vt quadrata ſecundorum axium, vel diametrorum, quæ ſolida, vel erunt ſphæra, & ſphæroides, vel ambo ſphæroides circa eundem axim, vel diametrum, vel ſolida ſimilaria genita ex dictis circulo, & ellipſi, vel duabus ellipſibus iuxta dictas regulas, quæ quoq; erunt inter ſe, vt quadrata ſecundorum axium, vel diametrorum.

SE-

SECTIO II.

QVod si in dictis figuris circulo, & ellipsi, vel ellipsibus sumatur pro regula communis axis, vel diameter, erunt omnia quadrata eorundem inter se, vt secundi axes, vel diametri inter se, & sic etiam erunt solida similaria ex eisdem genita iuxta dictam regulam, in quibus includitur sphæra, & sphæroides.

SECTIO III.

ITem colligimus solida similaria genita ex circulo, & ellipsi, vel ellipsibus, vtcunq; iuxta datas regulas.i.sphęram, & sphęroides, & alia quæcunq; solida similaria genita ex dictis figuris, habere inter se rationem ex eorũ axibus, vel diametris coniugatis compositam.

SECTIO IV.

ITem colligimus solida similaria genita ex circulo, vel ellipsi, vel ellipsibus, quæ habeant axes, vel diametros reciprocè quadratis axium illis coniugatorum respondentes iuxta quæ genita, intelligantur, esse æqualia, dummodo vel vna in vtrisq; sumãtur axes, vel vna diametri æqualiter ad inuicem inclinatæ: & si hæc sint æqualia, illa esse reciprocè respondentia.

SECTIO V.

ITem habemus, quod sphæræ, & similia sphæroideia, & in vniuersum, quod solida similaria genita ex circulis, vel ellipsibus habẽtibus axes, vel diametros in ratione secundorum axium, vel diametrorum, cum quibus ęqualiter sint inclinati, quod, inquam, sint in tripla ratione axiũ, vel dia-

metrorum .i. vt cubi eorundem. Hæc enim demonſtrata de omnibus quadratis parallelogrammorum pro omnibus quadratis circulorum, vel ellipſium, tamquam eorundem partibus proportionalibus (dum illis inſcripta intelliguntur) recipi poſſunt.

COROLLARIVM XI.

IN Propoſ. 13. colligemus ſolidum ſimilare genitum ex, OV, quod poteſt eſſe vel cylindrus, vel priſma, ad ſibi ſimilare genitum ex trilineo, DCV, eſſe vt, OV, ad reliquum ſpatium, dempta quarta circuli, vel ellipſis, OCD, cum exceſſu dicti quadrantis ſuper duas tertias, rectanguli, OV, .i. proximè, vt 21. ad 2. Exponatur de huius Theorematis figura tãtum rectãgulum, OV, cum quarta, OCD, dimiſſa, EF, ſi igitur intelligemus, OV, circa, DV, manentem reuolui, quoad redeat, vnde diſceſſit, deſcribetur ab, OV, cylindrus, OA, ideſt ſolidum ſimilare genitum ex, OV, cuius omnes figuræ ſimiles ſunt circuli, ſemidiametros in figura genitrice, OV, habentes, à trilineo autem, DCV, deſcribetur quoddam ſolidum, quod vocetur, Apex ſphæralis, ſi, OCD, ſit quarta circuli; vel ſphæroidalis, ſi, OCD, ſit quarta ellipſis, ideſt ſolidum ſimilare, quod poteſt dici genitum ex trilineo, DCV, habẽs omnes ſuas ſimiles figuras circulos ſemidiametros in figura genitrice, DCV, ſitos habentes, eſt igitur inter hæc duo ſimilaria ſolida, quæ in particulari hoc exemplo ſunt cylindrus, & apex ſphæralis, vel ſphæroidalis, ratio eadem ſupradictę, quam breuitatis cauſa aliter exemplificare dimiſi. Conſimili autem vnico exemplo .ſ. aſſumendo pro figuris ſimilibus ipſos circulos, ſemidiametros in figuris

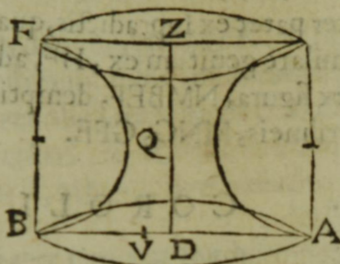


geni-

genitricibus habentibus, breuitatis causa, & ob seruandam in figuris claritatem imposterum contenti erimus.

COROLLARIVM XII.

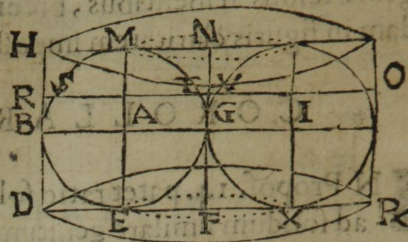
IN Propos. 14. patet ratio solidi similaris geniti ex, FD, ad solidum similare genitum ex figura, FQBDZ. Apposita .n. hic illius figura, dimissa, HC, &, AP, & retenta, BD, tantum in, V, diuisa, reuoluatur, FD, circa manẽtem axim, ZD, modò supradicto, ex, FD, igitur fiet cylindrus, FA, & ex figura, FQBDZ, fiet quoddam solidum rotũdum, quod vocetur, Tympanum sphærale, si, FQB, sit semicirculus, vel sphæroidale, si, FQB, sit ellipsis, erunt autem hęc duo solida similaria genita ex figuris, FD, FQBDZ, figuras similes circulos habẽtia, quorum semidiametri iacent in suis genitricibus figuris, & patet, quod ratio cylindri, FA, ad tympanum sphærale, vel sphæroidale, FQRA, est eadem ei, quam habet, BD, ad, DV, candem autem habet quodlibet solidum similare genitum ex, FD, ad similare sibi genitum ex figura, FQBDZ, qualecunque sit.



COROLLARIVM XIII.

IN Propos. 13. colligimus solidum similare genitum ex, HF, ad solidum similare genitum ex figura, NMBEF, demptis solidis similaribus genitis à trilineis, MNG, GFE, esse vt, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG. Reuoluatur, HF, circa, NF, manentem, vt supra, ex, HF, igitur fiet cylindrus, HR, & ex figura, NMBEF, fiet quædam figura, à

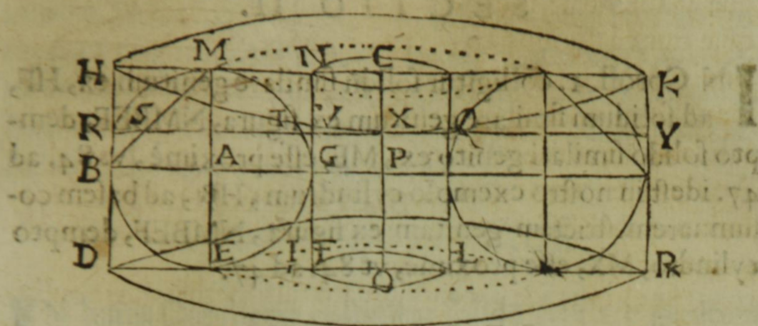
qua



qua si auferãtur solida, quæ fiunt à duobus trilineis, MNG, GFE, remanebit quædam figura solida, quã vocabimus, Anulum strictum circularem, si, MBEG, sit circulus; Ellipticum verò, si sit ellipsis, & patebit, quam rationem habeat cylindrus, HR, ad hunc anulum strictum, AI, sicuti vniuersaliter patet ex supradictis, quam rationem habeat solidum similare genitum ex, HF, ad solidum sibi similare genitum ex figura, NMBEF, demptis solidis similaribus genitis ex trilineis, MNG, GFE.

COROLLARIVM XIV.

IN Propos. 16. patet, quam rationem habet solidum similare genitum ex, HO, dempto solido similari genito ex, NO, ad solidum sibi similare genitũ ex figura, MBEOC, dempto solido similari genito ex figura, MGEOC, .i. esse eandem ei, quam habet, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG. Reuoluatur, HO, circa manentem axem, CO, modo supradicto, ex, HO, igitur fiet cylindrus, HR, & ex figura, CMBEO, fiet quoddam solidũ similare prædicto cylindro, auferatur à cylindro, HR, cylindrus, NL, descriptus ab, NO, & à prædicto solido similari auferatur solidum similare genitum ex figura, MGEOC. Dico nos iam compertum habere residuum primum .i. fasciam solidam cylindricam (vt ita dicam) HFLK, ad residuum secundum, ad solidum, inquam, quod gignitur ex reuolutione circuli, vel ellipsis, MBEG, esse vt, HF, ad ipsum circulũ, vel ellipsim, MBEG; quod etiam patet de residuis quorumlibet similarium solidorum ex, HO, & figura, MBEOC, genitorũ, demptis solidis



lidis similaribus genitis ex, NO, & figura, MGEOC, vt supra diximus. Vocetur autem solidum, quod in supradicto exemplo, & figura gignitur ex reuolutione circuli, vel ellipsis, MBEG, Anulus latus circularis, si, MBEG, sit circulus, vel, Anulus latus ellipticus, si, MBEG, sit ellipsis.

COROLL. XV. SECTIO PRIMA.

IN Propos. 17. colligitur solidum similare genitum ex, HF, ad solidum similare genitum ex figura, NMBEF, esse vt, HF, ad circulum, vel ellipsim, MBEG, vna cum residuo, quod remanet, si à rectangulò, MG, dematur quarta circuli, vel ellipsis, MAG, ablato insimul excessu, quo eadem quarta superat duas tertias rectanguli, MG. Conspiciatur ergo exemplum in figura Corollarij 13. huius, patebit ergo cylindrum, HR, ad solidum genitum ex figura, NMBEF, habere supradictam rationem, quæ est proximè, vt 21. ad 17. vt in Prop. 17. huius ostenditur. Vocetur autem solidũ similare genitum ex figura, NMBEF, habens omnes suas figuras similes, quę sint circuli, siue quod fit per reuolutionem dictæ figuræ, NMBEF, vocetur, inquam, Basis columnaris stricta, & circularis, si, MBEG, sit circulus, elliptica autem, si is sit ellipsis.

SE-

SECTIO II.

IN Coroll. 1. colligitur solidũ similare genitum ex, HF, ad solidum similare genitum ex figura, NMBEF, dempto solido similari genito ex, MF, esse proximè, vt 84. ad 47. idest in nostro exemplo cylindrum, H℞, ad basem columnarem strictam genitam ex figura, NMBEF, dempto cylindro, MX, esse proximè, vt 84. ad 47.

SECTIO III.

IN Coroll. 2. habetur solidum similare genitum ex, MF, demptis solidis similaribus genitis ex trilineis, MNG, GFE, ad solidum sibi similare genitum ex figura, NMBEF, dempto solido similari genito ex, MF, esse proximè, vt 19. ad 47. In exemplo autem nostro, dum reuoluitur, HF, apprehende superficiem cylindricam descriptam linea, ME, quæ in duas partes disseparat anulum strictum, AI, scilicet in vnam, quam possumus vocare interiorem, & in aliam exteriorẽ; interior est, quæ gignitur ex reuolutione semicirculi, vel semiellipsis, MGE; exterior autem, quæ generatur ex semicirculo, vel semiellipsi, MBE, est igitur hæc pars interior anuli stricti ad partem exteriorem proximè, vt 19. ad 47. vt in cæteris solidis similaribus supradictis contingere diximus.

COROLL. XVI. SECTIO PRIOR.

IN Propos. 18. habemus solidum similare genitum ex, HO, ad solidum similare genitum ex figura, CMBEO, esse vt quadratum, DO, ad rectangulum sub, DO, OE, vna cum rectangulo sub, OE, & sub excessu, quo dupla, EI, superat, EF, & $\frac{2}{3}$. quadrati, DE. Exemplum conspici potest in figura Coroll. 14. huius; in qua solidum similare genitum

tum

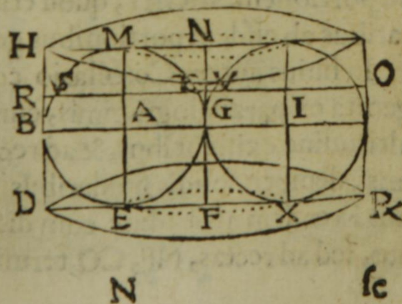
tum ex, HO, est cylindrus, HR, solidum verò similare genitum ex figura, CMBEO, est, quod nascitur ex reuolutione eiusdem figuræ circa, CO, quod solidum vocabimus. Basem columnarem latam, circularem, si, MBEG, sit circulus, ellipticam verò, si sit ellipsis.

SECTIO POSTERIOR.

IN huius Corollario colligitur solidũ similare genitum ex, HP, ad solidum similare genitũ ex figura, CMSBP, dempto solido similari genito ex trapezio, MBPC, idest in exemplo cylindrum genitum ex reuolutione, HP, ad mediam basem columnarem latã genitam ex figura, MSBPC, dempto frusto conico genito ex trapezio, CMBP, esse vt quadratum, BP, ad rectãgulum sub, AP, & sub excessu duplæ, EI, super, EF, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, BA. Ex quibus etiam facilè inueniri potest, quam rationem habeat solidum similare genitum ex figura, MSBPC, ad solidum similare genitum ex trapezio, MBPC, .i. quam rationem habeat, in exemplo, media basis columnaris lata genita ex reuolutione, MXBPC, ad frustum conicum genitum ex reuolutione trapezij, MBPC.

COROLL. XVII. SECTIO PRIOR.

IN Propos. 19. colligimus solidum similare genitum ex figura, SMNV, dempto solido similari genito ex quadrilineo, MNVT, ad solidum sibi similare genitum ex figura, SBEGT, demptis solidis similaribus genitis ex trilineis, TVG, GFE, es-



ſe vt portio, SMT, ad portionem, SBEGT, circuli, vel ellipſis, MBEG; ideſt in propoſito exemplo, ſolidum, quod generatur ex portione, SMT, dum intelligimus, HF, reuolui circa, NF, manentem axim, ad ſolidum, quod generatur ex portione, SBEGT, erit vt portio, SMT, ad portionem, SBEGT.

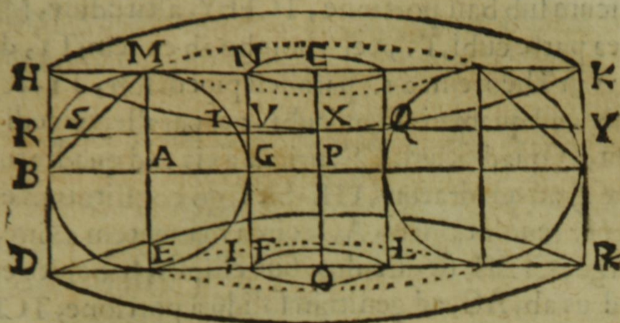
SECTIO POSTERIOR.

IN Corollario eiuſdem colligimus ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammis circa eoſdem axes, cum portionibus conſtitutos ad ſolida ſibi ſimilaria genita ex eiſdem portionibus, eſſe vt dicta parallelogramma ad dictas portiones .ſ. in exemplo cylindrum, HO, ad fruſtum anuli ſtricti reſectum ſuperficie deſcripta linea, ST, erit vt, HV, ad portionem, SMT, & item cylindrus, RR, deſcriptus ab, RF, ad portionem anuli ſtricti deſcriptam portionem, SBE GT, erit vt, RF, ad eandem portionem, quod patet etiam de reliquis eorundem ſolidis ſimilaribus.

COROLLARIVM XVIII.

IN Propoſ. 20. expoſita figura, & exemplo constructo, oſtendimus pariter ſolidum deſcriptũ à portione, SMT, ad ſolidum deſcriptum à portione, SBEGT, dum, HO, reuoluitur circa manentem axim, CO, eſſe vt portio, SMT, ad portionem, SBGET, quod etiam de reliquis ſolidis ſimilaribus ab eiſdem portionibus genitis patet.

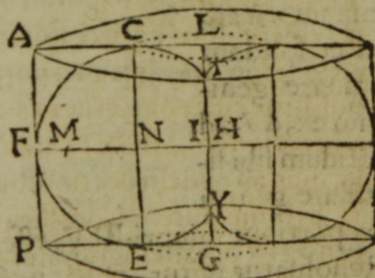
In huius autem Corollario colligitur ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammis, cum portionibus in eadem altitudine exiſtentibus, & ad rectas, HD, CO, terminantibus, demptis ſolidis ſimilaribus genitis ex parallelogrammis in eadem altitudine cum dictis portionibus exiſtentibus, ſed ad rectas, NF, CO, terminantibus, ad ſolida ſibi ſimila-



milaria genita ex figuris compositis ex dictis portionibus, & reliquo spatio, vsq; ad, CO, dempto solido similari genito ex hoc reliquo spatio, esse vt dictorum parallelogrammorum residuum parallelogrammũ ad dictam portionem. Vt in exemplo cyliadrum, HY, dempto cylindro, NQ, ad portionem anuli lati resectam per superficiem descriptam in reuolutione à linea, ST, esse vt, HV, ad portionẽ, SMT.

COROLLARIVM XIX.

IN Propos. 22. exposita figura, & exemplo constituto, colligimus solidum similare genitum ex, AG, ad solidum similare genitum ex figura, LCFEG, demptis solidis similaribus genitis ex trilineis, CLT, YGE, esse (si, CFEH, sit circulus) vt parallelepipedum sub basi parallelogrãmo, AG, altitudine, FI, ad cylindricum sub basi maiori portione, TCFEY, altitudine, IM, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY. In ellipsi verò, vt parallelepipedum sub basi parallelogrammo, AG, altitudine, FI, ad cylin-



lindricum ſub baſi portione, TCFEY, altitudine, MI, vna cum ea parte cubi, TY, vel (rhombo ab eadem, TY, deſcripto, vt in Theorem. 21.) parallelepipedi ſub, TY, & dicto rhombo, ad quam eiuſdem cubi, vel parallelepipedi ſexta pars ſit, vt quadratum, CE, primæ axis, ad quadratum ſecundæ .ſ. ad quadratum, FH. Sit ergo conſtitutum exemplum per reuolutionem, AG, circa manentem axim, LG, ſiue ergo, CFEH, ſit circulus, ſiue ellipſis, habebit genitus cylindrus ab, AG, ad genitum ſolidũ à portione, TCFEY, ſupradictam rationem. Vocetur autem ſolidũ deſcriptum à portione, TCFEY, (ſi ſit portio circuli) Malum roſeum; ſi verò ſit portio ellipſis: Malum cotoneum.

COROLLARIVM XX.

IN Propoſ. 23. ſumpta ex figura Theor. 21. portione minori vtcunque, RFV, quæ ſit portio circuli, cum illi circumſcripto rectangulo, ΔV, aſſumpto etiam integro axi, FH, & puncto, ω, in ea, vt ibi ſumptũ eſt, patet ſolidum ſimilare genitum ex, ΔV, ad ſolidum ſibi ſimilare genitũ



ex portione minori, RFV, eſſe vt ſexquialtera, FM, ad, Mω. Reuoluatur igitur, vt ſiat noſtrum exemplum, ΔV, circa, RV, manentem, cylindrus igitur deſcriptus à, ΔV, ad ſolidum deſcriptum à portione, RFV, erit vt ſexquialtera, FM, ad, Mω, & ſic de reliquis ſolidis ſimilaribus ab ipſis genitis, &c.

&c. Vocetur autem solidum descriptum per reuolutionem à portione circuli, RFV, minori; Malum citrium.

COROLLARIVM XXI.

IN Propos. 24. assumpta adhuc figura superioris, quæ reuoluitur, colligitur solidum similare genitum ex portione, RFV, iuxta axim, FM, regulã, ad solidum similare genitum ex eadem, iuxta basim, RV, regulam esse vt rectangulũ sub, ωM, & sub basi, RV, ad tria quadrata lineæ, RM, cum quadrato, MF. Fiat nostrum exemplum per reuolutionem portionis, RFV, semel circa, RV, & iterum circa, FM, manentes axes, primò igitur fit: Malum citrium per reuolutionem circa, RV, secundò fit segmentum sphæræ per reuolutionem circa, FM, patet ergo, quã rationem habeat Malum citrium, ad segmentum sphæræ ab eadem circuli portione per reuolutionem genitum, quod etiam de reliquis similaribus solidis ab eadem portione, iuxta dictas regulas genitis conclusum est.

COROLLARIVM XXII.

IN Propos. 25. si sumamus ex figura Theor. 21. portionem circuli, vel ellipsis, RFV, vtcunque, cum integra axi, FH, à qua sit abscissa, IH, æqualis, FM, sumatur insuper de, MH, ipsa, MΓ, ad quam, FM, sit vt, ΔV, ad portionem, RFV, colligemus, exposita hic figura, solidum simi-

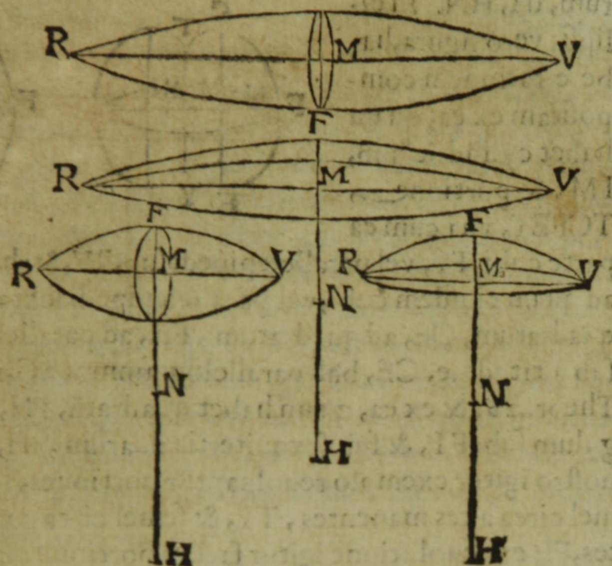
lare genitũ ex, ΔV, ad sibi similare genitũ ex portione, BFV, esse vt quadratũ, FM, ad rectangulum, quod remanet, dempto rectangulo sub, IM, & sub, ΓM, à rectangulo sub, FM, & $\frac{1}{3}$. ipsius, MH. Fiat nostrum exẽplum; reuoluatur, ΔV, circa manentem axim, RV, cylindrus igitur genitus ex reuolutione, ΔV, ad solidum genitum ex reuolutione portionis, RFV, habebit supradictam rationem; hoc autem solidum iam vocauimus: Malum citrium, si, RFV, sit portio circuli, cæterum, si sit portio ellipsis, vocetur; Oliua genita ex tali portione; eadem autem rationem habere solida similaria genita ex, ΔV, & portione, RFV, (intellige semper genita iuxta regulam ibi assumptam, scilicet iuxta regulam, FM,) iam superius diximus.



COROLLARIVM XXIII.

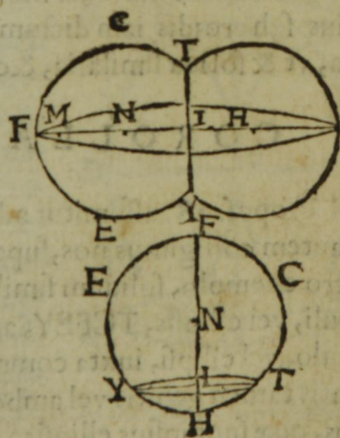
IN Propos. 26. pro eisdem antecedentis figuris colligitur solidum similare genitum iuxta regulam, FM, ad sibi similare genitum iuxta regulam, RV, esse vt parallelepipedum sub basi rectangulo, quod dicitur residuum antecedentis Theorematis, altitudine tripla, MH, ad parallelepipedum sub basi rectangulo ipsius, FM, ductæ in, RV, altitudine linea composita ex, MH, HN. Pro nostro exemplo apponatur hic vtraq; portio, quæ reuoluantur semel circa, FM, & semel circa, RV, patebit ergo, quam rationem habeat,

beat, Malũ citriũ ad segmẽtum sphæræ genitũ ab eadem portione circuli, & quam habeat Oliua ad segmentum sphæroidis genitũ ex eadem portione.



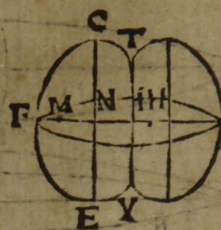
COROLLARIVM XXIV.

IN Propos. 27. assumitur iterum figura Theor. 21. tum circuli, tum ellipsis, & nunc, ijsdem figuris hic appositis, colligimus solidum similare genitum ex portione, TCFEY, iuxta regulã, FI, ad solidum sibi similare genitum ex eadem portione, iuxta regulam, TY, esse, in figura circuli, vt cylindricum sub, IM, & portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY, ad parallelepipedum sub altitudine, FI, basi verò rectangulo sub, FI, & sub sexquitertia dua-



rum,

rum, IH, HN. In ellipsis verò figura, habere rationem compositam ex ea, quam habet cylindricũ sub, IM, & portione, TCFEY, vna cum ea





parte cubi, TY, vel parallelepipedi sub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiusdem cubi, vel parallelepipedi sexta pars sit, vt quadratum, CE, ad quadratum, FH, ad parallelepipedum sub altitudine, CE, basi parallelogrammo, AG, in figura Theor. 26. & ex ea, quam habet quadratũ, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub sexquitertia duarum, IH, HN. Pro nostro igitur exemplo reuoluantur portiones, TCFEY, semel circa axes manentes, TY, & semel circa axes manentes, FI; ex reuolutione igitur facta à portione circuli circa, TY, fit, Malum Roseum, ex reuolutione verò eiusdem circa, FI, fit maius segmentum sphæræ: Item ex reuolutione facta à portione ellipsis, TCFEY, fit, Malum cotoneũ, circa axim, TY, ex reuolutione verò eiusdem circa, FI, fit maius segmentum sphæroidis: Igitur Malum Roseum ad segmentum maius sphæræ, & Malum cotoneum ad segmẽtum maius sphæroidis iam dictum, habent supradictam rationem, vt & solida similaria, &c.

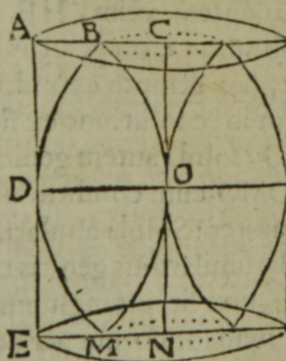
COROLLARIVM XXV.

IN Propos. 28. assumitur adhuc antecedentis figura, hic autem colligimus nos, superiores aspiciẽtes figuras pro nostro exemplo, solidum similare genitum ex portione circuli, vel ellipsis, TCFEY, ad solidum similare genitũ ex circulo, vel ellipsi, iuxta communem regulam, FH, (comparatis tamen genitis vel ambo ex ijs, quæ sunt circuli, vel ex ijs, quæ sunt ipsius ellipsis) esse vt cylindricum sub altitudi-

tudine, MI, basi portione, TCFEY, vna cum $\frac{1}{6}$. cubi, TY, (quod tamen solum in circuli figura contingit) in figura, autem ellipsis illud commutamus in hoc .s. vna cũ ea parte cubi, TY, vel parallelepipedi sub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiusdem cubi, vel parallelepipedi sexta pars sit, vt quadratum primi axis ad quadratum secundi ad $\frac{2}{3}$. parallelepipedi sub, AD, & parallelogrammo, AQ, .i. in figura circuli, ad $\frac{2}{3}$. cubi, FH. Dictam igitur rationem in suprapositis exemplis habet Malum Roseum, ad sphæram genitam ex circulo, ex cuius portione maiori Malum Roseum dicitur genitum iuxta regulam, FH; & eandem habet Malum Cotoneum ad sphæroides genitum ex ellipsi reuoluta circa axem, CE, parallelam axi, TY, circa quem reuoluitur portio, TCFEY, ad generandum Malum Cotoneum, quam rationem pariter diximus habere supradicta similaria solida, &c.

COROLLARIVM XXVI.

IN Proposit. 29. habetur solidum similare genitum ex, AN, ad solidum similare genitum ex figura, CBDMN, demptis solidis similaribus genitis ex trilineis, siue figuris, BCO, ONM, esse vt, AN, ad figurã, BDMO. Apponatur hic illa figura, &, vt fiat nostrum exẽplum, reuoluatur, AN, quod supponamus esse parallelogrammum rectangulum cõuenienter ipsi reuolutioni, circa axim, CN, manentem, fiet igitur ex, AN, cylindrus, ex reuolutione verò figuræ, BDMO, fiet solidũ totupliciter variabile, quotupliciter figura, BDMO, variari potest,

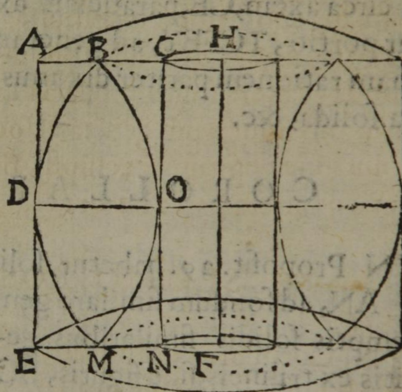


O voca-

vocabimus aũt solida genita à figuris inscriptis rectãgulo, AN, genita inquam per reuolutionem circa, CN. Solida anularia stricta, patet ergo cylindrum genitum ab, AN, ad solidum anulare strictum genitum ex figura, BDMO, quæcunq; sit, esse vt, AN, ad eandem figuram, BDMO; sicque esse cætera solida similaria genita ex his, iuxta sumptam regulam siue, CN, siue, NE, vtrisq; solidis communem.

COROLLARIVM XXVII.

IN Propos. 30. colligimus solidum similare genitum ex, AF, dempto solido similari genito ex, CF, ad solidum similare genitum ex figura, HBDMF, dempto solido similari genito ex figura, HBOMF, esse vt, AN, ad figuram, BDMO. Assumatur hic illius figura, & pro nostro exemplo supponatur, AF, esse rectangulum, reuoluaturq; circa manentem axim, HF, cylindrus ergo genitus

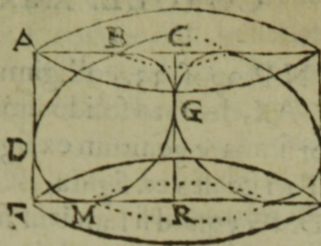


ex, AF, dempto cylindro genito ex, CF, ad solidum genitum in reuolutione ex figura, BDMO, erit vt, AN, ad, BDMO; solida autem genita ex figuris inscriptis rectangulo, BDMO, cum conditionibus ibi requisitis vocabimus communiter: Solida anularia lata; eadem patent de cæteris solidis similaribus genitis ex, AN, & figura, BDMO, etiamsi, AF, non sit rectangulum, quia tunc intelligo fieri generationem solidorum per descriptionem similium figurarum, & non per reuolutionem, vt in exemplo solito assumpsi, vnde patet, &c.

CO-

COROLL. XXVIII. SECTIO PRIOR.

IN Propoſ. 32. docemur ſolidum ſimilare genitum ex, AR, ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex figura, BCGRMD, demptis ſolidis ſimilarib. genitis ex trilineis, BCG, GRM, eſſe vt, AR, ad ellipſim, BDMG; ponatur hic illa figura, &c, vt fiat noſtrum exemplum, reuoluatur, AR, circa manẽtem axim, CR; cylindrus ergo genitus ex, AR, ad ſolidum genitum in reuolutione ex ellipſi, BDMG, erit vt, AR, ad ellipſim, BDMG, ſic etiam, vt diximus, cætera ſolida ſimilaria ex iiſdem per deſcriptionem ſimilium figurarum genita: Vocetur autem ſolidum in reuolutione genitum ex ellipſi, BDMG; Anulus ſtrictus ellipticus altera parte latior.



SECTIO POSTERIOR.

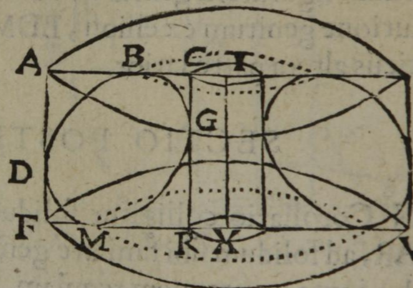
IN Corollario colligitur ſolidum ſimilare genitum ex, AR, ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex ellipſi, BDMG, ambo iuxta communem regulam, FR, eſſe vt ſolidum ſimilare genitum ex eodem, AR, ad ſolidum ſimilare ſibi genitum ex eadem ellipſi, BDMG, ſed ambo genita iuxta communem regulam, CR. Exemplum patebit, ſi concipies, AR, reuolui circa manentem axim, FR, cylindrus enim tunc genitus, ab, AR, ad anulum ſtrictum ellipticum altera parte latiorem, genitum ab ellipſi, BDMG, habebit eandem rationem, quã ſupradictus cylindrus ad ſupradictum anulum, & ideò (amplius colligemus) quoniam, permutãdo, cylindrus genitus in reuolutione circa, CR, facta, ad cylindrum genitum in reuolutione circa, FR, eſt vt anulus

factus in illa reuolutione ad anulum factum in hac, proptera sicuti primus cylindrus ad secũdum est, vt, FR, ad, RC, ita primus anulus ad secundũ erit, vt, FR, ad, RC, sic etiam erunt solida similaria genita ex eisdem, iuxta regulas, FR, RC.

N. Cor. 4. Gen. 34. l. 2.

COROLL. XXIX. SECTIO PRIMA.

IN Propos. 33. colligimus solidum similare genitum ex, AX, dempto solido similari genito ex, CX, ad solidum sibi similare genitum ex figura, BDMXT, dempto solido similari genito ex figura, BGMXT, esse vt, AR, ad ellipsim, BDMG; quod si sumãtur solida similaria genita ex eisdem iuxta cõmunem regulam, TX, vel, CR, eandem rationem inter se habere comperientur dicta residua .s. quam habet, AR, ad ellipsim, BDMG. Exponatur figura, &, vt fiat exẽplum, reuoluatur, AX, circa manẽtem axim, TX, igitur cylindrus genitus in reuolutione ex, AX, dẽpto cylindro genito ex, CX, ad solidum genitum in reuolutione ex ellipsi, BDMG, erit vt, AR, ad ellipsim, BDMG; idem accidet, si reuolutio fiat circa axem parallelam ipsi, AC, inclusam duabus, FA, RC, versus, A, C, puncta productis: vocetur autem solidum genitum in reuolutione ex ellipsi, BDMG, Anulus latus ellipticus altera parte strictior.



SECTIO II.

HInc insimul patet, quod fascia solida cylindrica (vt ita dicam) in reuolutione circa, TX, genita ex, AR, ad

ad anulum genitũ ex ellipsi, BDMG, in eadem reuolutione, est vt cylindrus genitus ex, AR, dũ reuolutio fit circa, CR, ad anulum strictum ellipticum altera parte latiorem in eadem reuolutione circa, CR, ab ellipsi, BDMG, genitum; nam ambo sunt, vt, AR, ad ellipsim, BDMG, idem patet pro solidis similaribus, &c. Quia verò dicta fascia solida genita ab, AR, ad cylindrum ab eodem, AR, genitum est, vt residuum quadrati, FX, dempto quadrato, RX, ad quadratum, FR, est .n. cylindrus genitus ab, AX, ad cylindrum genitum ab, AR, vt quadratum, FX, ad quadratum, FR, cylindrus item genitus à, CX, ad eundem cylindrum genitum ab, AR, est vt quadratum, RX, ad quadratum, RF, ergo hoc cylindro dempto à cylindro genito ab, AX, reliqua fascia solida genita ex, AR, ad cylindrum genitum ex eodem, AR, erit vt residuum quadrati, FX, ab eo dempto quadrato, RX, ad quadratum, FR, hanc ergo rationem habebit etiam anulus latus ellipticus altera parte strictior ad anulum strictũ ellipticum altera parte latiorem ex eadem ellipsi, BDMG, genitum; quia verò residuum quadrati, FX, dempto quadrato, RX, est rectangulũ sub, XR, RF, bis cum quadrato, FR, .i. rectangulum sub, XF, FR, cum rectangulo sub, XR, RF, .i. rectangulum sub composita ex, RX, XF, & sub, FR, ideò dictus anulus latus ad dictum anulum strictum, erit vt rectãgulum sub composita ex, RX, XF, & sub, FR, ad quadratum, FR, .i. erit vt composita ex, FX, XR, ad, RF, nempè vt, VR, ad, RF.

SECTIO III.

VLterius habemus fascias solidas cylindricas genitas ex. g. ab eodem rectangulo, AR, dum fit reuolutio semel circa, TX, & semel circa parallelam, AC, ad anulos latos ellipticos altera parte strictiores genitos in reuolutionibus ab ellipsi, BDMG, habere eandem rationem

.f. quam

.f. quam habet, AR, ad ellipsim, BDMG, & ideò inter se dictos anulos esse, vt dictas fascias, dictæ autem fasciæ solidæ cylindricæ sunt, vt residua, demptis à quadratis semidiametrorum basium integrorum cylindrorum quadratis semidiametrorum basium cylindrorũ, quas dictæ fasciæ complectuntur, & ideò dicti anuli inter se eandem rationem habebunt, quam dicta quadratorum residua.

SECTIO IV.

IN Corollario huius tandem dicitur, quod si, BDMG, non esset ellipsis, tum in Schemate huius, tum Theorematis antecedentis, sed alia vtcunq; figura habens tamen prædictas conditiones ibi appositas, quod de eadem dicta quoq; de ellipsi, BDMG, verificarentur, nosq; hic colligimus, quod omnia supradicta æquè, ac de solidis genitis ab ellipsi, BDMG, de genitis ab ipsa figura pariter verificarẽtur. Possumus autem voçare solida descripta per reuolutionem factam circa, CR, à figura, BDMG. Solida anularia stricta altera parte latiora: quæ verò fiunt ab eadem per reuolutionem circa, TX. Solida anularia lata altera parte strictiora.

SCHOLIVM.

POssent quidem plura alia circa hæc solida considerari; vt si secentur planis parallelis, ad axem, circa quem fit reuolutio, existentibus rectis, quam inter se rationem habeant resecta segmenta. Item restat contemplandum solidum, quod nasceretur ex reuolutione dimidiæ ellipsis circa non axem, sed diametrum, vel diametro parallelam; quæ voluta circa diametrum solidũ describit referens figuram Pyri; circa verò parallelam diametro portionem maiorem ab ellipsi resecantem, describit quoddam solidum latius ex vna parte, quam ex alia, referẽs figuram Mali paradisi,

vt vul-

ut vulgò dicitur, circa verò parallelam diametro reuoluta, quæ . b ellipsi minorem abscindat portionem, describit quoddam solidum referens figuram Fici, pluraq; his similia contemplanda remanerent, sed vt studioso Lectori in agro hoc fertilissimo laborandi, illumq; excolendi non omnis videatur sublatus esse locus, illius hac inquisitioni reseruare voluimus. Aduerte autem in superioribus licet figurarum assumpti fuerint axes, vt circa eosdem fieret reuolutio, tamen eadem verificari assumptis, quæ sunt tantum diametri, nam passiones Sectionum Conicarum eisdem insunt, siue sint circa axes, siue circa tantum diametros, vt habetur Libro Primo Scholio Propositionis 40.

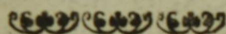
Finis Libri Tertij.



GEOMETRIÆ CAVALERII.

LIBER QVARTVS.

In quo de Parabola, & ſolidis ab eadem genitis enucleatur doctrina.



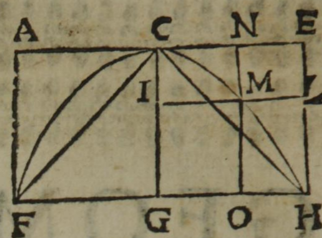
THEOREMA I. PROPOS. I.



I parallelogrãmum, & triangulum fuerint in eadem baſi, & circa eundem axim, vel diametrum cum parabola; parallelogrammum erit parabolæ ſexquialterum, triãgulum autem erit eiuſdem parabolæ ſubſexquitertium.

Sit ergo parabola, FCH, in baſi, FH, circa axim, vel diametrũ, CG, ſit autem in eadem baſi, FH, & circa eundem axim, vel diametrum parallelogrammum quoque, AH, & triangulum, CFH. Dico ergo parallelogrammum, AH, eſſe ſexquialterum parabolæ, FCH; triangulũ autem, CFH,

 eſſe



esse eiusdem parabolæ, FCH, subsexquitertium. Sumatur ergo in, CE, quæ tangit parabolam in puncto, C, vtcunq; punctum, N, & per, N, ducatur ipsi, CG, parallela, NO, producta vsq; ad basim, FH, cui occurrat in, O; quæ pariter secet curuam parabolæ in, M, & per, M, ducatur ipsi basi, FH, parallela, IL. Est ergo quadratũ, GH, vel quadratum, EC, ad quadratum, IM, vel ad quadratum, CN, vt, GC, ad, CI, .i. vt, ON, ad, NM, est autem, CH, parallelogrãmum in eadem basi, & altitudine cum trilineo, CMHE, & punctum, N, vtcunq; sumptum, per quod acta est ipsi, CG, parallela, NO, repertumq; est, vt quadratum, EC, ad quadratum, CN, ita esse, ON, ad, NM; ergo horum quatuor ordinum magnitudines erunt proportionales .s. omnia quadrata maximarum abscissarum, EC, magnitudines primi ordinis collectæ iuxta quadratum, CE, ad quadrata omnium abscissarum ipsius, CE, siue ambo sint recti, vel eiusdem obliqui transitus, quæ sunt magnitudines secundi ordinis collectæ, iuxta quadratum, CN, erũt vt omnes lineæ parallelogrammi, CH, magnitudines tertij ordinis collectæ, iuxta, NO, ad omnes lineas trilinei, CMHE, magnitudines quarti ordinis collectas, iuxta, NM, regula pro his omnibus lineis existente ipsa, EH; vt autem sunt omnes lineæ parallelogrammi, CH, ad omnes lineas trilinei, CMHE, ita est parallelogrammum, CH, ad trilineum, CMHE, ergo parallelogrammum, CH, ad trilineũ, CMHE, est vt quadrata maximarum abscissarum ipsius, CE, ad quadrata omnium abscissarum ipsius, CE, verum illa quadrata sunt istorum tripla, ergo erit parallelogrammum, CH, triplum ipsius trilinei, CMHE, ergo idem parallelogramum, CH, erit sexquialterum semiparabolæ, GCMH, ideò etiam parallelogrammum, AH, erit parabolæ, FCH, sexquialterum.

Ex 38. & Schol. 40. l. 1.

Coroll. 3. 26. l. 2.

3. l. 2.

Corol. 25. l. 2.

rum. Quoniam verò triangulum, CFH, est dimidium parallelogrammi, AH, ideò quarum partium parallelogrammum, AH, erit sex, & parabola, FCH, cõsequenter earundem quatuor, triangulum, CFH, erit tria, & ideò erit ad parabolam, FCH, vt tria ad quatuor, & idcircò erit eiusdem subsexquitertium, quæ ostendere oportebat.

COROLLARIVM.

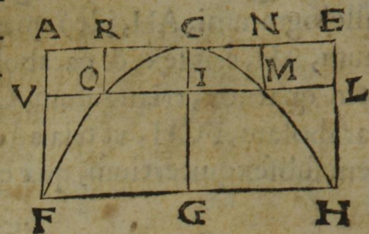
Hinc patet ductas in trilineo, CMHE, æquidistantes axi, vel diametro, CG, esse inter se, vt quadrata abscissarum per easdem à tangente, CE, versus verticem parabolæ, qui est punctum, C; nam ostensum est, ON, siue, HE, ad, NM, esse vt quadratum, EC, ad quadratum, CN, & punctum, N, sumptum est vtcunque, ideo, &c.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI intra parabolam ducantur vtcunq; duæ ad axim, vel diametrum eiusdem ordinatim applicatæ lineæ, abscissæ ab ijsdem parabolæ, erunt inter se, vt cubi dictarum linearum ordinatim applicatarum.

Sint ergo intra parabolam circa axim, vel diametrum, CG, constitutam, duæ ad ipsum ordinatim applicatæ rectæ lineæ, FH, OM, parabolas, OCM, FCH, abscindentes. Dico ergo parabolam, FCH, ad parabolam, OCM, esse vt cubum, FH, ad cubum, OM; constituãtur circa axes, vel diametros, CI, CG, & in eisdem basibus, OM, FH, cum dictis parabolis parallelogrãma, AH, RM. Quoniam ergo æquiangula parallelogramma habent rationem ex lateribus compositam, sunt autem parallelogramma, AH, RM, æqui- 11. l. 2.

angula, nam, OM, est parallela ipsi, FH, ideò parallelogrãmum, AH, ad parallelogrammum, RM, habebit rationem compositam ex ea, quam habet, FA, ad, RO, .i. GC, ad, CI, .i. quadratum, FH, ad quadratum, OM, & ex ea, quam habet, FH, ad, OM, sed etiam cubus, FH, ad cubum, OM, habet rationem compositam ex ea, quam habet quadratũ, FH, ad quadratum, OM, & ex ea, quã habet, FH, ad, OM, ergo parallelogrammum, AH, ad parallelogrammum, RM, & consequenter parabola, FCH, ad parabolã, OCM, (quia sunt dictorum parallelogrammorum subsexquialteræ) erit vt cubus, FH, ad cubum, OM, quod ostendere opus erat.



38 & Scholiũ 40. l. 1.

D. Cor. 4. Gen. 34. l. 2.

Ex antec.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI in parabola ducatur quædam recta linea ad eiusdem axim, vel diametrum ordinatim applicata; agantur deinde ipsi axi, vel diametro æquidistantes rectæ lineæ vsq; ad curuam parabolicam, & dictam ordinatim applicatam, quæ basis erit eiusdem parabolæ: Dictæ æquidistantes rectæ lineæ erunt inter se, vt rectangula sub partibus basis ab eisdem æquidistantibus constitutis.

Sit ergo parabola, FCH, circa axim, vel diametrũ, CG, ad quam ordinatim applicetur recta linea vtcunque, FH, ducantur deinde intra parabolam axi, vel diametro, CG, parallelæ vtcunque, AN, MO, basim, FH, in punctis, N, O, diuidentes. Dico igitur rectam, AN, ad rectam, MO, esse vt rectangulum, FNH, ad rectangulum, FOH; ducatur

per,

per, M, ipsi, FH, parallela, MI; est ergo, GC, ad, CI, vt quadratum, GH, ad quadratũ, IM, vel ad quadratum, GO, ergo, per conuersionem rationis, GC, ad, GI, vel ad, MO, erit vt quadratum, HG, ad sui reliquum, dempto quadrato, GO, hoc autem residuum est rectangulum sub, GOH, bis, vna cum quadrato, OH, quod est æquale rectangulo, FOH, nam rectangulum, GOH, cum quadrato, OH, æquatur rectangulo, GHO, .i. rectangulo sub, FG, OH, cui si iunxeris rectangulum sub, GO, & eadem, OH, consurget integrum rectangulum, FOH, æquale rectangulis sub, GOH, bis, vna cũ quadrato, OH, ergo, CG, ad, MO, erit vt quadratum, GH, .i. vt rectangulum, FGH, ad rectangulum, FOH, & conuertendo, MO, ad, CG, erit vt rectang. HOF, ad rectangulum, HGF; eodem modo ostendemus, CG, ad, AN, esse vt idem rectangulum, HGF, ad rectangulum, FNH, ergo ex æquali, & cõuertendo, AN, ad, MO, erit vt rectangulum, FNH, ad rectangulum, FOH, quod ostendere oportebat. Possunt autem vocari &, AN, MO, ordinatim applicatæ ad basim parabolæ, FCH, .s. ad ipsam, FH.

38 & Sch. 40. l 1.

4. 2 elem.

3. 2. elem.

1. 2. elem.

A C I M F N G O H

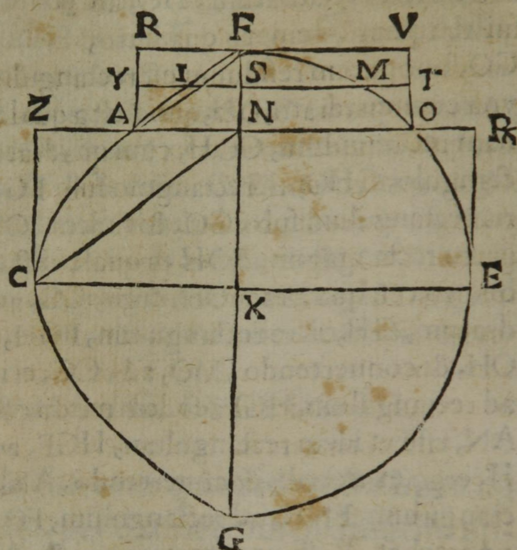
THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI ad basim parabolæ ordinatim applicetur vtcunque recta linea, fiat autem parallelogrammum, & triangulum habentia circa communem angulum dictam applicatam, & abscissam à basi ab vtrauis extremitatum eiusdem, vel sint duæ ad basim vtcunq; ordinatim applicatæ, sub alterutra quarum, & sub inclusa ab ijsdem portione basis fiat parallelogrammum, & trian-

gulum;

gulum; dicti parallelogrãmi, vel trianguli, ad portionem parabolæ dicto parallelogrammo inſcriptam ratio nota erit.

Sit parabola, cuius baſis, FG, ad axim, vel diametrum, CX, ordinatim applicata; ad baſim autẽ, FG, ſit etiã ordinatim applicata, AN, vtcunque diuidẽs baſim, FG, in puncto, N, fiat autem parallelogrammum, RN, & triangulum, AFN, ſub lateribus, AN, NF, vel ſub, AN, NG; Vel ſint duæ vtcunq; ad baſim, FG, ordinatim applicatæ, AN, CX, fiat autem parallelogrammum, & triangulum ſub, AN, NX, vel ſub, CX, XN. Dico parallelogrammum, RN, vel triangulum, FAN, ad portionem, AFN, parabolæ, FCG, parallelogrammo, RN, inſcriptam, eſſe in ratione nota. Similiter parallelogrammum, ZX, & triangulũ, NCX, ad portionem, ACXN, habere rationem notam. Producatur, CX, vtcunq; in, E, & circa ſemiaxes, vel ſemidiametros coniugatas, FX, XE, intelligatur deſcriptus ſemicirculus, vel ſemiellipſis, FEG, producantur deinde, RF, ZN, indefinitè, ſecetque, ZN, curuam ſemicirculi, vel ſemiellipſis, FEG, in puncto, O, & compleantur parallelogramma, VN, RX, ſumatur deinde



in, FN

in, FN, vtcunq; punctum, S, per quod ipsi, CE, parallela, ducatur, YT, secans curuam parabolæ in, I, curuã autem, FEG, in, M; est ergo, AN, ad, IS, vt rectangulum, GNF, ad rectangulum, GSF, est autem etiam quadratũ, ON, ad quadratum, SM, vt rectangulum, GNF, ad rectãgulum, GSF, ergo, AN, vel, YS, ad, SI, erit vt quadratum, NO, vel vt quadratum, TS, ad quadratum, SM, sunt autem RN, NV, parallelogramma in eisdem basibus, & altitudinibus cum portionibus, AFN, NFO, & punctum, S, sumptum est vtcunque, repertumq; est, vt, YS, ad, SI, ita esse quadratum, TS, ad quadratum SM ergo horum quatuor ordinum magnitudines erunt proportionales collectæ, iuxta quatuor iam dictas magnitudines proportionales .f. omnes lineæ ipsius, RN, (sumpta pro omnibus communi regula, CE,) ad omnes lineas trilinei, FIAN, erunt vt omnia quadrata, FO, ad omnia quadrata trilinei, FMON, ratio autem, quam habent omnia quadrata, FO, ad omnia quadrata trilinei, FMON, iam notificata est Lib. 3. de Circulo, & Ellipsi Prop. 1. ergo & ratio omnium linearum, RN, ad omnes lineas trilinei, FIAN, & subinde ratio parallelogrammi, RN, ad portionem, FIAN, nota erit, & subinde nota erit ratio triãguli, FAN, quod est dimidium parallelogrammi, RN, ad portionem, FIAN; eodem modo ostendemus parallelogrammum, ZX, ad quadrilineum, NACX esse vt omnia quadrata, RX, ad omnia quadrata quadrilinei, ONXF, ratio autem, quam habent omnia quadrata, RX, ad omnia quadrata quadrilinei, ONXE, iam notificata est in supradicto Libro, Prop. 3. & 4. ergo ratio parallelogrammi, ZX, ad quadrilineum, siue portionem parabolæ, ANXC, nota erit, veluti & ratio trianguli, CNX, ad eandẽ portionem, ANXC, pariter nota erit, quod erat ostendendum.

Ex antec.

40. & Sch. l. 1.

Coroll. 3. 26. l. 2.

3. lib. 2.

CO-

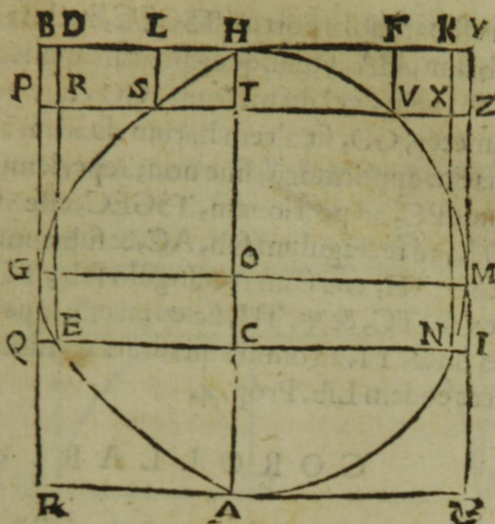
COROLLARIVM.

Hinc colligitur dicta parallelogramma ad portiones parabolæ sibi inscriptas, ordinatimque ad parabolæ basim applicatis inclusas, esse, vt omnia quadrata parallelogrammorum illis è regione respondentium, quibusq; inscribuntur semiportiones circuli, vel ellipsis iam dictæ ad omnia quadrata dictarum semiportionum, regula communi axi, vel diametro, CE, existente. Ostensum .n. est, RN, ad portionem, FAN, esse, vt omnia quadrata, FO, ad omnia quadrata trilinei, FMON; &, ZX, ad portionem, ACXN, esse, vt omnia quadrata, ℞X, ad omnia quadrata quadrilinei, NOEX, &, AN, CX, ordinatim ad basim, FG, applicatæ sumptæ sunt vtcunque, vnde patet.

THEOREMA V. PROPOS. V.

DVctis vtcunq; ad basim parabolæ ordinatim applicatis, parallelogramma sub ipsis, & portionibus basis ab ijsdem abscissis ad sibi inscriptas portiones parabolę infrascriptam rationem habebunt.

Sit ergo parabola, HGA, in basi, HA, circa axim, vel diametrum, GO, & sint ductæ ipsi, GO, parallellæ vtcunque, ST, EC, compleantur autem parallelogramma, LT, BO, DC, deinde producatur, GO, vtcunq; in, M, & circa semiaxes, vel semidiametros, HO, OM, intelligatur, HMA, semicirculus, vel semiellipsis, cuius curuã, ST, EC, productæ secent in, VN, compleantur pariter parallelogramma, HV, HM, HN, producantur insuper, YM, BG, vsque in, &℞, &, SV, EN, vsq; ad puncta, P, Z, Q, I, quæ sunt in lateribus, B℞, Y&. Igitur parallelogrammum, LT, ad portionem, HST, erit vt omnia quadrata, HV, ad omnia quadrata



drata semiportionis, HTV, (regula, GM, pro hac Propos. sũpta) .i. vt, TA, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. TA, & $\frac{1}{6}$. HT, vt patet in Libro de Circulo, & Ellipsi Propositione 1.

Similiter ostẽdemus, BO, semiparabolæ, HGO, esse sexquialterum, est .n. vt omnia quadrata, HM, ad omnia quadrata, HVMO, i. in ratione sexquialtera, vt patet in eadem Propos. 1.

Pariter demonstrabimus, DC, ad portionem, HGEC, esse vt, AC, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. AC, & $\frac{1}{6}$. CH, sic enim sunt omnia quadrata, HN, ad omnia quadrata semiportionis, HMNC, vt patet in eiusdem Lib. Prop. 1.

Quod si velimus comparare parallelogramma, quæ sunt in basibus æqualibus axi, vel diametro, inueniemus infrascriptas rationes. s. parallelogrammum, BT, ad portionem, HST, esse vt rectagulum sub, HO, & tripla, OA, ad rectangulum sub, HT, & sub cõposita ex, TA, &, AO, sicuti sunt omnia quadrata, HZ, ad omnia quadrata semiportionis, HTV. Eadem ratione, BC, ad portionem, HGEC, erit vt rectangulum sub, HO, & tripla, OA, ad rectãgulum sub, HC, & sub composita ex, CA, &, AO, sic enim sunt omnia quadrata, HI, ad omnia quadrata semiportionis, HMNC, vt patet in eodem Lib. 3. Prop. 2.

Si tandem sumamus parallelogrammum, PC, cui inscri-

pta est parabolæ portio; TSGEC, inclusa duabus, ST, EC, ad basim, HA, vtcunq; ordinatim applicatis, siue intercipiant axem, vel diametrum, GO, siue non, siue axis, vel diameter, GO, sit altera harum duarum ad basim, HA, ordinatim applicatarũ, siue non; reperiemus parallelogrammum, PC, ad portionem, TSGEC, esse vt rectangulum, HOA, ad rectãgulum sub, AC, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. CT, & tota, TH, vna cum rectangulo sub, TC, & sub composita ex $\frac{1}{6}$. TC, & $\frac{1}{2}$. TH, sic enim esse inueniemus omnia quadrata, TI, ad omnia quadrata quadrilinei, TVMNC, vt patet eodem Lib. Prop. 4.

COROLLARIVM.

Hinc habetur si fiant triangula, ductis, SH, PH, GH, QT, hæc ad portiones, quibus inscribuntur habere easdem rationes, quas habent dimidia antecedentium ad eadem consequentia superius exposita, sunt enim & ipsa triangula dictorum parallelogrammorum dimidia.

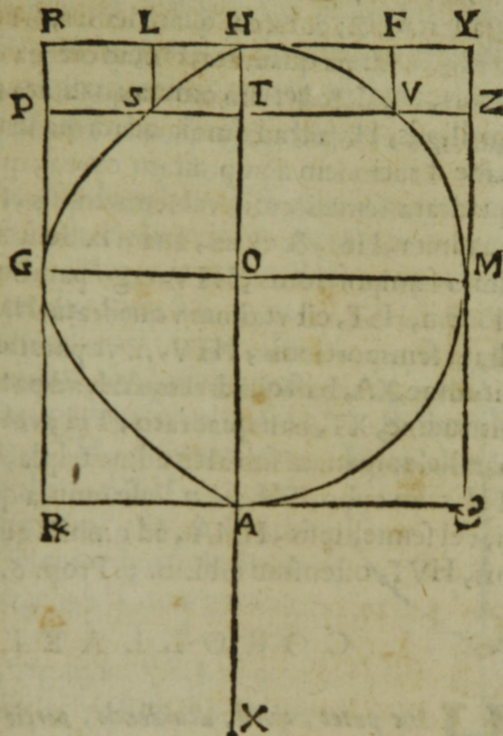
THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI ad basim datæ parabolę ordinatim applicetur recta linea, tota parabola ad abscissam portionem per ipsam ordinatim applicatam erit, vt parallelepipedum sub altitudine dimidia basi, sub basi autem quadrato totius basis, ad parallelepipedum sub altitudine linea composita ex dimidia basi, & reliquo basis, dempta abscissa ab eadem extremitate basis, à qua portio parabolæ abscinditur, & sub basi quadrato eiusdem abscissæ per dictam ordinatim applicatam: Vel erit, vt

cubus

cubus totius basis ad parallelepipedum sub basi quadrato abscissæ, altitudine tripla reliquæ, cum cubo dictæ abscissæ.

Sit parabola, HGA, cuius basis, HA, & axis, vel diameter, GO; ducatur deinde ipsi, GO, vtcũque parallela, ST. Dico parabolam, AGH, ad vtrãuis portionum, SHT, TSGA, vt ad, SHT, esse vt parallelepip. sub altitudine dimidia, HA, quę sit, AX, illi in directum cõstituta, basi quadrato, AH, ad parallelepipedum sub altitudine, XT, basi quadrato, TH. Producatur, GO, in, M, & circa semiaxes, vel semidiametros, HO, OM, intelligatur descriptus semicirculus, vel semiellipsis, HMA, deinde per puncta, G, M, ducantur ipsi, HA, parallelæ, B℞, Y&, & per, HA, ipsi, GM, parallelæ, BY, ℞&, producaturque, TS, vsq; ad, B℞, Y&, in, P, Z, & per, SV, ducantur, VF, SL, parallelæ ipsi, HA, sunt igitur parallelogrãma, BA, AY, LT, TF, BT, TY, PA, AZ. Igitur parabola, AGH,



Diff. 12. l. 1. ad portionem, HST, habet rationem compositam ex ea, quam habet parabola, HGA, ad parallelogrammum, BA,
Ex antec. .i. ex ea, quam habent omnia quadrata, H&, (regula sumpta pro hoc Theor. ipsa, GM,) ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, HMA; & ex ea, quam habet, AB, ad,
5. l. 2. BT, .i. AH, ad, HT, .i. omnia quadrata, & H, ad omnia
9. l. 2. quadrata, HZ; & ex ea, quam habet, BT, ad portionem,
Ex antec. HST, .i. omnia quadrata, HZ, ad omnia quadrata semiportionis, HTV, sed etiam omnia quadrata semicirculi, vel se-
Defin. 12. l. 1. miellipsis, HMA, ad omnia quadrata semiportionis, HTV, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, HMA, ad omnia quadrata, H&, & ex ea, quam habent hæc ad omnia quadrata semiportionis, HTV, ergo parabola, HGA, ad portionem, HST, est vt omnia quadrata, HMA, ad omnia qua-
6. l. 3. drata semiportionis, HTV, .i. vt parallelepipedum sub altitudine, XA, basi quadrato, AH, ad parallelepipedum sub altitudine, XT, basi quadrato, TH; vel vt cubus, AH, ad parallelepipedum sub altitudine tripla, AT, basi quadrato, TH, cum cubo, TH, sic.n. esse omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, HMA, ad omnia quadrata semiportionis, HVT, ostensum est Lib. 3. Prop. 6.

COROLLARIVM.

Hinc patet, quod, diuidendo, portio parabolæ, SGAT, ad portionem, SHT, erit vt omnia quadrata semiportionis, AMVT, ad omnia quadrata semiportionis, HVT, .f. vt parallelepipedum sub altitudine linea composita ex, OH, HT, basi quadrato, TA, ad parallelepipedum sub altitudine, XT, basi quadrato, HT, vt patet in Coroll. supradictæ Prop. 6. eiusdem Libri 3.



THEO-

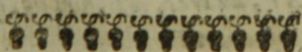
THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI duæ ad basim parabolæ applicentur vtcunque rectæ lineæ, abscissæ portiones parabolæ erunt inter se, vt parallelepipeda sub basibus quadratis abscissarum à basi per easdem applicatas ab eadem extremitate, à qua portiones abscissæ intelliguntur, altitudinibus compositis ex residuis dictæ basis (deptis abscissis) & dimidia totius.

Sit ergo parabola, HGA, in basi, HA, ad quam ordinatim applicentur duæ vtcunq; lineæ, ST, RV, abscindentes portiones, RHV, SHT. Dico portionem, RHV, ad portionem, SHT, esse (si producatur, AX, æqualis ipsius basis, AH, medietati) vt parallelepipedum sub altitudine, XV, basi quadrato, VH, ad parallelepipedum sub altitudine, XT, basi quadrato, TH. Est enim portio, RHV, ad parabolam, AGH, vt parallelepipedum sub altitudine, XV, basi quadrato, VH, ad parallelepipedum sub altitudine, XA, basi quadrato, AH, item parabola, AGH, ad portionem, HST, est vt parallelepipedum sub altitudine, XA, basi quadrato, AH, ad parallelepipedum sub altitudine, XT, basi quadrato, TH, ergo ex æquali portio, RHV, ad portionem, SHT, est vt parallelepipedum sub altitudine, XV, basi quadrato, VH, ad parallelepipedum sub altitudine, XT, basi quadrato, TH, quod ostendere oportebat.



Ex antec.

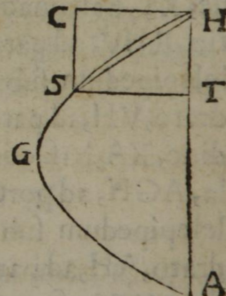


THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI ad basim datæ parabolæ ordinatim applicetur recta linea, sub qua, & sub portione basis abscissa, ac earum extrema iungente, fiat triangulum, portio parabolę abscissa ad triangulum sibi inscriptum erit, vt ad reliquam basis, dempta abscissa, eadem reliqua cum $\frac{1}{3}$. ipsius abscissæ.

Sit parabola, HGA, in basi, HA, ad quam ordinatim applicetur vtcunq; recta linea, ST, fiat autem triangulum sub, ST, & vtrauis duarũ, HT, TA, vt sub, HT, & sub, SH, quod sit, HST. Dico portionem, HST, ad triangulum, HST, esse vt compositam ex, AT, & $\frac{1}{3}$. TH; ad, AT, compleatur parallelogrammum, CT, est ergo parallelogrammum, CT, ad portionem, HST, vt, AT, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. AT, & $\frac{1}{6}$. TH, & antecedentium dimidia .s. triangulum, HST, ad portionem, HST, erit vt dimidia, AT, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. AT, & $\frac{1}{6}$. TH, .i. vt, AT, ad, AT, cum $\frac{1}{3}$. HT, &, cõuertendo, portio, HST, ad triangulũ, HST, erit vt composita ex $\frac{1}{3}$. HT, & tota, TA, ad, TA, quod ostendendum nobis erat.

5. huius.



SCHOLIVM.

POtest autem & dicta ratio sic constitui, triplicatis terminis, scilicet, quod portio HST, ad triangulum, HST, sit vt vna, HA, cum duabus, AT, ad tres, AT, vel sic, quod sit, vt dimidia, HA, cum, AT, ad ipsam, AT.

PRO-

PROBLEMA I. PROPOS. IX.

A Data parabola portionem abſcindere per lineam ab eiuſdem baſim ordinatim ductam, quæ ad triangulum ſub eadem ordinatim ducta, & abſciſſa per eandem à baſi parabolæ ad eandem partem, ad quã abſcinditur portio, habeat datam rationem, dummodò hæc ſit maior ſexquialtera.

Hoc Problema ſoluetur methodo Propoſ. 8. Lib. 3. propterea circa ipſum non immoror.

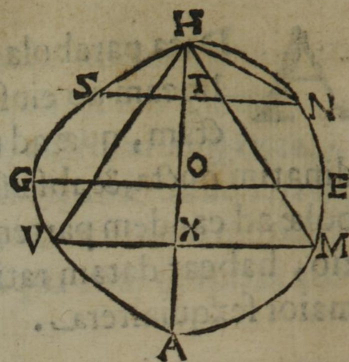
THEOREMA IX. PROPOS. X.

SI ad baſim datæ parabolæ ordinatim applicẽtur vtcunq; rectæ lineæ, triangula ſub ipſis, & portionibus baſis ab ijſdem abſciſſis, erũt vt parallelepipeda ſub baſibus quadratis abſciſſarum à baſi, altitudinibus autem reſiduis ipſius baſis demptis abſciſſis.

Sit parabola, HGA, cuius baſis, HA, axis, vel diameter, GO, ſint autem ductæ duæ vtcunque ordinatim applicatæ ad ipſam baſim, HA, ipſæ, ST, VX, & iungantur, SH, VH. Dico triangulum, VHX, ad triangulum, HST, eſſe vt parallelepipedum ſub altitudine, AX, baſi quadrato, XH, ad parallelepipedũ ſub altitudine, AT, baſi quadrato, TH. Quoniam enim triãgula vnum angulum vni angulo æqualem habentia rationem habẽt ex ratione laterum illis angulis circumſtantium compoſitam, ideò triãgulum, VHX, 6. 1. 2.
ad triangulum, SHT, habebit rationem compoſitam ex ea,

quam

quam habet, VX, ad, ST, ideſt
3. huius. rectangulum, AXH, ad rectã-
gulum, ATH, & ex ea, quam
habet, XH, ad, HT, ſed iſtę duæ
B. D. Cor. 4 Gen. 34. l. 2. rationes componũt rationem
parallelepipedi ſub altitudi-
ne, HX, baſi rectãgulo, AXH,
ad parallelepipedum ſub alti-
tudine, HT, baſi rectangulo,
Schol. 35. l. 2. HTA, .i. parallelepipedi ſub
altitudine, AX, baſi quadrato,
XH, ad parallelepipedum ſub
altitudine, AT, baſi quadrato, TH, ergo triangulum, VHX,
ad triangulum, SHT, erit vt parallelepipedum ſub altitudi-
ne, AX, baſi quadrato, XH, ad parallelepipedum ſub alti-
tudine, AT, baſi quadrato, TH, quod erat oſtendendum.



COROLLARIVM.

Hinc apparet, ſi producatur, GO, vtcunq; in, E, & circa ſemiaxes, vel ſemidiametros, HO, OE, deſcribi intelligatur ſemicirculus, vel ſemiellipſis, HEA, quod, ſi etiam producantur, ST, VX, in, N, M, & iungantur, HN, HM; omnia quadrata trianguli, HXM, ad omnia quadrata triãguli, HTN, regula, OE, erunt in ratione compoſita ex ea, quam habet quadratum, XM, ad quadratum, TN, .i. rectangulum, AXH, ad rectangulũ, ATH, & ex ea, quam habet, XH, ad, HT, i. erunt, vt parallelepipedum ſub altitudine, AX, baſi quadrato, XH, ad parallelepipedum ſub altitudine, AT, baſi quadrato, TH.

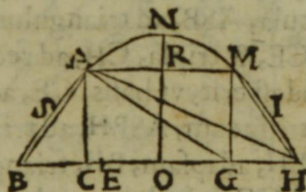
THEOREMA X. PROPOS. XI.

SI ad axim, vel diametrum datæ parabolæ ordinatim applicentur duæ rectæ lineæ eandem

ſecan-

ſecantes, deinde ſumpto extremo puncto minoris dictarum ordinatim applicatarum, & alio extremo puncto maioris dictarum, ſed non ad eandem partem, iungantur dicta puncta recta linea; hæc diuidet quadrilineum duabus ordinatim applicatis incluſum in duo trilinea: Trilineũ igitur conſtitutum in maiori dictarum linearũ ad trilineum conſtitutum in minori tanquam in baſi erit, vt dicta maior ordinatim ductarum, ſimul cum tertia proportionali duarum, quarum prima eſt tripla compoſitæ ex minori, & dimidia exceſſus maioris ſuper minorem, ſecunda autem eſt dimidia dicti exceſſus, ad eandem minorem, cum eadem tertia proportionali.

Sit ergo parabola, cuius baſis, BH, axis, vel diameter, NO, duæ ad ipſam vtcunq; ordinatim applicatæ ſint, BH, baſis, &, AM, minor ipſa, BH, abſcindens parabolam, ANM, ſumatur autem vtcunq; pũctum, A, extremum minoris, AM, & punctum, H, ad aliam partem



de duobus extremis maioris, BH, & iungantur, A,H, puncta recta linea, AH, deinde à punctis, A, M, demittantur verſus, BH, parallelæ ipſi, NO; AC, MG, erit ergo, BC, GH, exceſſus, BH, ſuper, AM, &, BC, æqualis ipſi, GH, dimidium dicti exceſſus; fiat etiam, vt tripla, HC, ad, BC, ita, BC, ad, CE, & iungatur, AG. Dico trilineum, ABH, ad trilineum, AMH, eſſe vt, BH, cum, CE, ad ipſam, AM, cum, CE: Prius autem dico portionculam, ASB, eſſe æqualem portionculæ, MIH, etenim trapeziũ, ABOR, æquatur trapezio,

pezio, ROHM, & quadrilineum, RASBO, ipsi quadrilineo, RMIHO, cum, AO, axis, vel diameter bifariam diuidat omnes æquidistantes ipsi, BH, & ideò omnes lineę quadrilinei, RASBO, æquentur omnibus lineis quadrilinei, RMHO, vnde dicta quadrilinea etiam sunt ęqualia, & ideò portiunculæ, ASB, MIH, inter se sunt æquales: Quoniam verò portio, ASBC, ad triangulum, ABC, est vt composita ex $\frac{1}{3}$. BC, & ex, CH, ad, CH, ideò, diuidendo, portionqula, ASB, ad triangulum, ABC, erit vt $\frac{1}{3}$. BC, ad, CH, vel vt, BC, ad triplam, CH, .i. sumpta, BC, communi altitudine, vt quadratum, BC, ad rectangulum sub, BC, & tripla, CH; est autem triangulum, ABC, ad triangulum, ABH, vt, CB, ad, BH, idest (sumpta communi altitudine tripla, CH,) vt rectãgulum sub, BC, & tripla, CH, ad rectangulum sub, BH, & tripla, CH, ergo ex æquali portioncula, ASB, ad triangulum, ABH, erit vt quadratum, BC, ad rectangulum sub, BH, & tripla, HC, quoniam verò, BC, est media proportionalis inter triplam, HC, & ipsam, CE, ideò quadratum, BC, æquatur rectãgulo sub tripla, HC, & sub, CE, vnde portioncula, ASB, ad triangulum, ABH, erit vt rectangulum sub, CE, & tripla, CH, ad rectangulum sub, BH, & tripla, CH, idest erit, vt basis, CE, ad basim, BH, ergo, componendo, trilineum, ASBH, ad triangulum, ABH, erit vt, CE, cum, BH, ad ipsam, BH, triangulum verò, ABH, ad triangulum, ACG, vel ad triangulum, AGM, est vt, BH, ad, CG, vel ad, AM, est verò triangulum, AGM, æquale triangulo, AHM, ergo trilineum, ASBH, ad triangulum, AMH, erit vt, CE, cum, BH, ad, AM, est verò trilineum, ASBH, ad portiunculam, ASB, vel, MIH, illi æqualem, per conuersionem rationis, vt, BH, cum, CE, ad ipsam, CE, ergo, colligendo, trilineum, ASBH, ad triangulum, AHM, & portiunculam, MIH, .i. ad trilineum, AMIH, erit vt, BH, cum, CE, ad ipsam, AM, cum, CE, quod ostendere oportebat.

3. 2.

8. huius.

5. l. 2.

Elicitur ex 12. l. 2.

CO-

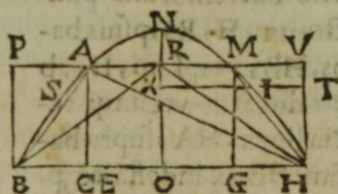
COROLLARIVM.

Hinc patet triangulum, ABH, ad portionculam, ASB, esse vt, BH, ad, CE.

THEOREMA XI. PROPOS. XII.

ASsumpta figura Propos. ant. dimissa recta, AG, & constituto parallelogrãmo super, BH, circa axim, vel diametrũ, RO, quod sit, PH, iunctisque, BR, RH, ostendemus parallelogrammum, PH, ad frustũ parabolæ, ASBHIM, esse vt, BH, ad, HC, cum, CE; & triangulũ, RBH, ad idem frustum esse vt, BH, ad duplam, HC, CE.

Parallelogrammum enim, PH, est ad triangulum, ABH, vt dupla, BH, ad ipsam, BH, triãgulum verò; ABH, ad sectionculam, ASB, est vt, BH, ad, CE, ergo, ex æquali, parallelogrammum, PH, ad sectionculã, ASB, est vt dupla, BH, ad, CE, & ad duas portionculas, ASB, MIH, erit vt dupla, BH, ad duplã, CE, idest vt, BH, ad, CE. Item parallelogrammum, PH, ad trapezium, ABHM, est vt, BH, ad, AM, cum dimidio excessus, BH, super, AM, .i. ad, AM, vel, CG, GH, ergo, colligẽdo, parallelogrammum, PH, ad sectionculas, ASB, MIH, cum trapezio, ABHM, .i. ad frustum parabolæ, ASBHIM, erit vt, BH, ad, HC, cum, CE. Quia verò triangulum, RBH, est dimidium parallelogrammi, PH, ideò ad frustum, ASBHIM, erit vt dimidia, BH, ad, HC, cum, CE, .i. vt, BH, ad duplam, HC, CE, quod erat ostendendum.



Corol. 11. huius.

20. l. 2.

THEOREMA XII. PROPOS. XIII.

SI ab extremo puncto baſis datæ parabolæ ducatur vſq; ad curuam parabolæ ſupra, vel infra baſim (indefinitè producta ipſa curua) recta linea: Data parabola ad ſegmenta ſub ductis lineis, & curua ab ijſdem abſciſſa comprehenſa, ſingillatim ſumpta, erit vt cubus baſis ipſius datæ parabolæ ad cubum rectæ lineæ dicto puncto interceptæ, & alio puncto eiuſdem baſis productæ, ſi opus ſit, in quod cadit recta linea, quæ ducitur ab alio extremo puncto baſis reſecti ſegmenti parallela axi, vel diametro ipſius datæ parabolæ.

Sit ergo data parabola, HNB, in baſi, HB, ſumpto autem vno extremorum punctorum, H, B, ipſius baſis, HB, vt ipſum, H, ab eo ducatur vtcunq; recta linea, HA, ſupra baſim, HB, & indefinitè producta curua, NAB, alia, HV, ſubter baſim, vt ſint conſtituta ſegmenta, ANH, VBNH, ſit autem axis, vel diameter, NO, cui parallelæ ducantur per puncta, AV, verſus baſim, HB, productam, ſi opus ſit, occurrentes illi in punctis, X, C. Dico ergo parabolam, HNB, ad ſegmentum, HNA, eſſe vt cubus, HB, ad cubum, HC. Eandem verò ad ſegmentum, HNBV, eſſe vt cubum, BH, ad cubum, HX, iungantur puncta, B, A; B, N; N, H, & ſit, CE, tertia proportionalis duarum, quarum prima eſt tripla, CH, ſecunda autem ipſa, BC. Quoniam ergo

trian-

triangula, NBH, BAH, ſunt in eadem baſi, BH, erunt inter ſe, vt altitudines, vel vt lineæ, quæ à verticibus, NA, ad baſes ductæ cum eiſdem æqualiter inclinantur .i. triangulum, HNB, ad triangulum, HAB, erit vt, NO, ad, AC, .i. vt rectangulum, HOB, ad rectangulum, HCB. Inſuper triangulum, HNB, ad portionculam, ASB, habet rationẽ compoſitam ex ratione trianguli, HNB, ad triangulum, HAB, .i. ex ratione rectanguli, HOB, ad rectangulum, HCB, & ex ratione trianguli, HAB, ad portionculam, ASB, .i. ex ratione, BH, ad, CE, quæ duæ rationes componunt rationem parallelepipedi ſub altitudine, BH, baſi rectangulo, HOB, vel quadrato, OH, ad parallelepipedum ſub altitudine, CE, baſi rectangulo, HCB, ergo triangulum, HNB, ad portionculam, ASB, eſt vt parallelepipedum ſub altitudine, BH, baſi quadrato, HO, ad parallelepipedum ſub altitudine, CE, baſi rectangulo, HCB, eſt autem, vt dicebatur, triangulum, HNB, ad triangulum, HAB, vt rectangulum, HOB, vel quadratum, HO, ad rectangulum, HCB, .i. ſumpta, HB, communi altitudine, vt parallelepipedum ſub altitudine, HB, baſi quadrato, HO, ad parallelepipedum ſub altitudine, HB, baſi rectangulo, HCB, ergo, colligendo, triangulum, HNB, ad portionculam, ASB, cum triagulo, ABH, .ſ. ad trilineum, HASB, erit vt parallelepipedum ſub altitudine, HB, baſi quadrato, HO, ad parallelepipedum ſub altitudine compoſita ex, HB, CE, baſi rectãgulo, HCB; vel vt iſtorum quadrupla .ſ. vt parallelepipedum ſub eadem altitudine, HB, baſi quadruplo quadrati, HO, .i. quadrato, HB, .ſ. vt cubus, HB, ad parallelepipedum ſub eadem altitudine compoſita ex, HB, CE, baſi quadruplo rectanguli, HCB. Quia verò parabola, HNB, eſt ſexquitertia trianguli, HNB, ideò erit ad ipſum, vt ſolidum ſexquitertium cubi, HB, ad cubum, HB, eſt autem triangulum, HNB, ad trilineum, HASB, vt cubus, HB, ad parallelepipedum ſub altitudine compoſita ex, HB, CE, & ſub baſi quadruplo re-

ctan-

Margin notes: Coroll. 1. 19. huius. — Defin. 12. l. 1. — Ex Corol. antec. — 1. huius.

ctanguli, HCB, ergo ex æquali parabola, HNB, ad trilineum, HASB, erit vt ſolidum ſexquitertium cubi, HB, ad parallelepipedum ſub altitudine compoſita ex, HB, CE, baſi quadruplo rectanguli, HCB; vel vt iſtorum ſubſexquitertia .ſ. vt cubus, HB, ab parallelepipedum ſub eadem altitudine compoſita ex, HB, CE, baſi triplo rectaguli, HCB, eſt .n. quadruplum rectanguli, HCB, ſexquitertium tripli eiuſdem rectanguli;
35.l.2. hoc autem conſequens parallelepipedum poteſt diuidi in parallelepipedum ſub altitudine, CE, baſi triplo rectãguli, HCB, vel baſi rectangulo ſub, BC, & tripla, CH, & in parallelepipedum ſub altitudine, HB, baſi etiam rectãgulo ſub, BCH, ter ſumpto, quoniam verò tripla, HC, &, CB, CE, ſunt deinceps proportionales, ideò parallelepipedũ, quod
41.l.2. fit ab illis tribus æquale eſt cubo mediæ .i. parallelepipedũ ſub altitudine, CE, & ſub baſi rectangulo ipſius, BC, ductæ in triplam, CH, æquabitur cubo, BC, remanet adhuc parallelepipedum ſub altitudine, HB, baſi tribus rectangulis, B CH, quod (altitudinem, BH, diuidentes in duas .ſ. in, BC,
35.l.2. CH,) diuidimus in parallelepipedum ſub altitudine, HC, baſi rectangulo, HCB, ter ſumpto .i. in parallelepipedum
36.l.2. ſub altitudine, BC, baſi quadrato, CH, ter ſumpto, & in parallelepipedũ ſub altitudine, BC, baſi rectangulo, BCH,
36.l.2. ter ſumpto .i. in parallelepipedum ſub altitudine, HC, baſi quadrato, BC, ter ſumpto; parallelepipedum ergo ſub altitudine compoſita ex, HB, CE, baſi rectangulo, HCB, ter ſumpto, æquatur parallelepipedis ter ſub, BC, & quadrato, CH, ter ſub, HC, & quadrato, CB, cum cubo, CB, ad hæc ergo ſimul ſumpta cubus, HB, erit vt parabola, HNB, ad trilineum, HASB; quia verò parallelepipedum ter ſub, BC,

& qua-

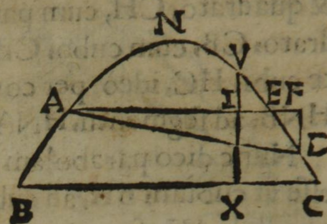
& quadrato, CH, cum parallelepipedo ter sub, HC, & quadrato, CB, cum cubo, CB, deficiunt à cubo, BH, quantitate cubi, HC, ideò, per conuersionem rationis, parabola, HNB, ad segmentũ, HNA, erit vt cubus, BH, ad cubũ, HC. 38. l. 2.

Nunc dico parabolam, HNB, ad segmentum, HNBV, esse vt cubum, BH, ad cubum, HX; ducatur per, V, ipsi, BH, 2. huius parallela, VZ, secans curuam parabolæ productam in, Z, & à puncto, H, ipsi, NO, vel, XV, demittatur parallela, HI, occurrens ipsi, VZ, in, I, est ergo parabola, BNH, ad parabolam, VBNHZ, vt cubus, BH, ad cubum, VZ, item parabola, VBNHZ, ad segmentũ, VBNH, (quia, VH, est supra basim, VZ,) est vt cubus, ZV, ad cubum, VI, vel, XH, æqualis, VI, quia, XI, est parallelogrammum; ergo, ex æquali, parabola, HNB, ad segmentum, HNBV, constitutum per lineam ductam à puncto extremo, H, basis, BH, properantem iuxta eandem basim, BH, erit vt cubus, BH, ad cubum, HX, quæ ostendenda erant.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIV.

SI intra curuam parabolæ ducantur vtcunque duæ rectæ lineæ in eãdem curuam terminantes, parabola ab vna ductarum constituta ad parabolam ab alia constitutam erit, vt cubus primò ductæ ad cubum rectæ lineæ, quæ ducitur per punctum extremum alterius, secundò ductæ, parallela primò ductæ, inclusæ dicto puncto, & alio eiusdem parallelæ productæ, si opus sit, in quod cadit, quæ ducitur per aliud extremum punctum secundò ductæ, parallela axi, vel diametro parabolæ per primò ductam constitutæ.

Sit



Sit curua parabolæ, BAEC, intra quam sint vtcumq; ductæ in eandem curuam hinc inde terminantes (.i. quod non sint ductæ parallelæ axi) primò, BC, secundò, AD; ducatur deinde per vtrumlibet extremorum punctorum secundò ductæ, vt per, A, ipsa, AF, parallela ipsi, BC, in quam productam, si opus sit, incidat parallela axi, quæ ducitur per punctum, D, aliud extremum ipsius, AD, occurrat autem illi in, F. Dico parabolam, BAEC, ad parabolam, AED, esse vt cubum, BC, ad cubum, AF. Est
1. huius. enim parabola, BNC, ad parabolam, ANE, vt cubus, BC,
Ex antec. ad cubum, AE, item parabola, ANE, ad parabolã, ANED, est vt cubus, AE, ad cubum, AF, ergo parabola, BNC, ad parabolam, ANED, est vt cubus, BC, ad cubum, AF, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XIV. PROPOS. XV.

IN eadem antecedentis figura, si ducatur intra parabolam, BNC, à puncto, V, sumpto vtcumque in curua, BNC, versus basim, BC, ipsa, VX, incidẽs basi in, X, parallela axi, vel diametro eiusdem parabolæ. Dico parabolam, ANED, ad segmentum, VCX, esse vt cubum, AF, ad parallelepipedum ter sub, BX, & quadrato, XC, cum cubo, XC.

Nam parabola, ANED, ad parabolam, BNC, conuertendo, est vt cubus, AF, ad cubum, BC, item parabola,
6. huius. BNC, ad segmentum, VCX, est vt cubus, BC, ad parallelepipedum ter sub altitudine, BX, basi quadrato, XC, cum

cubo,

cubo, XC, ergo, ex æquali, parabola, ANED, ad segmentum, VXC, erit vt cubus, AF, ad parallelepipedum ter sub, BX, & quadrato, XC, cum cubo, XC, quod ostendere oportebat.

THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

IN eadem supradicti Theorematis figura ostẽdemus trilineum, VNAI, ad trilineum, VNABX, esse vt parallelepipedum ter sub, EI, & quadrato, IA, cũ cubo, IA, ad parallelepipedum ter sub, CX, & quadrato, XB, cum cubo, XB. Similiter trilineum, VEI, ad trilineum, VECX, esse vt parallelepipedum ter sub, AI, & quadrato, IE, cum cubo, IE, ad parallelepipedum ter sub, BX, & quadrato, XC, cum cubo, XC.

Trilineum enim, VNAI, ad parabolam, ANE, est vt parallelepipedum ter sub, EI, & quadrato, IA, cum cubo, IA, ad cubum, AE, item parabola, ANE, ad parabolam, BNC, est vt cubus, AE, ad cubũ, BC, & tandem parabola, BNC, ad trilineũ, VABX, est vt cubus, CB, ad parallelepipedum ter sub, CX, & quadrato, XB, cum cubo, BX, ergo, ex æquali, trilineum, VNAI, ad trilineum, VNBX, erit vt parallelepipedum ter sub, EI, & quadrato, IA, cum cubo, IA, ad parallelepipedum ter sub, CX, & quadrato, XB, cum cubo, XB. Eodem modo ostendemus trilineum, VIE, ad trilineũ, VXC, esse vt parallelepipedum ter sub, AI, & quadrato, IE, cum cubo, IE, ad parallelepipedum ter sub, BX, & quadrato, XC, cum cubo, XC, quod, &c.

6. huius.
2. huius.
6. huius.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

SI duæ intra curuam parabolicam ducãtur rectæ lineæ axem secantes, fuerint autem constitutarum ab eisdem parabolarum diametri, vel axis, & diameter æquales, & ipsæ parabolæ erunt æquales.

Sit curua parabolica, BAC, intra quam ducantur vtcunque duæ, DF, MC, axem secantes, idest non parallelæ axi, sint autem, AR, HO, diametri, vel axis, & diameter inter se æquales. Dico parabolam, DAF, esse æqualem parabolæ, MHFC; ducatur per, C, ipsi, DF, parallela, CB, & producantur, AR, HO, vsq; ad, BC, in, P, Q, iunganturque, AC, HC, & à puncto, M, ducatur, MX, parallela axi, vel diametro, AP; quoniam ergo, OQ, est parallela ipsi, MX, & ipsa secat, MC, bifariam in, O, secabit etiam, XC, bifariam in Q; & quia parabola, ABC, ad parabolam, MHFC, est vt cubus, BC, ad cubum, CX, vel vt cubus, PC, ad cubum, CQ, ideò semiparabola, APC, ad semiparabolam, HOC, erit vt cubus, PC, ad cubum, CQ, & eorundem subsexquitertia .i. triangulũ, APC, ad triangulum, HOC, erit vt cubus, PC, ad cubum, CQ; quoniam verò triangula æquiangula habent inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel linearum à verticibus earundem ductarum æqualiter basibus inclinatarum; ideò triangulum, APC, ad triangulum, HOC, habebit rationem cõpositam ex ratione basis, PA, ad basim, OH, vel, AR, illi æqualem, & ex ratione, PC, ad, CQ, quæ vel sunt altitudines, vel lineæ ductæ à communi vertice, C, cum æquali inclinatione ad bases, AP, &, HO, productam,

12. huius

2. huius.

Coroll. 1. 19. l. 2.

quia,

quia, AP, HQ, sunt parallelæ, est autem vt, PA, ad, AR, ita quadratum, PC, ad quadratum, RF, ergo triangulũ, APC, ad triangulum, HOC, habebit rationem compositã ex ea, quam habet quadratum, PC, ad quadratum, RF, & ex ea, quam habet, PC, ad, CQ, quia verò triangulum, APC, ad triangulum, HOC, est vt cubus, PC, ad cubum, CQ, ideò ad illud habet etiam rationem compositam ex ea, quam habet, PC, ad, CQ, & ex ratione quadrati, PC, ad quadratum, CQ, ergo istæ duæ rationes, scilicet quam habet, PC, ad, CQ, & quadratum, PC, ad quadratum, RF, componunt eandem rationem, quam istæ duæ, scilicet ratio, PC, ad, CQ, & quadrati, PC, ad quadratum, CQ, est autem in his communis ratio, quam habet, PC, ad, CQ, ergo reliqua ratio, quam habet quadratum, PC, ad quadratum, CQ, erit eadem ei, quã habet quadratum idem, PC, ad quadratum, RF, ergo quadratum, CQ, erit æquale quadrato, RF, &, CQ, erit æqualis ipsi, RF. Quoniam autem parabola, BAC, ad parabolam, DAF, est vt cubus, BC, ad cubũ, DF, 1. huius
.i. vt cubus, PC, ad cubum, RF, item ostensum est parabolam eandem, BAC, ad parabolam, MHFC, esse vt cubum, 11. huius
PC, ad cubum, CQ, ideò parabola, DAF, ad parabolam, MHFC, erit vt cubus, RF, ad cubum, QC, sunt autem, QC, RF, inter se æquales, vt ostensum est, & ideò etiam eorundem cubi sunt æquales, ergo parabola, DAF, erit æqualis parabolæ, MHFC, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM.

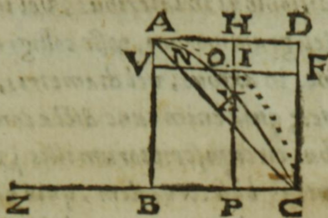
Hinc patet, si diametri, AR, HO, vel axis, & diameter sint æquales, etiam, DF, XC, esse æquales, nam ostensum est, QC, esse æqualem ipsi, RF, est autem, XC, dupla, CQ, &, DF, dupla, FR, ideò etiam, XC, DF, sunt æquales.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

EXposita semiparabola cum dimidia basi, & axi, vel diametro totius, & completo parallelogrammo sub dicto axi, vel diametro, & semibasi, descriptaque ellipsis quarta, vel circuli circa axem, vel diametrum, & semibasim dictam, tanquam circa semiaxes, vel semidiametros coniugatas integræ ellipsis, vel circuli; si deinde sumatur vtcunq; punctum in semibasi, per quod ducatur recta linea ad oppositum latus parallelogrammi parallela dictæ axi, vel diametro, portio huius inter semibasim, & curuam ellipsis, vel circuli inclusa, erit media proportionalis inter inclusam oppositis lateribus parallelogrammi iam dicti, & eadem semibasi, ac curua parabolæ. Si verò sumatur punctum in axi, vel diametro iam dicta, & per ipsum ducatur semibasi parallela, producta vsq; ad latus oppositum parallelogrammi iam dicti, & iungantur extrema puncta curuæ parabolæ recta linea, huius portio inclusa inter axim, vel diametrum dictam, & curuam parabolæ, erit media proportionalis inter eam, quæ includitur lateribus oppositis dicti parallelogrammi, & eam, quæ includitur lateribus trianguli sub dicta axi, vel diametro, & dicta semibasi constituti.

Sit semiparabola, AOCB, in basi, BC, & axis, vel diameter integræ, AB, compleaturq; parallelogrammum, DB, & circa, AB, BC, tanquam semiaxes, vel semidiametros coniuga-

iugatas, describatur quart... circuli, vel ellipsis, AICB, deinde sumatur in basi, BC, vtcunque punctum, P, & per, P, ducatur ipsi, AB, parallel..., PH, secans curuam parabolæ in, X, & circuli, vel ellipsis, AIC, in, I. Dico ergo, IP, esse mediam proportionalem inter, HP, PX, producatur, CB, versus, B, in, Z, ita vt, BZ, sit æqualis, BC; est ergo quadratum, AB, vel quadratum, HP, ad quadratum, PI, vt rectangulum, ZBC, ad rectangulum, ZPC, .i. vt, AB, vel, HP, ad, PX, ergo vt, HP, ad, PI, ita erit, IP, ad, PX. 40. cũ Sch. l. 1. 3. huius.



Iungantur puncta, A, C, & sumpto vtcunq; puncto, V, in, AB, per ipsum ducatur ipsi, BC, parallela, VF, secans curuam parabolæ in, O, & rectam, AC, in, N. Dico ergo, vt, FV, ad, VO, ita esse, VO, ad, VN; est .n. quadratũ, BC, vel quadratum, FV, ad quadratum, VO, vt, BA, ad, AV, .i. vt, BC, vel, FV, ad, VN, ergo erit, vt, FV, ad, VO, sic, VO, ad, VN, quæ ostendere oportebat.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

PArabolæ sunt inter se, vt parallelogramma illis circumscripta latera habentia basibus, & corũdem axibus, vel diametris parallela.

Patet hæc propositio, nam dictæ parabolæ sunt subsexquialteræ dictorum parallelogrammorum, & ideò sunt inter se, vt ipsa parallelogramma. 1. huius.

A. COROLL. SECTIO I. A

HInc patet, conclusiones, quæ de parallelogrammis collectæ sunt in Propos. 5. 6. 7. 8. Lib. 2. suppositis quibusdam condi-

ditionibus in lateribus, vel in altitudine, & basi dictorum parallelogrammorum, posse colligi etiam pro parabolis easdem conditiones in axibus, vel diametris, vel altitudinibus, & basibus habentes; quia enim tunc dicta conditiones reperiuntur etiam in lateribus circumscriptorum illis parallelogrammorum, vel in altitudine, & basi eorundem, quia basis est communis, & reliquum latus axi, vel diametro parabolæ æquidistans, ideò sequũtur illicò ostensa conclusiones pro parallelogrammis; & consequenter etiam pro ipsis parabolis, quarum ipsa parallelogramma sunt sexquialtera, recipi possunt.

B

B. SECTIO II.

QVia ergo ostensum est parallelogramma, quæ sunt in eadem altitudine, esse inter se, vt bases, & quæ in eadem basi, vel æqualibus basibus, esse inter se, vt altitudines, vel vt lineæ à verticibus ad bases cum æquali inclinatione ad easdem ducta: ideò colligemus etiam parabolas, quæ sunt circa eũdem axem, vel diametrum, esse inter se, vt bases; & quæ sunt in eadem, vel æqualibus basibus, esse inter se, vt altitudines, vel vt lineæ, quæ à verticibus eorundem ad bases cum æquali inclinatione ducuntur, siue illa sint axes, siue diametri.

C

C. SECTIO III.

SImiliter colligemus parabolas habere rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel linearum, quæ à verticibus ducuntur, æqualiter basibus inclinatarum, siue sint axes, siue diametri.

D

D. SECTIO IV.]

ITem parabolæ habentes bases altitudinibus, vel lineis à verticibus ductis æqualiter inclinatis reciprocas erunt æquales; &

para-

parabolæ æquales, quarum diametri æqualiter ad baſes ſint inclinatæ, habebunt baſes altitudinibus, vel lineis ductis à verticibus ad baſes æqualiter inclinatis reciprocas.

E. SECTIO V. E

Deniq; parabolæ, quarum axes, vel diametri, ad baſes æqualiter inclinati, ad eaſdem baſes habent eandem rationem, ſunt in dupla ratione baſium, ſiue axium, vel diametrorum, vel vt quadrata eorundem: Nam parallelogramma his parabolis circumſcripta ſunt ſimilia, & ideò ſunt, vt quadrata laterum homologorum, quæ vel ſunt axes, aut diametri, vel baſes dictarum parabolarum, & ideò etiam ipſæ parabolæ ſunt, vt quadrata axium, vel diametrorum æqualiter baſibus inclinatarum, vel vt quadrata baſium, quæ omnia facilè patent.

SCHOLIVM.

Deſiderari fortè tamen videtur, quod oſtendamus has varietates parabolis contingere poſſe, nec eaſdem eſſe; exempli gratia, vt circulos, quibus tantum contingit ſe habere, vt diametrorum quadrata, nec alia ijſdem accidit variatio, propterea ſubſequens Theorema ſubijciemus.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

Dato quocunq; parallelogrammo, circa eiuſdem duo latera angulum continentia ſemiparabola deſcribi poteſt, cuius alterum eorundem laterum ſit baſis, alterum axis, vel diameter integræ parabolæ, ad quem dicta baſis ordinatim applicatur.

Sit parallelogrammum quodcunque, AD, cuius sumantur vtcunq; duo latera, AC, CD, circa angulum, ACD. Dico circa, AC, CD, semiparabolam describi posse, ita vt alterum ipsorũ, AC, CD, sit basis dictæ semiparabolæ, alterum sit axis, vel diameter integræ



parabolæ; Esto quod velimus, CD, esse basim, &, CA, axim, vel diametrum integræ parabolæ; applicetur ergo ad, AC, rectangulum æquale quadrato, CD, quod latitudinem faciat ipsam, XA, erit ergo quadratum, CD, æquale rectangulo sub, CA, AX, &, AX, erit linea, iuxta quam possunt, quæ à curua parabolæ transeunte per puncta, D, A, vertice, A, ad axim, vel diametrum, AC, ordinatim applicari possunt; erit ergo quædam semiparabola, cuius curua trãsibit per puncta, AD, in basi, CD, existente, AC, axi, vel diametro integræ parabolæ, sit autem dicta semiparabola, ACD, quod ostendere opus erat.

Schol. 40. l. 1.

COROLLARIVM.

Hinc liquet, si cuilibet parallelogrammo est inscriptibilis semiparabola tali pacto, quo dictum est, quod varietates, quæ parallelogrammis contingunt, etiam ipsis parabolis competere possunt.

THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

Omnia quadrata parallelogrammi in eadem basi, & circa eũdem axim, vel diametrum cum parabola, regula basi, sunt dupla omnium quadratorum ipsius parabolæ: Omnia

verò

verò quadrata parabolæ ſunt ſexquialtera omniũ quadratorum triãguli in eadem baſi, & circa eundem axim, vel diametrum cum ipſa conſtituti.

Sit ergo parabola, cuius baſis, VF, axis, vel diameter, EM, ſit etiam parallelogrammum, AF, & triangulũ, EVF, in eadem baſi, VF, & circa eũdem axim, vel diametrum, EM. Dico, omnia quadrata, AF, regula, VF, omnium quadratorum parabolæ, VEF, eſſe dupla: Omnia verò quadrata parabolæ, VEF, omniũ quadratorum trianguli, VEF, eſſe ſexquialtera. Sumatur intra, EM, vtcunque punctum, N, per quod ipſi, VF, agatur parallela, ND, ſecãs curuam parabolæ in, O; eſt ergo quadratum, MF, vel quadratum, ND, ad quadratum, NO, vt, ME, ad, EN, eſt autem, EF, parallelogrammum in eadem baſi, & altitudine cum ſemiparabola, EMF, regula eſt, MF, & punctum, N, ſumptum vtcunque, per quod regulæ parallela ducta eſt, ND, repertumq; eſt, vt quadratum, DN, ad quadratum, NO, ita eſſe, ME, ad, EN, ergo horum quatuor ordinum magnitudines erũt proportionales collectæ iuxta dictas quatuor magnitudines proportionales .ſ. omnia quadrata, EF, magnitudines primi ordinis collectæ iuxta primam .ſ. iuxta quadratum, ND, ad omnia quadrata ſemiparabolæ, EMF, magnitudines ſecundi ordinis collectas iuxta ſecundam .ſ. iuxta quadratum, NO, erunt vt maximæ abſciſſarum, EM, magnitudines tertij ordinis collectæ iuxta tertiam .ſ. iuxta, ME, ad omnes abſciſſas ipſius, MF, magnitudines quarti ordinis collectas iuxta quartã .ſ. iuxta, EN, ſumptis maximis abſciſſarum, EM, & eiuſdem omnibus abſciſſis, vel recti, vel eiuſdem obliqui trãſitus; ſunt autem maximæ abſciſſarum, EM, duplæ omnium abſciſſa- Coroll. 3. 16. l. 2. Coroll. 2. 19 l. 2.



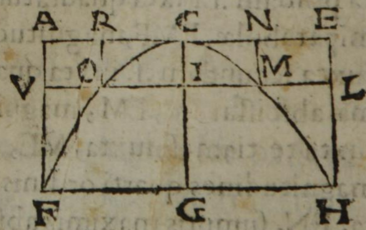
rum, EM, recti, vel eiusdem obliqui transitus, ergo & omnia quadrata, EF, erunt dupla omnium quadratorum semiparabolæ, EMF, & eorum quadrupla .s. omnia quadrata, AF, erunt dupla omnium quadratorum parabolæ, VEF; Quarum ergo partium omnia quadrata, AF, erunt sex, earum omnia quadrata parabolæ, VEF, erunt tres, sed quarū partium omnia quadrata, AF, sunt sex, earum omnia quadrata trianguli, EVF, sunt duæ, quia omnia quadrata, AF, sunt tripla omnium quadratorum triāguli, EVF, ergo quarum partium omnia quadrata parabolæ, VEF, sunt tres, earum omnia quadrata trianguli, EVF, erunt duæ, ergo omnia quadrata parabolæ, VEF, erunt sexquialtera omnium quadratorum trianguli, VEF, quæ ostendere oportebat.

24. l. 2.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII.

SI ad eundem axim, vel diametrum parabolæ ordinatim applicentur duæ rectæ lineæ parabolas constituentes, quarum altera sumatur pro regula, harum parabolarum omnia quadrata erunt inter se, vt quadrata axium, vel diametrorum earundem.

Sint ergo ad eundem axim, vel diametrum, CG, parabolæ, FCH, duæ vtcunque ordinatim applicatæ, FH, OM, parabolas, FCH, OCM, abscindentes, sit autem regula altera harum ordinatim applicatarū, vt, FH. Dico omnia quadrata parabolæ, FCH, ad omnia quadrata parabolæ, OCM, esse vt quadratum, GC, ad quadra-



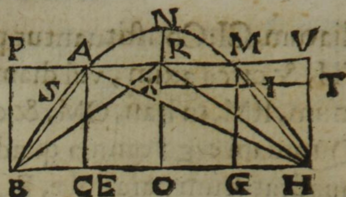
dra-

diatum, CI: Constituantur parallelogrammum, AH, in basi, FH, & circa axim, vel diametrum, CG, & parallelogrammum, RM, in basi, OM, & circa axim, vel diametrum, CI. Quoniam ergo omnia quadrata, AH, sunt dupla omnium quadratorum parabolæ, FCH, & omnia quadrata, RM, sunt dupla omnium quadratorum parabolæ, OCM, ideò omnia quadrata parabolæ, FCH, ad omnia quadrata parabolæ, OCM, erunt vt omnia quadrata, AH, ad omnia quadrata, RM: Omnia verò quadrata, AH, ad omnia quadrata, RM, habēt rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, FH, ad quadratum, OM, idest ex ea, quam habet, GC, ad, CI, & ex ea, quam habet, HE, ad, NM, quia illæ cum basibus, OM, FH, continent angulos æquales, duæ autem rationes, scilicet, quam habet, GC, ad, CI, &, HE, ad, NM, .i. GC, ad, CI, componunt rationem quadrati, GC, ad quadratū, CI, ergo omnia quadrata, AH, ad omnia quadrata, RM, vel omnia quadrata parabolæ, FCH, ad omnia quadrata parabolæ, OCM, erunt vt quadratum, GC, ad quadratum, CI, quod ostendere opus erat. Ex antec. 11. l. 2.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXIIII.

IN figura Prop. 12. sumpta regula ipsa, BH, ostendemus omnia quadrata, PH, ad omnia quadrata frusti, ABHM, esse vt, ON, ad compositam ex, NR, & $\frac{1}{2}$. RO: Omnia verò quadrata frusti, ABHM, ad omnia quadrata trianguli, RBH, esse vt compositam ex, ON, dupla, NR, & $\frac{1}{2}$. RO, ad ipsam, NO.

Sumatur in, RO, vtcunq; punctum, X, per quod regulæ, BH, parallela ducatur, XT, secans curuam parabolæ in, I; est ergo quadratum, OH, vel quadratū, TX, ad quadratum,



XI, vt, ON, ad, NX, est autem parallelogrammum, RH, in eadem basi, & altitudine cum quadrilineo, ROHM, & punctum, X, sumptum est vtcunque, ductaque, XT, regulę parallela, repertum est quadratum, TX, ad quadratum, XI, esse vt, ON, ad, NX, ergo horum quatuor ordinum magnitudines erunt proportionales .s. omnia quadrata, RH, magnitudines primi ordinis collectæ iuxta primam .s. iuxta quadratum, TX, ad omnia quadrata quadrilinei, RMHO, magnitudines secundi ordinis collectas iuxta secundã .s. iuxta quadratum, XI, erunt vt maximæ abscissarum, OR, adiuncta, RN, ad omnes abscissas, OR, adiuncta, RN, quæ sunt magnitudines collectæ iuxta tertiam, & quartam .s. iuxta, ON, tertiam, & NX, quartam, iisdem recti, vel eiusdem obliqui transitus sumptis: Quia verò datæ rectæ lineæ, OR, adiungitur, RN, ideò maximæ abscissarum, OR, adiuncta, RN, ad omnes abscissas, OR, adiuncta, RN, recti, vel eiusdẽ obliqui transitus, sunt vt, ON, ad compositam ex, NR, & $\frac{1}{2}$. RO, ideò omnia quadrata, RH, ad omnia quadrata quadrilinei, RMHO, vel eorum quadrupla .i. omnia quadrata, PH, ad omnia quadrata frusti, ABHM, erunt vt, ON, ad cõpositam ex, NR, & $\frac{1}{2}$. RO; Et cõuertendo omnia quadrata frusti, ABHM, ad omnia quadrata, PH, erunt vt composita ex, NR, & $\frac{1}{2}$. RO, ad, NO, omnia verò quadrata, PH, omniũ quadratorũ trianguli, RBH, sunt tripla .i. sunt vt, NO, ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, NO, ergo, ex æquali, omnia quadrata frusti, ABHM, ad omnia quadrata trianguli, BRH, erunt vt composita ex, NR, & $\frac{1}{2}$. RO, ad $\frac{1}{3}$. NO, vel vt horum tripla .s. vt composita ex tribus, NR, & sexquialtera, RO, ad ipsam, NO, porrò si iunxerimus vnam, NR, cum, RO, fiet integra, ON, cum duabus, NR, & dimidia, RO, æqualis triplæ, NR, & sexquialteræ, RO; ergo omnia quadrata frusti, ABHM,

Coroll. 3. 26. l. 2.

Corol. 20. l. 2.

24. l. 2.

ad

ad omnia quadrata trianguli, RBH, erunt vt composita ex dupla, NR, & dimidia, RO, cum, NO, ad ipsam, NO; quæ ostendere oportebat.

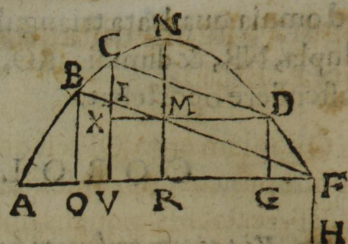
COROLLARIVM.

Quia autem probatum fuit omnia quadrata, PH, ad omnia quadrata frusti, ABHM, esse vt, NO, ad dimidiam, OR, cum, RN, sunt autem omnia quadrata, PH, ad omnia quadrata parallelogrammi, AG, vt quadratum, HO, ad quadratum, RM, .i. vt, ON, ad, NR, ideò omnia quadrata, PH, ad omnia quadrata frusti, ABHM, ab ijsdem demptis omnibus quadratis, AG, erunt vt, NO, ad dimidiam ipsius, OR.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIV.

SI intra curuam parabolæ ducatur vtcunq; recta linea in eandem terminata, & ad axem obliqua, deinde intra portionem ab ipsa resectam ducatur alia vtcunq; prædictæ parallela, agantur autem ab extremitate harum parallelarum lineæ axi æquidistantes: Vt basis resectæ portionis ad distantiam parallelarum ab eiusdem extremitate ductarum, ita erit alia prædictæ parallela ad distantiam parallelarum ductarum ab eiusdem extremitate secundò dictæ.

Sit ergo intra curuam parabolicam, ABCDF, ducta vtcunque, BF, obliquè secans axem, NR, in eandem curuam terminata, agatur deinde intra portionem, BNF, resectam à, BF, recta, CD, parallela ipsi, BF; ducatur insuper à punctis, B, C, D, F, axi, NR, parallelæ, BO, CV, DG, FH, & à pun-



puncto, F, cadat ipsi, NR, perpendicularis, FA, secans parallelas, DG, NR, CV, BO, in punctis, G, R, V, O, poterunt ergo dictarum parallelarum distantię sumi in ipsamet, AF, nam ipsa perpendiculariter dictas parallelas secat, erit ergo, OF, distantia parallelarum, BO, FH, ab extremis punctis rectæ, BF, ductarum; pariter, VG, erit distantia parallelarum, CV, DG, ab extremis punctis, CD, ductarum. Dico ergo, BF, ad, FO, esse vt, CD, ad, VG: Ducatur à puncto, D, ipsi, CV, perpendicularis, DX, secans, BF, in, M, quoniam ergo anguli, BOF, CXD, sunt recti, ideò sunt inter se æquales, item angulus, OBF, est æqualis angulo, VIF, &, VIF, ipsi angulo, XCD, ergo angulus, OBF, erit æqualis angulo, XCD, & ideò reliquus, OFB, reliquo, XDC, æqualis erit, & trianguli, BOF, CXD, similes erunt, vnde, BF, ad, FO, erit vt, CD, ad, DX, .i. ad, VG, quod ostendere opus erat.

4 6. Elem.

PROBLEMA II. PROPOS. XXV.

Assumpta iterum superioris figura, dimissa axi, & eidē parallelis, BO, CV, DG, FH, & ipsa, DX, figuram planam describere cum portione, BCDF, communem habens angulum mixtū sub, BF, & curua, FDC, qui fit ad punctum, F, ita vt quælibet in descripta figura recta linea ipsi, BF, æquidistanter ducta, sit distantia parallelarū axi, quæ ab extremis punctis eiusdem rectæ lineæ, productæ vsque ad curuam parabolicam, duci possunt: Vocetur autem hæc descripta

figu-

figura; figura distantiarum portionis, siue parabolæ, BCDF.

Quoniam ergo, OF, est distantia parallelarum axi ductarum a punctis, BF, abscindatur à, BF, recta, FE, æqualis distantiæ, FO, insuper intelligatur adhuc ipsa, CD, ducta vtcunque parallela rectæ, BF, terminans in puncta, CD, curuæ parabolæ, & cum sit, VG, distantia parallelarum axi, quæ à punctis, CD, ducuntur, abscindatur ab ipsa, CD, versus, D, ipsa, DZ, æqualis distantiæ, VG; sic ductis in portione, BCDF, omnibus lineis, regula, BF, in earundē singulis intelligantur sumptæ distantiæ; sicut acceptæ fuerunt, EF, ZD, quarū extrema puncta sint in curua parabolica, FDCB, sint autem in huius curuæ ea parte, in qua sunt puncta, DF, patet ergo si sumamus pūctum, S, verticem portionis, BSF, quod dictarum omnium linearum extrema puncta erunt in curua parabolica, quæ incipit à vertice, S, & desinit in, F; per alia ergo extrema puncta earundem distantiarum intelligatur ducta linea, SZE. Dico figuram, SFE, comprehensam recta, EF, curua parabolica, SDF, & linea, SZE, esse huiusmodi, quod, si duxerimus intra ipsam vtcunq; ipsi, BF, parallelam, quæ producatur vsq; ad curuam parabolicā, huius portio manens in figura, SEF, erit distantia parallelarum axi, quæ ducuntur ab extremis punctis ab eadem producta in curua parabolica signatis. Intelligatur ergo ducta vtcunque, DZ, ipsi, BF, parallela, & producta vsq; ad curuam parabolicam incidens illi in puncto, C, quoniam ergo, CD, est vna earū, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, BSF, portio eiusdem manens intra figuram, SEF, erit distantia parallelarum axi, quæ ab eiusdem extremis punctis ductæ intelliguntur, & hoc per constru- Coroll. 1. 3.



ctionem patet, quoniam ab ipsa, CD, abscissa est, DZ, quæ terminat in lineam, SZE, æqualis dictæ distantiæ, ergo figura, SEF, descripta est, qualem problema postulabat; quę vocetur figura distantiarum portionis, siue parabolæ, BSF.

COROLLARIVM.

Qvia verò ostensum est, BF, ad distantiam parallelarum axi à, B, F, ductarum, esse vt, CD, ad distantiam parallelarum axi à punctis, C, D, ductarum, sunt autem, EF, ZD, æquales dictis distantijs, ideò erit, BF, ad, FE, vt, CD, ad, DZ, & sic erit qualibet ducta in portione, BSF, parallela ipsi, BF, ad eiusdem partem inclusam figura, SEF, vt, BF, ad, FE.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXVI.

IN eadem antecedẽtis figura ostendemus omnia quadrata portionis, BSF, ad rectangula sub eadem portione, BSF, & sub figura, SEF, regula communi, BF, esse vt, BF, ad, FE.

Est enim quadratum, BF, ad rectangulum sub, BF, FE, vt, BF, ad, FE; similiter ducta vtcunque, CD, parallela regulæ, BF, ostẽdemus quadratum, CD, ad rectangulum sub, CD, DZ, esse vt, CD, ad, DZ, est autem vt, BF, ad, FE, ita, CD, ad, DZ; ergo quadratum, BF, ad rectangulum, BFE, erit vt quadratũ, CD, ad rectangulum, CDZ, sic ostendemus quamlibet ductam intra portionem, BSF, parallelam regulæ, BF, ad eiusdem portionẽ inclusam figura, SFE, esse vt quadratum, BF, ad rectangulũ sub, BF, FE, ergo quadratum, BF, ad rectangulum sub, BF, FE, erit



Coroll. 4. l. 2.

vt

vt omnia quadrata portionis, BSF, ad rectangula sub portione, BSF, & sub figura, SEF, vt autem quadratum, BF, ad rectangulum sub, BF, FE, ita, BF, ad, FE, ergo omnia quadrata portionis, BSF, ad rectangula sub portione, BSF, & figura, ESF, erunt vt, BF, ad, FE, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVII.

SI intra curuam parabolæ duæ vtcunque ducantur rectæ lineæ in eandẽ terminatæ, quarum vna rectè, altera obliquè axim secet, sint autem cõstitutarum ab eisdem parabolarum diametri inter se æquales: Omnia quadrata parabolæ per eam, quæ rectè axim secat, constitutę, regula eadem, erunt æqualia rectangulis sub parabola per obliquam ad axem constituta, regula eadem, & sub figura distantiarum eiusdem parabolæ per obliquam ad axem constitutæ.



Sint intra curuam parabolicam, BAC, duæ vtcunque ductæ in eandem terminatæ, DF, MC, quarum, DF, rectè, altera, MC, obliquè secet axem, AP, sit autem descripta linea, HR, vt sit constituta, HRC, figura distantiarum portionis, MFC, & ab eodem vertice, H, à quo ducitur linea, HR, ducatur, HQ, parallela axi, AP, & sint diametri, AZ, HO, parabolarum, DAF, MHC, inter se æquales. Dico ergo omnia quadrata parabolæ, DAF, regula, DF, esse æqualia rectangulis sub parabola, MHC, regula, MC, & sub, HRC, fi-

gura distantiarum eiusdem parabolæ, MHC. Iungantur ergo, DA, AF, MH, HC, & à puncto, M, ducatur, MX, axi, AP, æquidistans, à puncto verò, C, perpẽdicularis axi, AP, productæ vsq; in, B, tandem à puncto, H, ipsa, HI, perpendicularis ipsi, MC: Omnia ergo quadrata, DAF, parabolæ, regula, DF, ad rectangula sub parabola, MHC, regula, MC, & sub trilineo, HRC, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata parabolæ, DAF, regula, DF, ad omnia quadrata parabolæ, MHC, regula, MC, & ex ea, quam habẽt omnia quadrata parabolæ, MHC, regula, MC, ad rectangula sub parabola, MHC, & sub trilineo, HRC, regula eadem, MC: Omnia verò quadrata parabolæ, DMF, regula, DF, ad omnia quadrata parabolæ, MHC, regula, MC, sunt vt omnia quadrata trianguli, DAF, regula, DF, ad omnia quadrata trianguli, MHC, regula, MC, nam omnia quadrata parabolarum sunt sexquialtera omnium quadratorum triangulorum in eisdem basibus, & circa eosdẽ axes cum ipsis constitutorum, regulis basibus: Omnia insuper quadrata trianguli, DAF, regula, DF, ad omnia quadrata trianguli, MHC, regula, MC, habent rationem compositã ex ratione altitudinum, & quadratorum basium .i. ex ratione, quam habet, AZ, ad, HI, & ex ratione, quam habet quadratum, DF, ad quadratum, MC, vel quadratum, ZF, ad quadratum, OC, est autem, AZ, æqualis ipsi, HO, ex hypotesi, &, ZF, ipsi, QC, ergo omnia quadrata trianguli, DAF, ad omnia quadrata triãguli, MHC, regulis iam dictis, habebunt rationem compositam ex ea, quam habet, OH, ad, HI, & ex ea, quam habet quadratum, QC, ad quadratum, CO, quia verò trianguli, HIO, OQC, sunt æquianguli, ideò, OH, ad, HI, erit vt, OC, ad, CQ, ergo illa habebũt rationem compositam ex ea, quam habet, OC, ad, CQ, & quadratum, QC, ad quadratum, CO, est autem vt, OC, ad, CQ, ita, sumpta, QC, communi altitudine, rectangulũ sub, OC, CQ, ad quadratum, QC, ergo ratio composita ex ea, quam

Defin. 12. l. 1.

21. huius.

D. Corol. 32. l. 2.

Corol. 17. huius.

quam habet, OC, ad, CQ, & quadratum, QC, ad quadratum, CO, est eadem compositæ ex ea, quam habet rectangulum sub, OC, CQ, ad quadratum, CQ, & quadratũ, CQ, ad quadratum, CO, .i. eadem ei, quam habet rectangulum sub, QC, CO, ad quadratum, CO, .i. eadem ei, quã habet, QC, ad, CO; ergo omnia quadrata trianguli, DAF, ad omnia quadrata trianguli, MHC, vel omnia quadrata parabolæ, DAF, ad omnia quadrata parabolæ, MHC, regulis iam dictis, erunt vt, QC, ad, CO, quod serua.

Vlterius omnia quadrata parabolæ, MHC, ad rectangula sub parabola, MHC, & trilineo, HRC, regula, MC, sunt vt, MC, ad, CR, vel ad, CX, .i. vt, OC, ad, CQ, ergo omnia quadrata parabolæ, DAF, regula, DF, ad rectãgula sub parabola, MHC, & trilineo, HRC, regula, MC, habebunt rationem compositam ex ea, quam habet, QC, ad, CO, & ex ea, quam habet, CO, ad, QC, .i. habebunt eandem rationem, quam habet, QC, ad, QC, .i. erunt illis æqualia, quod ostendere opus erat. Ex antec.

COROLLARIVM I.

Hinc patet omnia quadrata parabolæ, DAF, regula, DF, ad omnia quadrata parabolæ, MHC, regula, MC, eße vt, QC, ad, CO, vel, XC, ad, CM, vel, DF, (quæ est æqualis ipsi, XC,) ad, MC, dum diametri, AZ, HO, sunt æquales, vt in Theoremate ostensum est.

COROLLARIVM II.

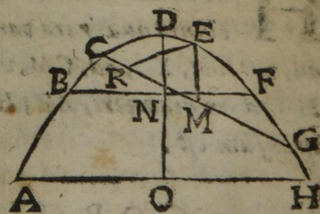
Patet vlterius, si intra curuam parabolicam duæ vtcunq; rectæ lineæ obliquè axem secantes, & in ipsam terminantes, ductæ fuerint, regula pro qualibet parabola sumpta earũ basi, quod rectangula sub dictis parabolis per easdem constitutis, & sub figura distantiarum earundem parabolarum, inter se erunt æqualia,

quotiescunq; diametri earundem sint æquales. vtraq; enim singillatim æquabuntur omnibus quadratis parabolæ, cuius basis secet perpendiculariter axem eiusdem, qui sit æqualis diametris dictarum parabolarum, & pro qua sit regula eiusdem basis.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVII.

SI intra curuam parabolicam duæ vtcunque ductæ fuerint rectæ lineæ in eandem terminantes, quarum vna rectè, altera obliquè secet axim; omnia quadrata cõstitutæ parabolæ per eam, quæ axim rectè secat, regula eadem, ad rectangula sub parabola constituta per obliquè secantem axem, regula huius basi, & sub figura distantiarum eiusdem parabolæ, erũt vt quadratum axis primò dictæ parabolæ ad quadratum diametri secundò dictæ parabolæ.

Sint igitur intra curuam parabolicam, ADH, duæ ductæ rectæ lineę in eadem terminantes, quarum vna rectè, altera obliquè secet axim, si ergo constitutarum ab iisdem parabolarum diametri sunt æquales, patet veritas Propositionis ex antecedenti Theor. nõ sint autem constitutarum parabolarũ diametri æquales, sint autem duæ parabolas constituẽtes, AH, rectè secans axem, DO, &, CG, obliquè ipsum diuidens, existatq; axis, DO, maior diametro parabolæ, CEG, quæ sit, EM, & sit ducta linea, ER, & constituta, ERG, figura distantiarum parabolæ, CEG. Dico ergo omnia quadrata parabolæ,



bolæ, ADH, regula, AH, ad rectangula ſub parabola, CEG, & trilineo, ERG, regula, CG, eſſe vt quadratū, DO, ad quadratum, EM, abſcindatur ergo ab, OD, DN, æqualis ipſi, EM, & per, N, ducatur ipſi, AH, parallela, BF: Omnia ergo quadrata parabolæ, ADH, ad omnia quadrata parabolæ, BDF, regula communi, AH, vel, BF, ſunt vt quadratum, OD, ad quadratum, DN, vel ad quadratum, EM, ſed omnia quadrata parabolæ, BDF, regula, BF, ſunt æqualia rectangulis ſub parabola, CEG, & trilineo, ERG, regula, CG, ergo omnia quadrata parabolæ, ADH, regula, AH, ad rectāgula ſub parabola, CEG, & trilineo, ERG, regula, CG, erunt vt quadratum, OD, ad quadratum, EM, quod erat oſtendendum. 22. huius. Ex antec.

COROLLARIVM.

Hinc patet, ſi duæ rectæ lineæ ad axem obliquæ parabolas conſtituerint, ſumpta pro regula conſtitutæ parabolæ rectæ eam conſtituente, quoniam rectangula ſub dictis parabolis, & figuris diſtantiarum earundem ad omnia quadrata parabolæ, cuius baſis ſit ad axim recta (quæ pro eadem ſumatur pro regula) ſunt, vt quadrata diametrorum earũdem ad quadratum axis illius tertiæ parabolæ; quod ideò illa rectangula erunt inter ſe, vt diametrorum earundem parabolarum quadrata fuerint quoq; inter ſe.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXIX.

OMnia quadrata parabolarum, regulis baſibus, ſunt inter ſe, vt omnia quadrata parallelogrammorum, in eiſdem baſibus, & circa eoſdem axes, vel diametros exiſtentium, regulis eiſdem baſibus.

Manifeſta eſt hæc propoſitio, nam omnia quadrata di-

21. huius. ctarum parabolarum sunt subdupla omnium quadratorum eorundem parallelogrammorum, eisdem regulis assumptis, s. parabolarum basibus iam dictis.

A. A. COROLL. SECTIO I.

Hinc colligimus conclusiones, quæ de omnibus quadratis parallelogrammorum collectæ sunt in Theorematibus 9. 10. 11. 12. 13. Lib. 2. regulis ibidem assumptis, suppositis quibusdam conditionibus circa altitudines, vel latera æqualiter basibus inclinata, & quadrata basium, vel ipsas bases, verificari etiam de omnibus quadratis parabolarum, suppositis eisdem cõditionibus circa axes, vel altitudines, vel circa diametros æqualiter basibus inclinatas, & circa quadrata basium, vel easdem bases; nam his conditionibus axibus, vel altitudinibus, vel diametris, & quadratis basium, vel ipsis basibus competentibus, etiam altitudinibus, vel lateribus parallelogrammorum, æqualiter basibus inclinatis, & quadratis basium, vel eisdem basibus, pariter conueniunt, quæ quidem parallelogramma sint in eisdem basibus, & circa eosdem axes, vel diametros cum parabolis; & ideò dictæ conclusiones, quæ tunc colliguntur pro omnibus quadratis dictorum parallelogrammorum, pro omnibus quadratis etiam parabolarum eisdem inscriptarum, tamquam pro eorundem partibus proportionalibus, scilicet dimidijs, pariter vt vera recipi possunt.

B. B. SECTIO II.

9. l. 2. *Et quia ostensum est omnia quadrata parallelogrammorum in eadem altitudine stantium, regulis basibus, esse inter se, vt quadrata basium; & existẽtium in eadem basi esse, vt altitudines, vel etiam, vt latera eorundem æqualiter basibus inclinata, ideò pariter hic colligemus omnia quadrata parabolarum in eadem altitudine existentium, regulis basibus, esse vt quadrata basium, & existentium in eadem basi esse inter se, vt altitudines, vel vt diametros æqualiter basibus inclinatas.*

SE-

C. SECTIO III. C.

Similiter quia ostensum est omnia quadrata parallelogrammorum, regulis basibus, habere inter se rationem compositam ex ratione quadratorum basium, & altitudinum, vel laterū æqualiter basibus inclinatorum; ideò colligemus, hic, omnia quadrata parabolarum, regulis basibus, habere inter se rationem cōpositam ex ratione quadratorum basium, & altitudinum, vel diametrorum æqualiter basibus inclinatorum. 10. l. 2.

D. SECTIO IV. D.

Consimili methodo colligemus, omnia quadrata parabolarum, regulis basibus, quarum basium quadrata altitudinibus, vel diametris æqualiter basibus inclinatis reciprocantur, esse æqualia, & quæ sunt æqualia, esse parabolarum, quarum altitudines, vel diametri æqualiter basibus inclinata, basium quadratis reciprocantur.

E. SECTIO V. E.

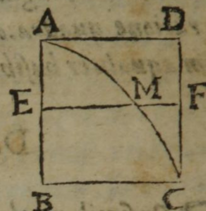
Deniq; & hoc obtinemus, nempè omnia quadrata parabolarum, regulis basibus, quarū altitudines, vel diametri, basibus æqualiter inclinata, ad easdem bases eandem rationem habeant, esse inter se in tripla ratione basium, vel altitudinum, vel diametrorum æqualiter bàsibus inclinatarum; quæ omnia clarè, & facilè patent.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXX.

SI duæ rectæ lineæ ducantur, quarum altera parabolam tangat, altera verò axi, vel diametro parabolæ æquidistanter ducta eādem secet, in idem punctum cōcurrentes: Omnia qua-

drata parallelogrammi, regula tangente, erunt sexcupla omnium quadratorum trilinei sub dictis tangente, & secante, & curua parabolæ ab ijsdem inclusa, comprehensi.

Sit semiparabola, ACB, quã tangat linea, AD, & à puncto, A, ducta, AB, axis, vel diameter, integræ parabolæ, deinde agatur vtcunque, DC, parallela axi, vel diametro, AB, secãs curuam parabolæ in, C, & occurrens tangenti, AD, in, D, ducatur tandem à puncto, C, ipsi, AD, æquidistans, CB, secans, AB, in, B, regula autem sit, AD. Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, AC, esse omnium quadratorum trilinei, ADC, sexcupla: Omnia enim quadrata, AC, ad rectangula sub, AC, & semiparabola, ABC, sunt vt, AC, ad semiparabolã, ABC, .i. sexquialtera .i. vt 6. ad 4. omnia autem quadrata, AC, ad omnia quadrata semiparabolæ, ABC, sunt dupla .i. vt 6. ad 3. ergo omnia quadrata, AC, ad residuum demptis omnibus quadratis semiparabolæ, ABC, à rectangulis sub, AC, & semiparabola, ABC, .i. ad rectangula sub semiparabola, ABC, & trilineo, ADC, erunt in ratione sexcupla .i. vt 6. ad 1. ad eadem verò bis sumpta, vt 6. ad 2. quoniam verò omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata semiparabolæ, ABC, sunt vt 6. ad 3. vt dictum est, ideò omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata semiparabolæ, ABC, cum rectangulis bis sub semiparabola, ABC, & trilineo, ADC, erunt vt 6. ad 5. ergo ad reliquum .s. ad omnia quadrata trilinei, ADC, omnia quadrata, AC, erunt vt 6. ad 1. idest erunt eorundem sexcupla, quod ostendere oportebat.



Coroll. 1. 26. l. 2.

21. huius.

Corol. 23. l. 2.

D. 23. l. 2.

CO-

A. COROLL. SECTIO I. A.

Hinc habetur omnia quadrata trilineorum ſub tangentibus, & ſecantibus, veluti ſunt, AD, DC, regulis tangentibus, eſſe inter ſe, vt omnia quadrata parallelogrammorum ſub eiſdem tangentibus, & ſecantibus, regulis ijſdem tangentibus, quoniam dictorum trilineorum omnia quadrata ſunt ſextæ partes omnium quadratorum dictorum parallelogrammorum; Et ideò pro ipſis etiam has concluſiones colligemus, ſcilicet.

B. SECTIO II. B.

SI dicti trilinei fuerint in eadem altitudine, quod omnia quadrata eorundem erunt inter ſe, vt baſium quadrata .ſ. tangentium; Et ſi fuerint dicti trilinei in eadem baſi .ſ. tangente, dicta omnia quadrata erunt inter ſe, vt altitudines, vel, vt ſecantes æqualiter baſibus .ſ. tangentibus, inclinatæ.

C. SECTIO III. C.

ITem quod omnia quadrata dictorum trilineorum habebunt inter ſe rationem compoſitam ex ratione quadratorum baſium, & ex ratione altitudinum, vel ſecantium æqualiter baſibus, ſcilicet tangentibus, inclinatarum.

D. SECTIO IV. D.

PAriter quod omnia quadrata dictorum trilineorum, quorum tangentium quadrata altitudinibus, vel ſecantibus æqualiter tangentibus inclinatis reciprocantur, eſſe æqualia; & quæ ſunt æqualia, eſſe trilineorum, quorum baſium, vel tangentium quadrata altitudinibus, vel ſecantibus æqualiter tangentibus inclinatis, reciprocantur.

E. E. SECTIO V.

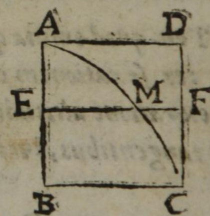
Tandem, quod, si dictorum trilineorum secantes ad tangentes eandem rationem habuerint, omnia quadrata eorundem erunt in tripla ratione tangentium, vel secantium.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXXI.

Exponatur figura Theor. antecedentis, & intra parallelogrammũ, AC, ducatur vtcunq; recta, EF, parallela ipsi, BC, quæ sumatur pro regula: Ostendemus enim omnia quadrata, AC, demptis omnibus quadratis semiparabolæ, ABC, ad omnia quadrata, EC, demptis omnibus quadratis quadrilinei, MEBC, esse vt quadratum, AB, ad quadratum, BE.

Omnia .n. quadrata, AC, ad omnia quadrata, EC, demptis omnibus quadratis quadrilinei, EMCB, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, EC, idest ex ea, quam habet, AB, ad, BE, & ex ea, quam habent omnia quadrata, EC, ad residuum, demptis ab ijsdem omnibus quadratis quadrilinei, MEBC, .i. ex ea, quam habet, AB, ad $\frac{1}{2}$. BE, duæ autem hæ rationes .s. quam habet, AB, ad, BE, &, AB, ad $\frac{1}{2}$. BE, componunt rationem quadrati, AB, ad rectangulum sub, EB, & $\frac{1}{2}$. BE, .i. ad dimidium quadrati, BE, ergo omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, EC, demptis omnibus quadratis quadrilinei, MEBC, erunt vt quadratum, AB, ad dimidium quadrati, BE, sunt autem omnia quadrata, AC, demptis omnibus quadratis semiparabolæ,

10. l. 2. | 23. huius. | 21. huius.



rabolæ, ABC, dimidium omnium quadratorum, AC, quia omnia quadrata, AC, sunt dupla omnium quadratorum semiparabolæ, ABC, ergo omnia quadrata, AC, demptis omnibus quadratis semiparabolæ, ABC, ad omnia quadrata, EC, demptis omnibus quadratis quadrilinei, EMCB, erunt vt dimidium quadrati, AB, ad dimidium quadrati, BE, .i. vt quadratum, AB, ad quadratũ, BE, quod erat demonstrandũ.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXII.

SI parallelogrammum, & parabola fuerint in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum constituta, basisque sumatur pro regula: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata figuræ compositæ ex parabola, & alterutro trilineorum, qui fiunt extra parabolam, demptis omnibus quadratis eiusdem trilinei, erũt vt dictum parallelogrammum ad dictam parabolam; ad eadem verò cum omnibus quadratis illius trilinei erunt, vt dictum parallelogrammum ad dictam parabolam simul cum $\frac{1}{4}$. dicti parallelogrammi .i. vt 24. ad 17.

Sit ergo parallelogrammum, AF, in eadem basi, DF, & circa eundem axim, vel diametrum, BE, cum parabola, DBF, regula sit, DF. Dico omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, esse vt, AF, ad parabolam, DBF, eadem verò ad omnia quadrata fig. CBDF,



esse vt, AF, ad parabolam, DBF, cum $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. parallelogrammi, AF; quoniam enim, BE, est axis, vel diameter tum parabolæ, DBF, tum parallelogrammi, AF, ideò si ducatur intra parallelogrammum, AF, vtcunque recta linea parallela ipsi, DF, portiones eiusdem inclusæ trilineis, ADB, CFB, erunt inter se æquales, & ideò parabola, DBF, erit figura, qualem postulat Prop. 29. Lib. 3. quapropter omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, erunt vt, AF, ad parabolam, DBF.

Quoniam verò omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, BF, sunt vt quadratum, DF, ad quadratum, FE, .i. quadrupla .i. vt 24. ad 6. omnia verò quadrata, BF, sunt sexcupla omnium quadratorum trilinei, BCF, .i. vt 6. ad 1. igitur omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata trilinei, BCF, erunt vt 24. ad 1. idest vt, AF, ad sui ipsius $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. ergo omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, erunt vt, AF, ad parabolam, DBF, cum $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. parallelogrammi, AF; parallelogrammum autem, AF, est sexquialterum parabolæ, DBF, .i. ad illam, vt 24. ad 16. ergo si numero 16. iungatur $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. eiusdem parallelogrammi, AF, fient 17. igitur omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, erunt vt 24. ad 17. quod ostendendum erat.

30. huius.

COROLLARIVM.

Hinc patet omnia quadrata, AF, esse sexquialtera omnium quadratorum figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, nam sunt ad illa, vt, AF, ad parabolam, BDF, cuius parallelogrammum, AF, est sexquialterum.

7. huius.

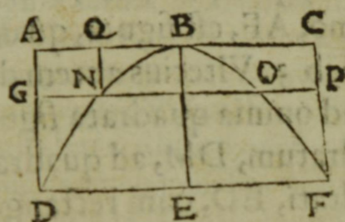


THEO-

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXIII.

IN eodem antec. Proposit. Schemate ostendemus omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis, BF, ad omnia quadrata, BF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, esse vt 11. ad 5.

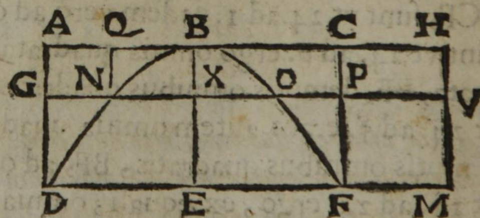
Nam omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, ostensa sunt esse, vt 24. ad 17. eadem verò ad omnia quadrata, BF, sunt vt 24. ad 6. quia sunt eorũ quadrupla, ergo ad residuum.s.ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnib. quadratis, BF, erũt vt 24. ad 11. cõuertendo omnia quadrata figuræ, CBDF, dẽptis omnibus quadratis, BF, ad omnia quadrata, AF, erunt vt 11. ad 24. Item omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, BF, sunt vt 24. ad 6. omnia verò quadrata, BF, ad omnia quadrata trilinei, BCF, sunt vt 6. ad 1. ergo omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata trilinei, BCF, sunt vt 24. ad 1. eadem verò ad omnia quadrata, BF, sunt vt 24. ad 6. ergo omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, BF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, erunt vt 24. ad 5. erant autem omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis, BF, ad omnia quadrata, AF, vt 11. ad 24. ergo, ex æquali, omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis, BF, ad omnia quadrata, BF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, erunt vt 11. ad 5. quod erat ostendendum.



THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXIV.

ASsumpta eadem anteced. Theor. figura, si producatur basis, DF, (quæ retineatur pro regula) vtcunq; in, M, & per, M, ipsi, BE, parallela ducatur, MH, cui occurrat, AC, producta, in ipso, H. Omnia quadrata, AM, demptis omnibus quadratis, CM, ad omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omnibus quadratis quadrilinei, HBFM, erunt vt, AF, ad parabolã, DBF, ideſt erunt eorum ſexquialtera: Quod facilè patebit, quia parabola, DBF, inſcripta parallelogrammo, AF, eſt figura, qualem poſtulat Propoſit. 30. Lib. 3. Vlterius autem dico omnia quadrata, AM, ad omnia quadrata figuræ, BDMH, eſſe vt quadratum, DM, ad quadratum, ME, dimidium quadrati, ED, cum rectangulo ſub ſexquitertia, DE, & ſub, EM.

In conſtructa figura igitur omnia quadrata figuræ, HB DM, per rectam, BE, diuiduntur in omnia quadrata ſemiparabolæ, BDC, in omnia quadrata, BM, & in rectan-



D.23.l.2. gula bis ſub ſemiparabola, BDE, & ſub, EH, nũc ad horum ſingula comparemus omnia quadrata, AM: Omnia igitur quadrata, AM, ad omnia quadrata, BM, ſunt vt quadratum, DM, ad quadratũ, ME, quod ſerua. Item omnia quadrata,

AM,

AM, ad omnia quadrata, AE, sunt vt quadratum, MD, ad quadratum, DE, omnia verò quadrata, AE, sunt dupla omnium quadratorum semiparabolæ, BDE, ergo omnia quadrata, AM, ad omnia quadrata semiparabolæ, BDE, sunt vt quadratum, MD, ad dimidium quadrati, DE, quod etiam serua. Tandem omnia quadrata, AM, ad rectangula sub, AE, EH, sunt vt quadratum, DM, ad rectangulum, DEM, rectangula verò sub, AE, EH, ad rectangula sub semiparabola, BDE, & sub, EH, sunt vt, AE, ad semiparabolã, BDE, (quia, EH, est parallelogrammum) idest sexquialtera .i. vt, DE, ad $\frac{2}{3}$. DE, .i. vt rectangulum sub, DEM, (sumpta, EM, communi altitudine) ad rectangulum sub $\frac{2}{3}$. DE, & sub, EM, ergo, ex æquali, omnia quadrata, AM, ad rectangula sub semiparabola, BDE, & sub, BM, erunt vt quadratum, DM, ad rectangulum sub $\frac{2}{3}$. DE, & sub, EM; ad eadem verò bis sumpta erunt, vt idem quadratum, DM, ad rectangulum bis sub $\frac{2}{3}$. DE, .i. sub sexquitertia, DE, semel, & sub, EM, ergo, colligendo, omnia quadrata, AM, ad omnia quadrata, BM, & ad omnia quadrata semiparabolæ, BDE, cum rectangulis bis sub, HE, & semiparabola, BDE, idest ad omnia quadrata figuræ, HBDM, erunt vt quadratum, DM, ad quadratum, ME, & dimidium quadrati, ED, cum rectangulo sub sexquitertia, DE, & sub, EM, simul iuncta, quæ nobis erant demonstranda. Coroll. 1. 26. l. 2.

COROLLARIVM.

Hinc apparet, quod methodo huius in Propos. 32. ostendi poterat omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, esse vt 24. ad 17. prius demonstrando omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, esse vt quadratũ, DF, ad quadratum, FE, $\frac{1}{2}$. quadrati, ED, & rectãgulum sub sexquitertia, DE, & sub, EF, vt nempè 24. ad 17. veluti calculanti patebit; quod hic apposui, vt eam rationem etiam hoc pacto teneamus.

THEOREMA XXXIII. PROP. XXXV.

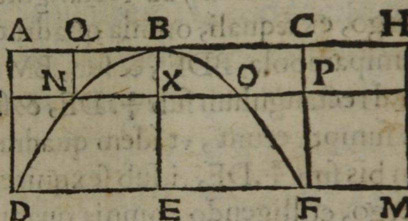
IN eadem anteced. Propoſ. figura oſtendemus omnia quadrata, BM, ad omnia quadrata figuræ, BFMH, eſſe vt quadratũ, EM, ad quadratum, MF, cum rectangulo ſub $\frac{2}{3}$. EF, & ſub, FM, vna cũ $\frac{1}{6}$. quadrati, EF, regula eadẽ retenta.

Omnia .n. quadrata figuræ, BFMH, per rectam, CF, diuiduntur in omnia quadrata, CM, in omnia quadrata trilinei, BCF, & in rectangula bis ſub trilineo, BCF, & ſub, CM; ad horũ ergo ſingula comparemus omnia quadrata, BM; hęc igitur ad omnia quadrata, CM, ſunt vt quadratum, EM, ad quadratum, MF, quod ſerua. Item omnia quadrata, BM, ad omnia quadrata, BF, ſunt vt quadratũ, ME, ad quadratum, EF, omnia verò quadrata, BF, ſunt ſexcupla omnium quadratorum trilinei, BCF, .i. ſunt ad illa, vt quadratum, EF, ad eiuſdem $\frac{1}{6}$. ergo, ex æquali, omnia quadrata, BM, ad omnia quadrata trilinei, BCF, ſunt vt quadratum, EM, ad $\frac{1}{6}$. quadrati, EF, quod etiam ſerua. Tandem omnia quadrata, BM, ad rectangula ſub, BF, FH, ſunt vt quadratum, EM, ad rectangulum ſub, EF, FM, rectangula verò ſub, BF, FH, ad rectangula ſub trilineo, BFC, & ſub, CM, ſunt vt, BF, ad trilineum, BCF, (nam, CM, eſt parallelogrammũ) ideſt ſunt eorum tripla .i. ſunt vt, EF, ad $\frac{1}{3}$. EF, .i. vt rectangulum, EFM, ad rectangulum ſub $\frac{1}{3}$. EF, & ſub, FM, ergo, ex æquali, omnia quadrata, BM, ad rectangula ſub trilineo, BCF, & ſub, FH, erunt vt quadratum, EM, ad rectãgulum ſub

D. Coroll. 23. l. 2.

30. huius.

Coroll. 1. 26. l. 2.



sub $\frac{1}{6}$. BF, & sub, FM, ad eadem verò bis sumpta, vt quadratum, EM, ad rectangulũ bis sub $\frac{1}{3}$. EF, & sub, FM, idest semel sub $\frac{2}{3}$. EF, & sub, FM; ergo, colligendo, omnia quadrata, BM, ad omnia quadrata, CM, ad omnia quadrata trilinei, BCF, & ad rectangula bis sub trilineo, BCF, & sub, FH, .i. ad omnia quadrata figuræ, BFMH, erunt vt quadratum, EM, ad quadratum, MF, rectangulũ sub $\frac{2}{3}$.EF, & sub, FM, vna cum $\frac{1}{6}$. quadrati, EF, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM.

Hinc colligimus omnia quadrata, BM, ad residuum, demptis ab eisdem omnibus quadratis figuræ, BFMH, esse vt quadratum EM, ad residuum, demptis à quadrato, EM, bis omnibus .s. quadrato, FM, rectangulo sub, MF, & $\frac{2}{3}$. FE, cum $\frac{1}{6}$. quadrati, EF, hoc autem residuum est rectangulum sub, MF, & sexquitertia, FE, cum $\frac{5}{6}$. quadrati, EF; nam si à quadrato, EM, dempseris quadratum FM, remanebunt duo rectangula sub MF, FE, cum quadrato, FE, vlterius si à rectangulo bis sub, MF, FE, dempseris rectangulum sub, MF, & $\frac{2}{3}$. FE, idest rectangulum bis sub, MF, & sub $\frac{1}{3}$ FE, remanebit rectangulum bis sub, MF, & $\frac{2}{3}$. FE, idest semel sub, MF, & sexquitertia, FE: Tandem ablato $\frac{1}{6}$. à quadrato, FE, remanent $\frac{5}{6}$. eiusdem quadrati, vnde omnia quadrata, BM, ad residuum, demptis omnibus quadratis figuræ, BFMH, erunt vt quadratum, EM, ad rectangulum sub, MF, & sexquitertia, FE, cum $\frac{5}{6}$. quadrati, FE.

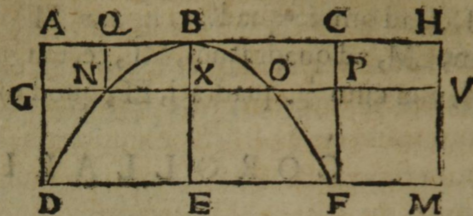
THEOREMA XXXIV. PROP. XXXVI.

IN eodem Schemate Theor. Prop. 34. ostendemus omnia quadrata figuræ, BDMH, dẽptis omnibus quadratis, BM, ad omnia quadrata, BM, demptis omnibus quadratis figuræ, BFMH,

eſſe vt, EM, cum $\frac{1}{3}$. EM, & $\frac{1}{2}$. ED, ad, MF, cum $\frac{1}{3}$. MF, & $\frac{1}{4}$. FE.

Omnia enim quadrata, AM, ad omnia quadrata figuræ, DBHM, oſtendimus eſſe, vt quadratum, DM, ad quadratum, ME, rectangulum ſub, ME, & ſexquitertia, ED, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ED, eadem verò ad omnia quadrata, BM, ſunt vt quadratum, DM, ad quadratum, ME; ergo omnia quadrata, AM, ad omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omnibus quadratis, BM, erunt vt quadratum, DM, ad rectangulum ſub, ME, & ſexquitertia, ED, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ED, &, conuertendo, hæc ad illa erunt, vt rectangulum ſub ſexquitertia, ED, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ED, ad quadratum, DM: Omnia verò quadrata, AM, ad omnia quadrata, BM, ſunt vt quadratum, DM, ad quadratum, ME, & tandem omnia quadrata, BM, ad eorum reſiduum, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMF, ſunt vt quadratum, EM, ad rectangulum ſub, MF, & ſexquitertia, FE, cum $\frac{1}{6}$. quadrati, FE; ergo, ex æquali, omnia quadrata figuræ, BDMH, demptis omnibus quadratis, BM, ad omnia quadrata, BM, demptis omnibus quadratis figuræ, BFMH, erunt vt rectangulum ſub, ME, & ſexquitertia, ED, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ED, ad rectangulum ſub, MF, & ſexquitertia, FE, cum $\frac{1}{6}$. quadrati, FE; quia verò rectangulum ſub, ME, & ſexquitertia, ED, æquatur rectangulo ſub ſexquitertia, ME, & ſub, ED, quia baſes eorum ſunt altitudinibus reciprocæ, & eadem ratione rectangulum ſub ſexquitertia, EF, & ſub, FM, æquatur rectangulo ſub, EF, & ſexquitertia, FM, ideò ſupradicta ratio erit eadem ei, quam habet rectangulũ ſub, DE, vel, EF, & ſub

34. huius.



Ex Corol. antec.

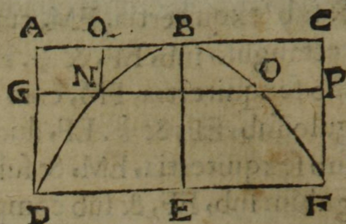
& ſub ſexquitertia, EM, cum $\frac{1}{2}$.quadrati, DE, ideſt cum rectangulo ſub, EF, & $\frac{1}{2}$. EF, ad rectangulum ſub, EF, & ſub ſexquitertia, FM, cum $\frac{5}{6}$.quadrati, EF, ideſt cũ rectangulo ſub, EF, & $\frac{5}{6}$. EF, duo autem rectangula ſub, EF, & ſub ſexquitertia, EM, & ſub, EF, & $\frac{1}{2}$.EF, cõficiunt rectangulum ſub, EF, & ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$. EF, & ſexquitertia, EM; pariter alia duo rectangula ſub, EF, & $\frac{5}{6}$. EF, & ſub, EF, & ſexquitertia, FM, conficiunt rectangulum ſub, EF, & compoſita ex $\frac{5}{6}$. EF, & ſexquitertia, FM, ergo omnia quadrata figuræ, BDMH, demptis omnibus quadratis, BM, ad omnia quadrata, BM, demptis omnibus quadratis figuræ, BFMH, erunt vt rectangulum ſub, EF, & compoſita ex $\frac{1}{2}$. EF, & ſexquitertia, EM, ad rectangulum ſub eadem altitudine, EF, & ſub compoſita ex $\frac{5}{6}$. EF, & ſexquitertia, FM, .i. vt compoſita ex $\frac{1}{2}$. EF, vel $\frac{1}{2}$. ED, & ſexquitertia, EM, ad compoſitam ex $\frac{5}{6}$. EF, & ſexquitertia, FM, ideſt vt, EM, cum $\frac{4}{3}$. ME, & $\frac{1}{2}$. ED, ad, MF, cum $\frac{4}{3}$. MF, & $\frac{5}{6}$.FE, quod oſtendere oportebat. 1. 2 elem.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXVII.

IN figura Prop. 32. oſtendemus, regula, DF, omnia quadrata ſemiparabolæ, DBE, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, eſſe vt octaua pars, DF, ad duas tertias eiuſdem, DF, .i. vt 3. ad 16.

Nam omnia quadrata ſemiparabolæ, BDE, ſunt dimidium omnium quadratorum, AE, ideſt ſunt ad illa, vt $\frac{1}{2}$. quadrati, DE, ad quadratum, DE, item omnia quadrata, AE, ad omnia quadrata, AF, ſunt vt quadratum, DE, ad quadratum, DF; tandem omnia quadrata, DF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trili- 10. huius. Corol. 32. huius.

nei, BCF, sunt sexquialtera, idest sunt vt quadratum, DF, ad rectangulum sub, DF, & $\frac{2}{3}$. DF, ergo, ex æquali, omnia quadrata semiparabolæ, BDC, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, erunt vt dimidium quadrati, DE, .i. vt rectangulum sub $\frac{1}{8}$. DF, & sub, DF, ad rectãgulum sub $\frac{2}{3}$. DF, & sub, DF, .i. vt $\frac{1}{8}$. DF, ad $\frac{2}{3}$. DF, .i. vt $\frac{3}{24}$. DF, ad $\frac{16}{24}$. DF, .i. vt 3. ad 16. quod ostẽd. opus erat.

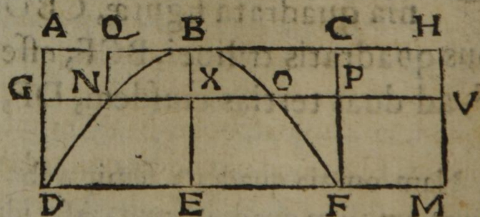


THEOREMA XXXVI. PROP. XXXVIII.

IN figura Prop. 34. adhuc ostendemus omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, esse vt, DM, MF, ad, FD.

Quoniam .n. omnia quadrata, AM, demptis omnibus quadratis, CM, sunt ad omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omnib. quadratis figuræ, BHMF, vt, AF, ad parabolã, DBF, .s. vt omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, ergo, permutando, omnia quadrata, AM, demptis omnibus quadratis, CM, ad omnia quadrata, AF, erunt vt omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omniaus quadratis figuræ,

34. huius



ræ, HBFM, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, sunt autem omnia quadrata, AM, demptis omnibus quadratis, CM, ad omnia quadrata, AF, vt rectangulum bis sub, MF, FD, cum quadrato, FD, .i. rectangulum sub composita ex, DM, MF, & sub, FD, ad quadratum, FD, .i. vt composita ex, DM, MF, ad, FD, ergo omnia quadrata figuræ, DMHB, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMF, ad omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, erunt vt, DM, MF, ad, FD, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXXVII. PROP. XXXIX.

IN Schemate adhuc Prop. antec. ostendemus omnia quadrata figurę, HBDM, demptis omnibus quadratis figurę, BHMF, esse ad omnia quadrata semiparabolæ, BDE, vt, DM, MF, ad $\frac{3}{16}$. ipsius, FD.

Nam omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMF, ad omnia quadrata figurę, CBDF, 37. huius.
demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, ostensa sunt esse, vt, DM, MF, ad, FD, hæc autem ad omnia quadrata semiparabolæ, BDE, sunt vt $\frac{2}{3}$. FD, ad $\frac{1}{8}$. ipsius, FD, .f. vt, FD, ad $\frac{3}{16}$. FD, ergo, ex æquali, omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMF, ad omnia quadrata semiparabolæ, BDE, erunt vt, DM, MF, ad $\frac{3}{16}$. ipsius, FD, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XL.

SI in figuris Propos. 32. & 34. ducantur, GP, GV, regulis, DF, DM, parallelæ, ostendemus

(si ipsæ

(si ipsæ secauerint parabolam, DBF,) omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, ad omnia quadrata figuræ, CBNP, demptis omnibus quadratis quadrilinei, BCPO. Vel omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMF, ad omnia quadrata figuræ, HBNV, demptis omnibus quadratis figuræ, HVOB, esse vt parabolam, DBF, ad parabolam, NBO.

Demonstratio præsentis Theor. erit conformis demonstrationibus Prop. 19. 20. Lib. 3. quapropter inde petatur.

COROLLARIVM.

Hinc colligemus omnia quadrata figuræ, HBDM, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMF, ad omnia quadrata figuræ, HBNV, demptis omnibus quadratis figuræ, BHVO, esse vt omnia quadrata figuræ, CBDF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF, ad omnia quadrata figuræ, CBNP, demptis omnibus quadratis quadrilinei, BCPO; & vtraque esse, vt cubum, DF, ad cubum, NO.

Ex 2. huius.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLI.

IN eisdem figuris ostendemus, regulis adhuc ipsis, DM, DF, omnia quadrata figuræ, CBDF, ad omnia quadrata figuræ, CBNP, esse vt parallelepipedum sub, BE, & $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. quadrati ipsius, DF, ad parallelepipedum sub, BX, & his spatijs simul compositis .s. quadrato, XP, $\frac{1}{3}$. quadrati, NX, & rectãgulo sub sexquitertia, NX, & sub,

XP:

XP: Omnia verò quadrata figurę, HBDM, ad omnia quadrata figuræ, HBNV, esse vt parallelepipedum sub, BE, & his spatijs .s. quadrato, ME, $\frac{1}{2}$. quadrati, ED, & rectangulo sub sexquitertia, DE, & sub, EM, ad parallelepipedum sub, BX, & his spatijs .s. quadrato, VX, $\frac{1}{2}$. quadrati, XN, & rectangulo sub sexquitertia, NX, & sub, XV.

Ducatur per, N, ipsi, BE, parallela, NQ, in vtraq; figura, igitur omnia quadrata figuræ, CBDF, ad omnia quadrata figuræ, CBNP, habēt rationem compositā ex ea, quam habent omnia quadrata figuræ, CBDF, ad omnia quadrata, AF, .i. ex ea, quam habent $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{4}$. quadrati, DF, ad quadratum, DF, & ex ratione omnium quadratorum, AF, ad omnia quadrata, AP, .i. ex ratione, EB, ad, BX, & ex ratione omnium quadratorum, AP, ad omnia quadrata, QP, .i. ex ratione quadrati, GP, vel quadrati, DF, ad quadratū, PN, & tandem ex ratione omnium quadratorum, QP, ad omnia quadrata figuræ, CBNP, .i. ex ratione quadrati, NP, ad quadratum, PX, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, XN, & cum rectangulo sub sexquitertia, NX, & sub, XP, harum autem rationum istæ .s. quam habent $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{4}$. quadrati, DF, ad quadratū, DF, quadratum, DF, ad quadratum, NP, & quadratū, NP, ad hæc simul .s. quadratū, PX, $\frac{1}{2}$. quadrati, NX, & rectangulum sub sexquitertia, NX, & sub, XP, conficiunt rationem $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{4}$. quadrati, DF, ad hæc spatia vltimo dicta, hęc verò ratio, cum ea, quam habet, EB, ad, BX, conficit rationem parallelepipedi sub, BE, & $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{4}$. quadrati, DF, ad paralle-

32. huius.

34. huius.

Defin. 12. 1. lib.

rallelepipedum ſub, BX, & dictis ſpatijs vltimò dictis, ſcilicet quadrato, PX, $\frac{1}{2}$. quadrati, NX, & rectangulo ſub ſexquitertia, NX, & ſub, XP, ergo omnia quadrata figuræ, CBDF, ad omnia quadrata figuræ, CBNP, erunt vt parallelepipedum ſub, BE, & $1\frac{7}{4}$. quadrati, DF, ad parallelepipedũ ſub, BX, & dictis ſpatijs vltimò dictis.

Eadem methodo compoſitionis proportionum, ſumptis
D.12.l.1. medijs omnibus quadratis, AM, AV, QV, inter omnia quadrata figurarum, HBDM, HBNV, oſtendemus pariter omnia quadrata figuræ, HBDM, ad omnia quadrata figuræ, HBNV, eſſe vt parallelepipedum ſub, BE, & his ſpatijs .ſ. quadrato, ME, $\frac{1}{2}$. quadrati, ED, & rectangulo ſub ſexquitertia, DE, & ſub, EM, ad parallelepipedum ſub BX, & ſub his ſpatijs .ſ. quadrato, VX, $\frac{1}{2}$. quadrati, XN, & rectangulo ſub ſexquitertia, XN, & ſub, XV, quæ erant nobis oſtendenda.

THEOREMA XL. PROPOS. XLII.

SI intra parabolam axi, vel diametro eiuſdem parallela ducatur recta linea in curuam, & baſim parabolæ terminata, quæ baſis ſumatur pro regula, ducta verò tangente parabolam in termino dicti axis, vel diametri, & producta dicta parallela vſq; ad ipſam, compleatur parallelogrammum ſub ipſa, & baſis maiori portione: Omnia quadrata conſtituti parallelogrammi ad omnia quadrata reſiduæ figurę eodem incluſæ parallelogrammo, ab eodem dempto trilineo extra ſemiparabolam facto, erunt vt quadratum baſis dicti fruſti ad quadratũ reſidui eiuſdem baſis, dempta ab eadem dimidia baſis totius parabolæ, ſimul

cum

cum $\frac{1}{2}$. quadrati huius dimidiæ, & rectangulo ſub ſexquitertia talis dimidiæ, & eodem baſis reſiduo iam dicto.

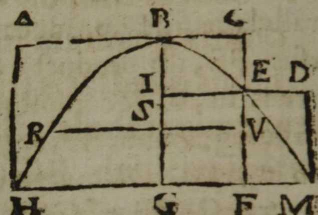
Sit ergo parabola, HBM, cuius axis, vel diameter, BG, baſis, HM, ducatur autem intra ipſam eidem, BG, parallela, EF, ducta verò tangente, AC, in termino, B, quæ erit parallela baſi, HF, producatur verſus, FE, illi productæ occurrens in, C, & compleatur parallelogrammū, AF, regula verò ſit, HM. Dico ergo oĩa quad. AF, ad omnia quadrata figuræ, CBHF, eſſe vt quadratum, HF, ad quadratū, FG, $\frac{1}{2}$. quadrati, GH, & rectangulum ſub ſexquitertia, HG, & ſub, GF. Hæc autem erit conſimilis demonſtrationi ſecundæ partis Theor. 32. ideò inde colligatur.

THEOREMA XLI. PROPOS. XLIII.

IN eadem anteced. Propoſit. figura oſtendemus omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBHF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCE, eſſe vt parallelepipedū ſub, BG, & quadrato, HF, ad reliquum parallelepipedi ſub, BG, & his ſpatis .ſ. quadrato, FG, $\frac{1}{2}$. quadrati, GH, & rectangulo ſub ſexquitertia, HG, & ſub, GF, ab eodem dempto $\frac{1}{6}$. parallelepipedi ſub, CE, & quadrato, FG.

Nam omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, BE, ducta per, E, ipſa, EI, æquidiſtans, HM, ſunt vt parallelepipedum

21. l. 2. dum ſub, AH, & quadrato, HF, ad parallelepipedum ſub, BI, & quadrato, IE, ſunt autem omnia quadrata, BE, ſex-
30. huius. cupla omnium quadratorũ trilinei, BCE, ideò omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata trilinei, BCE, erunt vt parallelepipedum ſub, AH, vel, BG, & ſub quadrato, HF, ad parallelepipedi ſub, BI, & quadrato, IE, ſextam partem: Quia verò omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CB
34. huius. HF, ſunt vt quadratum, HF, ad hæc ſpatia .ſ. quadratum, FG, $\frac{1}{3}$. quadrati, HG, & rectangulum ſub ſexquitertia, HG, & ſub, GF, .i. ſumpta, BG, communi altitudine, vt parallelepipedum ſub, BG, & quadrato, HF, ad parallelepipedum ſub, BG, & dictis ſpatijs, ideò omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata figuræ, CBHF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCE, erunt vt parallelepipedum ſub, BG, & quadrato, HF, ad reſiduum, dempta ſexta parte parallelepipedi ſub, BI, vel, CE, exceſſu, BG, ſuper, EF, & ſub quadrato, IE, à parallelepipedo ſub, BG, & dictis ſpatijs .ſ. quadrato, FG, $\frac{1}{3}$. quadrati, GH, & rectangulo ſub ſexquitertia, HG, & ſub, GF.



THEOREMA XLII. PROPOS. XLIV.

IN eadem figura Prop. 42. ducta intra fruſtum parabolæ, EBHF, recta, VR, parallela baſi, HM, oſtendemus omnia quadrata figuræ, CBHF, ad omnia quadrata figuræ, CBRV, eſſe vt parallelepipedum ſub, BG, & his ſpatijs .ſ. quadrato, FG, $\frac{1}{3}$. quadrati, GH, & rectangulo ſub ſexquitertia, HG, & ſub, GF, ad parallelepipedũ ſub, BS, & ſub his ſpatijs, ſcilicet quadrato, VS, $\frac{1}{3}$.

quadrati, SR, & rectangulo ſub ſexquitertia, RS. & ſub, SV.

Huius demonſtratio non eſt alia à demonſtratione Propoſ. 41. ideò ibi in ſecunda eiuſdem parte recolatur.

THEOREMA XLIII. PROPOS. XLV.

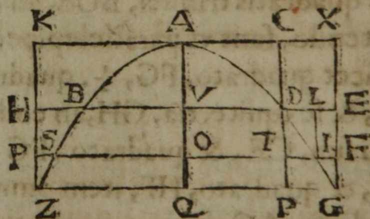
IN eodem Propoſ. 42. Schemate oſtendemus omnia quadrata figuræ, CBHF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCE, ad omnia quadrata ſemiparabolæ, BHG, eſſe vt reliquum parallelepipedi ſub, BG, & his ſpatijs .ſ. quadrato, FG, $\frac{1}{3}$. quadrati, GH, & rectangulo ſub, FG, & ſexquitertia, GH, ab eodem dempta ſexta parte parallelepipedi ſub, CE, & quadrato, FG, ad dimidium parallelepipedi ſub, BG, & quad. GH.

Etenim omnia quadrata figuræ, CBHF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCE, ad omnia quadrata, AF, conuertendo, ſunt vt parallelepipedum ſub, BG, & his ſpatijs, ſcilicet quadrato, FG, $\frac{1}{3}$. quadrati, GH, & rectangulo ſub, FG, & ſexquitertia, GH, ab eodem dempto $\frac{1}{6}$. parallelepipedi ſub, CE, & quadrato, FG, ad parallelepipedum ſub, BG, & quadrato, HF; item omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, AG, ſunt vt quadratum, FH, ad quadratum, HG, .ſ. ſumpta, BG, communi altitudine, vt parallelepipedum ſub, BG, & quadrato, FH, ad parallelepipedum ſub, BG, & quadrato, HG: Tandem omnia quadrata, AG, dupla ſunt omnium quadratorũ ſemiparabolæ, BHG, ergo, ex æquali, omnia quadrata figuræ, CBHF, demptis omnibus quadratis trilinei, BCE, ad oĩa quadrata ſemiparabolæ, BHG, erunt vt parallelepipedum ſub, BG, & his ſpatijs .ſ. qua-

drato, FG, $\frac{1}{2}$. quadrati, GH, & rectangulo sub, FG, & sexquitertia, GH, ab eodem dempto $\frac{1}{6}$. parallelepipedi sub, CE, & quadrato, FG, ad dimidium parallelepipedi sub, BG, & quadrato, GH, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XLIV. PROPOS. XLVI.

IN parabola ducta axi, vel diametro æquidistanter recta linea, si deinde fiat parallelogrammum sub eadem ducta, & sub basi, angulum habens ęqualem angulo inclinationis eiusdem ductæ ad basim, regula sumpta basi. Rectangula sub parallelogrammis, in quæ dictum parallelogrammum diuiditur à ducta linea, sunt dupla rectangulorum sub portionibus frusti parabolæ, dicto parallelogrammo inclusæ, per eandem ductam constitutis.



Sit parabola, AZG, in basi, ZG, circa axim, vel diametrum, AQ, cui parallela ducatur vtcunque recta, DP, fiat autem parallelogrammũ sub, ZQ, DP, angulum habens æqualem angulo inclinationis, DP, ad, ZG, .i. angulo, qui sit, DPG, vtcunq; ex duobus, DPG, DPZ, sit autem hoc parallelogrammũ, HG, regula verò, HG. Dico ergo, rectangula sub, HP, PE, dupla esse rectangulorum sub portionibus, BDPZ, DGP. Sũpto ergo vtcunq; in, DP, puncto, T, per, T, ducatur, RF, ipsi, ZG, æquidistans, secansq; curuam parabolæ in, SI, &, AQ, in, O. Rectangulum ergo, ZPQ, ad rectangulum, STI, habet rationem compositam

ex ea, quam habet rectangulum, ZPG, ad rectangulum, ZQG, .i. ex ea, quam habet, DP, ad, AQ, & ex ratione rectanguli, ZQG, ad rectangulum, SOI, vel quadrati, QG, ad quadratum, OI, .i. ex ea, quam habet, QA, ad, AO, & ex ratione rectanguli, SOI, ad rectangulum, STI, .i. ex ratione, AO, ad, DT, ergo rectangulum, ZPG, vel, RTF, ad rectangulum, STI, erit vt, PD, ad, DT, abscissam. Et quoniã, HG, est parallelogrammum in eadem basi, & altitudine, cum frusto, BZGD, & per punctum, T, vtcunq; sumptum ducta, RF, regulæ parallela, quæ est basis, ZG, inuentum est rectangulum, RTF, ad rectangulũ, STI, esse vt, PD, ad, DT; quatuor ergo horum magnitudinum ordinibus cõstructis, iuxta has quatuor magnitudines, quæ inuentæ sunt esse, proportionales, & hoc modo solito, reperiemus rectangula sub, HP, PE, ad rectãgula sub portionibus, BZPD, DGP, esse vt maximæ abscissarum, DP, ad omnes abscissas, DP, recti, vel eiusdem obliqui transitus .i. esse eorum dupla, quod ostendere opus erat.

3. huius.

3. huius.

Iux. Cor. 3. 26. l. 2.

Corol. 2. 19. l. 2.

THEOREMA XLV. PROPOS. XLVII.

IN anteced. figura ostẽdemus, regula eadem, ZG, omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DPG, esse vt, ZP, ad compositam ex $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG: Omnia verò quadrata, DG, ad omnia quadrata trilinei, DGE, esse vt, ZP, ad sui reliquum, demptis ab eadem $\frac{2}{3}$. ZP, cum $\frac{1}{6}$. PG.

Rectangula enim sub, HP, PE, ad rectangula sub, HP, & portione, DPG, sunt vt, EP, ad portionem, DPG, .s. vt, ZP, ad compositam ex $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG; eadem autem rectangula sub, HP, PE, sunt dupla rectangulorum sub portionibus, DBZP, DPG, .i. sunt ad illa, vt, ZP, ad $\frac{1}{2}$. ZP, ergo ad

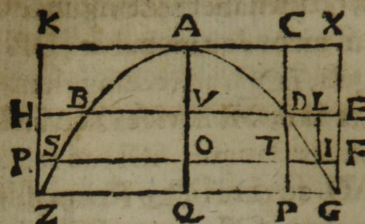
Coroll. 1. 26. l. 2.

5. huius.

Ex antec.

reli-

Iux. A. 23. l. 2. residuũ rectangulorum sub, HP, &, DPG, demptis rectãgulis sub portionibus, DBZP, DGP, idest ad rectangula sub trilineo, DPG, & trilineo, BHZ, .i. trilineo, DEG, erunt vt, ZP, ad $\frac{1}{6}$. PG, .i. sumpta, PG, communi altitudine, vt rectangulum, ZPG, ad rectangulum sub, PG, & $\frac{1}{6}$. PG, .i. ad $\frac{1}{6}$. quadrati, PG, sunt autem omnia quadrata, DG, ad rectangula sub, EP, PH, vt quadratum, GP, ad rectangulum, GPZ, ergo, ex æquali, omnia quadrata, DG, ad rectangula sub trilineis, DPG, DEG, erunt vt quadratum, PG, ad $\frac{1}{6}$. quadrati, PG, .i. erunt eorum sexcupla: Quoniam ergo omnia quadrata, DG, ad rectangula sub, DG, & trilineo, DGP, sunt vt, DG, ad, DGP, .i. vt, ZP, ad



3. huius. compositam ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, sunt autem omnia quadrata, DG, sexcupla rectangulorum sub trilineis, DPG, DEG, .i. ad ea, vt, ZP, ad $\frac{1}{6}$. ZP, ergo omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DGP, erunt vt, ZP, ad residuum, dempto $\frac{1}{6}$. ZP, à composita ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, quia verò si ab $\frac{1}{2}$. ZP, dematur $\frac{1}{6}$. ZP, remanet $\frac{1}{3}$. ZP, ideò omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DPG, erunt vt, ZP, ad compositam ex $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, vt dictum est.

Quia verò nunc ostensum est omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DPG, esse vt, ZP, ad compositam ex $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, omnia autem quadrata, DG, ad rectangula sub trilineis, DPG, DEG, sunt vt, ZP, ad $\frac{1}{6}$. ZP, & ad eadem bis sumpta, vt, ZP, ad $\frac{1}{3}$. ZP, ideò omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DPG, & ad rectangula bis sub, DPG, DEG, erunt vt, ZP, ad compositam ex $\frac{2}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ergo omnia quadrata, DG, ad residuum, demptis omnibus quadratis, DPG, & rectangulis bis sub, DPG, DEG, .i. ad omnia quadrata trilinei, DEG, erunt vt, ZP, ad resi-

duum, demptis $\frac{2}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ab eadem, ZP, quæ nobis oſtendenda erant.

THEOREMA XLVI. PROPOS. XLVIII.

IN ſupradictæ Propoſ. figura, ducta, AX, parallela baſi, ZG, quæ tanget parabolam in, A, cui occurrat, GE, producta, in puncto, X, oſtendemus omnia quadrata trilinei, DPG, ad omnia quadrata ſemiparabolæ, AQG, habere rationem compoſitam ex ea, quam habet compoſita ex $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, & ex ratione parallelepipedi ſub, DP, & quadrato, PG, ad dimidium parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG: Omnia verò quadrata trilinei, AXG, ad omnia quadrata trilinei, DEG, habere rationẽ compoſitam ex ea, quã habet parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG, ſexta pars, ad parallelepipedum ſub, DP, & quadrato, PG, & ex ea, quam habet, ZP, ad reſiduũ, demptis ab eadem, ZP, $\frac{1}{3}$. ZP, cũ $\frac{1}{6}$. PG.

Omnia .n. quadrata trilinei, DPG, ad omnia quadrata ſemiparabolæ, AQG, habent rationem compoſitam ex ea, quam habent omnia quadrata, DPG, ad omnia quadrata, DG, ideſt ex ratione cõpoſitæ ex $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, Ex antec.
& ex ea, quam habent oĩa quadrata, DG, ad oĩa quadrata, AG, .i. ex ratione parallelepipedi ſub, DP, & quadrato, PG, ad parallelepipedũ ſub, AQ, & quadrato, QG, & tandem ex ea, quam habent omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata ſemiparabolę, AQG, .i ex ratione parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG, ad eiuſdem dimidiũ: Duæ autem rationes parallelepipedi ſub, DP, & quadrato, PG, ad Elicitur ex 11. l. 2. 21. huius.

paral-

parallelepipedum ſub, AQ, & quadrato, QG, & ratio huius ad eiuſdem dimidium, conficiunt rationem parallelepi-
Defin. 12. l. 1. pedi ſub, DP, & quadrato, PG, ad $\frac{1}{2}$. parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG, ergo omnia quadrata, DPG, ad omnia quadrata ſemiparabolæ, AQG, habent rationem compoſitam ex ratione rectæ compoſitæ ex $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, & ex ratione parallelepipedi ſub, DP, & quadrato, PG, ad $\frac{1}{2}$. parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG, vt dictum eſt.

Inſuper omnia quadrata trilinei, AXG, ad omnia quadrata trilinei, DEG, habent rationem compoſitam ex ratione omnium quadratorum, AXG, ad omnia quadrata, AG, .i. ſubſexcupla .i. ex ratione $\frac{1}{6}$. parallelepipedi ſub,
30. huius. AQ, & quadrato, QG, ad idem parallelepipedum, & ex ratione omnium quadratorum, AG ad omnia quadrata, DG, .i. parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG, ad parallelepipedum ſub, DP, & quadrato, PG, quæ duæ rationes conficiunt rationem $\frac{1}{6}$. parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG, ad parallelepipedũ ſub, DP, & quadrato, PG, & tandem ex ratione omnium quadratorum, DG, ad omnia quadrata trilinei, DEG, .i. ex ea, quam habet, ZP, ad reſiduũ,
47 huius. ab eadem, ZP, demptis $\frac{2}{3}$. ZP, cum $\frac{1}{6}$. PG, ergo omnia quadrata trilinei, AXG, ad omnia quadrata trilinei, DEG, habent rationem compoſitam ex ea, quam habet $\frac{}{6}$. parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG, ad parallelepipedum ſub, DP, & quadrato, PG, & ex ea, quam habet, ZP, ad ſui reſiduum, demptis ab ea $\frac{2}{3}$. ZP, cum $\frac{1}{6}$. PG, quæ oſtendere oportebat.

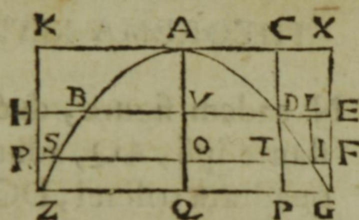
THEOREMA XLVII. PROPOS. XLIX.

IN eadem figura Propoſ. 46. oſtendemus, producta, PD, verſus, AX, cui occurrat in, C, omnia quadrata trilinei, DGP, ad omnia quadrata

drata

drata figuræ, CAZP, demptis omnibus quadratis trilinei, ACD, habere rationem compositam ex ea, quam habet composita ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, & ex ratione parallelepipedi sub, DP, & quadrato, PG, ad parallelepipedum sub, AQ, & his spatijs .s. quadrato, PQ, $\frac{1}{2}$. quadrati, QZ, & rectangulo sub sexquitertia, ZQ, & sub, QP, ab eodem dempta $\frac{1}{6}$. parallelepipedi sub, CD, & quadrato, QP.

Completo parallelogrammo, KP, omnia igitur quadrata trilinei, DPG, ad omnia quadrata figuræ, CAZP, demptis omnibus quadratis trilinei, ACD, habent rationem compositā ex ea, quam habent omnia quadrata, DPG, ad omnia quadrata, DG, .s. ex ratione compositæ ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, & ex ratione omnium quadratorum, DG, ad omnia quadrata, KP, .i. ex ratione parallelepipedi sub, DP, & quadrato, PG, ad parallelepipedum sub, AQ, & quadrato, ZP, & tandem ex ratione omnium quadratorum, KP, ad omnia quadrata figuræ, CAZP, demptis omnibus quadratis trilinei, ACD, .s. ex ratione parallelepipedi sub, AQ, & quadrato, ZP, ad parallelepipedum sub, AQ, & his spatijs .s. quadrato, PQ, $\frac{1}{2}$. quadrati, QZ, & rectangulo sub, PQ, & sexquitertia, QZ, ab eodem dempta $\frac{1}{6}$. parallelepipedi sub, CD, & quadrato, PQ; duæ autem rationes parallelepipedi sub, DP, & quadrato, PG, ad parallelepipedum sub, AQ, & quadrato, ZP, & huius parallelepipedi ad parallelepipedum sub, AQ, & spatijs iam dictis, ab eodem dempta $\frac{1}{6}$. parallelepipedi sub, CD,



47. huius

34. huius

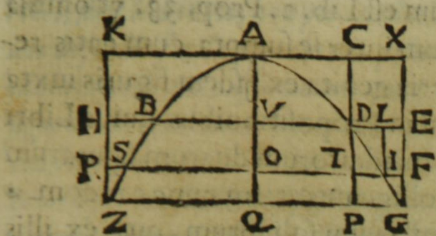
Defin. 12. l. 1. & quadrato, PQ, cõponunt rationem parallelepipedi sub, DP, & quadrato, PG, ad parallelepipedum sub, AQ, & dictis spatijs ab eodem dempta $\frac{1}{6}$. parallelepipedi sub, CD, & quadrato, PQ, ergo omnia quadrata trilinei, DGP, ad omnia quadrata figuræ, CAZP, demptis omnibus quadratis trilinei, ACD, erunt in ratione composita ex ea, quam habet $\frac{1}{3}$. ZP, cum $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, & ex ea, quam habet parallelepipedum sub, DP, & quadrato, PG, ad parallelepipedum sub, AQ, & his spatijs .s. quadrato, PQ, $\frac{1}{2}$. quadrati, QZ, cum rectangulo sub, PQ, & sexquitertia, QZ, ab eodem parallelepipedo dempta $\frac{1}{6}$. parallelepipedi sub, CD, & quadrato, PQ, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XLVIII. PROPOS. L.

IN eadem figura, ducta per, I, I L, æquidistante ipsi, AQ, adhuc ostendemus omnia quadrata trilinei, DGP, ad omnia quadrata trilinei, DTI, habere rationem compositam ex ea, quam habet rectangulum, ZPG, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, PG, ad rectangulum, STI, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, TI, & ex ea, quam habet quadratũ, PG, ad quad. TI.

Nam omnia quadrata, DGP, ad omnia quadrata, DIT, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia
47. huius. quadrata, DGP, ad omnia quadrata, DG, .i. ex ea, quam habet $\frac{1}{3}$. ZP, cum $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, .i. sumpta, PG, cõmuni altitudine, ex ea, quam habet rectangulum sub $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, & sub, PG, ad rectangulum, ZPG; item ex ratione omnium quadratorum, DG, ad omnia quadrata, DI, scilicet composita ex ea, quam habet, PD, ad, DT, & quadratum, PG, ad quadratum, TI, est autem, vt, PD, ad, DT, ita rectangulum, ZPG, ad rectangulum, STI; Tandem verò

com-



cōponitur ex ea, quam habēt omnia quadrata, DI, ad omnia quadrata, DIT, .i. ex ratione, ST, ad $\frac{1}{2}$. ST, cum $\frac{1}{6}$. TI, .i. sumpta, TI, cōmuni altitudine, ex ea, quam habet rectangulum, STI, ad rectangulum sub, TI, & cōposita ex $\frac{1}{2}$. ST, & $\frac{1}{6}$. TI, istæ autem rationes .s. quam habet rectangulum sub $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, & sub, PG, ad rectāgulum, ZPG, & huius ad rectangulum, STI, & tandem rectanguli, STI, ad rectāgulum sub, TI, & $\frac{1}{2}$. ST, cum $\frac{1}{6}$. TI, componunt rationem rectanguli sub $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, & sub, PG, ad rectangulum sub $\frac{1}{2}$. ST, & $\frac{1}{6}$. TI, & sub, TI, .i. triplicatis terminis, componunt rationem rectanguli sub, ZP, PG, cum rectangulo, sub $\frac{1}{6}$. PG, & sub, PG, .i. cū $\frac{1}{2}$. quadrati, PG, ad rectangulum sub, ST, TI, cum rectangulo sub $\frac{1}{6}$. TI, & sub, TI, .i. cum $\frac{1}{2}$. quadrati, TI, & remansit sola ratio quadrati, PG, ad quadratum, TI, ergo omnia quadrata trilinei, DGP, ad omnia quadrata trilinei, DIT, habebunt rationem compositam ex ea, quam habet rectangulū, ZPG, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, PG, ad rectangulum, STI, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, TI, & ex ea, quam habet quadratum, PG, ad quadratum, TI, quod &c. 41. huius.

THEOREMA XLIX. PROPOS. LI.

IN omnibus huius Libri 4. Propositionibus, in quibus duarum quarumcunq; figurarum notificata fuit ratio omnium quadratorum, iuxta regulas in eisdem assumptas, nota etiam euadit ratio similarium solidorum, quæ ex illis gignuntur figuris, iuxta easdem regulas.

Quoniam enim ostensum est Lib. 2. Prop. 33. vt omnia quadrata duarum figurarum inter se sumpta cum datis regulis, ita esse solida similaria genita ex ijsdem figuris iuxta easdem regulas, ideò cum in Propositionibus huius Libri inuenta est ratio omnium quadratorum duarum figurarum cum quibusdam regulis, colligemus etiam nunc eandem esse rationem duorum similarium solidorum, quæ ex illis figuris iuxta easdem regulas, genita dicuntur. Vt ex. g. in Prop. 21. conspecta denuò illius figura, cum ostensum est omnia quadrata, AF, esse dupla omnium quadratorum parabolæ, VEF, regula sumpta, VF; & item omnia quadrata parabolæ, VEF, esse sexquialtera omnium quadratorũ trianguli, VEF, concludemus pariter solidũ similare genitum ex, AF, ad sibi similare genitum ex parabola, VEF, duplam habere rationem; hoc verò ad solidũ sibi similare genitum ex triangulo, VEF, habere rationem sexquialteram, genita autem dicta solida intellige iuxta dictam regulam, VF; patet ergo propositum.

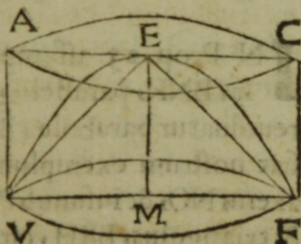
SCHOLIVM.

QVoniam autem apertè colligitur ex Lib. 1. Prop. 46. & 47. si omnes figuræ similes parabolæ, quæ sumãtur regulã eiusdem basi, sint circuli, diametros in eadem parabola sitos habentes, cui sint erecti, solidum similare genitum ex dicta parabola esse conoides parabolicum, cuius basis rectè secat axim; si verò sint ellipses homologas diametros in eadem parabola sitos habentes eidem erectæ, quarum secundæ diametri sint æquales distantiæ parallelarum, quæ ducuntur ab extremis primæ diametri æquidistanter axi, esse pariter conoides parabolicũ, cuius basis tunc obliquè axim secat. Ideò ex his infrascripta sequuntur Corollaria, in quibus exempla adhibebimus, veluti Lib. 3. effectum est, assumptis nempè omnibus figuris similibus genitricium figurarum, quæ sint circuli, diametros in ipsis genitricibus figuris, quibus sunt erecti,

recti, sitos habentes, quæ per reuolutionem figurarum circa suos axes describi facilè apprehendi possunt, propter quod in exemplis tantummodò axes assumemus congruenter ipsarum genitricium figurarum reuolutioni, licet exempla etiam assumptis diametris confici possent per descriptionem omnium similium figurarũ haud tamen per reuolutionem factam. Liceat autem Prop. antecedentium reassumptas figuras sub ampliori forma quandoq; proponere, vel sub angustiori, prout expedire comperietur, seruata semper earundem similitudine.

COROLLARIVM I.

IN Prop. 21. ergo si intelligantur tres figuræ, nempè parallelogrammum, AF, triangulus, EVF, & parabola, VEF, circa communem axem reuolui, qui supponatur esse, EM, fiet ex, AF, cylindrus, AF, ex triãgulo, VEF, conus, VEF, & ex parabola, VEF, conoides parabolicum, VEF, vnde patebit cylindrum, AF, esse duplum conoidis, VEF, & hoc esse sexquialterum coni, VEF; & vniuersalissimè, vt dictum est, solidum similare genitũ ex, AF, ad sibi similare genitum ex parabola, VEF, habere duplam rationem, hoc verò ad sibi similare genitum ex triangulo, VEF, rationem sexquialteram, quod tamen, ne figuræ multiplicentur, seu nimis confundantur (quod etiam imposterum obseruabimus) vno tãtum adhibito exemplo, reuolutionis figurarũ genitriciũ circa suos axes, explicare volui.



COROLLARIVM II.

IN Prop. 22. assumpta eius figura, fiat exemplum per reuolutionem parabolæ, FCH, circa axem, CG, dimissis

paral-

parallelogrãmis, AH, RM, fient igitur in hac reuolutione conoidea parabolica ex, FCH, OCM, parabolis, quæ sint, FCH, OCM; vnde patebit conoides parabolicum, FCH, ad conoides parabolicum, OCM, esse vt quadratum, GC, ad quadratum, CI, & sic esse quodlibet solidum similare genitum ex parabola, FCH, ad sibi similare genitũ ex parabola, OCM, iuxta communem regulam, FH, siue, CG, sit axis, siue tantum diameter, quod iuxta antecedentis explicationem facilè intelligi potest.

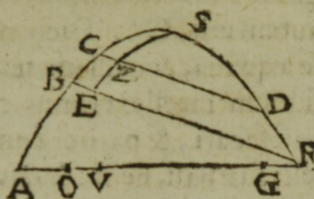
COROLLARIVM III.

IN Prop. 23. assumpta figura Prop. 12. scilicet parabola, BNH, parallelogrãmis, PH, AG, & triangulo, BRH, reuoluatur parabola, BNH, vt fiat nostrum exemplum, circa axem, NO, & insimul, PH, AG, & triangulus, BRH, circa, RO, patebit ergo cylindrum ex, PO, ad frustum conoidis ex, ABOR, in reuolutione genitum, esse vt, ON, ad compositam ex, NR, & $\frac{1}{2}$. RO, ipsum verò ad idem dempto cylindro ex, AO, .s. AG, vt, NO, ad $\frac{1}{2}$. RO, ex Corollario huic Propositioni subiecto, hoc frustum tãdem ad conum genitum ex triangulo, RBO, vt composita ex, ON, dupla, NR, & $\frac{1}{2}$. RO, ad ipsam, NO; & vniuersaliter quæcunq; solida similaria ex eisdem figuris genitricibus genita, iuxta communem regulam, BH, easdem rationes habere, vt supradicta ad inuicem comparata, siue, NO, sit axis, siue tantum diameter; quod ex Propos. 51. clarè patet. Intel-

telligatur autem in ſequentibus, licet ſemper aſſumatur axis, tamen pro ſolidis ſimilaribus etiam aſſumptis diametris eadem ibi appoſita verificari.

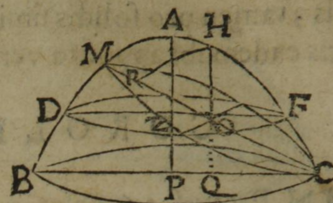
COROLLARIVM IV.

IN Propoſ. 26. veluti oſtendimus in eiuſdem figura hic appoſita omnia quadrata portionis, BSF, ad rectangula ſub portione, BSF, & figura diſtantiarum, SEF, eſſe vt, BF, ad, FE, ſic oſtenſum fuiſſet (aſſũptis vice quadratorũ alijs figuris ſimilibus, & vice rectangulorum, aſſumptis alijs ſimilibus figuris eius generis, vt veluti eſt vnũ quoduis dictorum omnium quadratorũ ad rectangulum adiacens lateri, à quo deſcribitur, ita ſit figura ab eodem latere deſcripta vice quadrati ſumpta, ad figuram deſcriptam eodem latere vice rectanguli ſumptam, fiet enim eodem modo demonſtratio his figuris aſſumptis) omnes figuras ſimiles portionis, BSF, ad figuras vice rectangulorum ſumptas eſſe pariter, vt, BF, ad, FE, & pariter ſolidum, quorum omnes dictæ figuræ ſimiles vice quadratorum ſumptæ ſunt omnia plana, ad ſolidum, quorum figuræ vice rectangulorum ſumptæ ſunt omnia plana, eſſe vt, BF, ad, FE; quæ quidem ſolida non ſunt ſolida ad inuicem ſimilaria, quia vtriuſq; ſolidi figuræ non ſunt inter ſe ſimiles, ſed tantum ſunt ſimiles inter ſe, quæ ſunt in vnoquoq; horum ſolidorum ſingillatim ſumpto.



COROLL. V. SECTIO I.

IN Prop. 27. ſimiliter aſſumpta eiuſdem figura, vt fiat noſtrum exemplum reuoluatur parabola, BAC, circa, AP,



AP, axem, vt fiat conoides parabolicũ, BAC, à quo per planum à, DZ, deſcriptum in reuolutione abſcindetur conoides parabolicum, DAF, cuius baſis rectè axim, AP, ſecat, & eſt circulus, intelligatur autẽ etiam per, MC, planum extendi rectum ad planũ parabolæ, BAC, per hoc igitur abſcindetur pariter conoides parabolicum, cuius baſis erit ellipſis, cuius maior diameter, MC, minor autem erit, CR. Dico nunc hæc duo conoidea eſſe inter ſe æqualia, cum diametri eorundem, AZ, HO, ſint æquales: ſi enim intellexerimus conoides, DAF, planis parallelis baſi ſecari, & pariter conoides, MHC, ſecari planis parallelis ſuæ baſi, fient, ductis omnibus eorundem planis, in
45 l 1. conoide, DAF, dicta omnia plana, omnes figuræ ſimiles inter ſe .ſ. omnes circuli figuræ genitricis, quæ eſt parabola, DAF; in conoide verò, MHC, dicta omnia plana fient omnes figuræ ſimiles figuræ genitricis, MHC, .ſ. omnes ellipſes eiuſdem, quarum coniugatæ diametri erunt inter ſe, vt, MC, ad, CR, maiores diametros in figura genitrice, MHC, ſitas habentes. Intelligantur nunc circa illas maiores diametros deſcribi circuli in planis ellipſium iacentes, erit
10. l 3. ergo quilibet circulus ad ellipſim ab eo comprehenſam, vt maior diameter ad minorem, & quia iſtę coniugatæ diametri ſunt omnes inter ſe, maiores .ſ. ad minores, vt MC, ad, CR, .ſ. vt quadratum, MC, ad rectangulum, MCR, & vt vnum ad vnum, ſic omnia ad omnia .ſ. vt omnes circuli figuræ genitricis, MHC, ad omnes eiuſdem ſimiles ellipſes, ita circulus circa, MC, ad ellipſim circa, MC, .ſ. ſic quadratum, MC, ad rectangulum, MCR, .ſ. ita omnia quadrata figuræ genitricis, vel parabolæ, MHC, ad rectangula, ſub
30. l. 2. parabola, MHC, & figura diſtantiarum, HRC, .ſ. ita ſolidum, cuius omnes circuli figuræ genitricis, MHC, iuxta

regu-

regulam basim, MC, sumpti, sunt omnia plana, ad solidum, cuius omnia plana sunt omnes similes ellipses iam dictæ figuræ genitricis, MHC, sumptæ iuxta eandem regulam, scilicet ad conoides parabolicū, MHC; sunt verò omnes circuli parabolæ, DAF, iuxta regulam, DF, ad omnes circulos parabolæ, MHC, iuxta regulā, MC, ita omnia quadrata, DAF, ad omnia quadrata, MHC, iuxta easdem regulas: ideò ex æquali omnes circuli parabolæ, DAF, ad omnes ellipses similes iam dictas parabolæ, MHC, erunt vt omnia quadrata, DAF, retentis semper eisdem regulis, ad rectangula sub, MHC, & figura distantiarum, HRC, .i. omnes circuli, DAF, erunt æquales omnibus similibus ellipsibus iam dictis figuræ, MHC, verum omnes circuli parabolæ, DAF, sumpti iuxta regulam, DF, quorum diametri sunt in figura genitrice, DAF, sunt omnia plana conoidis geniti in reuolutione ex semiparabola, DAZ, omnes verò ellipses similes iam dictæ parabolæ, MHC, sunt omnia plana conoidis parabolici resecti à plano ducto per, MC, ergo conoides parabolicum, DAF, est æquale conoidi parabolico, MHC: Sed vniuersaliter solidum genitum ex, DAF, habēs omnia plana, quæ sint omnes figuræ similes inter se eiusdem genitricis, DAF, erit æquale solido genito ex, MHC, habenti omnia plana, quę sint omnes figurę similes inter se eiusdem genitricis figuræ, MHC, ad quas omnes figuræ similes figuræ genitricis, DAF, sint vt omnia quadrata, DAF, ad rectangula sub figura genitrice, MHC, & figura distātiarum, HRC, dummodo diametri, AZ, HO, inter se sint æquales, quæ hic nobis erant colligenda.

Iuxta reg. DF.

Elicitur ex Corol. 47. l. 1.

SECTIO II.

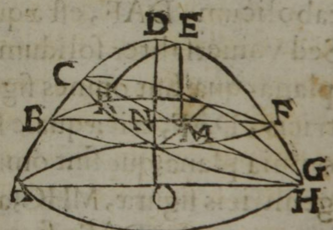
IN Coroll. 1. colligitur solidum similare genitum ex parabola, DAF, ad sibi similare genitum ex parabola, MHC, esse vt, DF, ad, MC, dum, AZ, HO, diametri fuerint æquales.

SECTIO III.

IN Coroll. 2. colligitur, si fuerint duo plana axem conoidis parabolicę obliquè secantia, sint autem abscisarum conoidum diametri inter se æquales, quod abscisæ conoides erunt inter se æquales; sed vniuersaliter, vice similium ellipsium, quæ sunt omnia plana dictarum conoidum, alijs figuris similibus seorsim in vnoquoque solido assumptis, inter se eandem rationem, quam prædictæ similes ellipses habentibus, quod ea solida, quorum assumptæ similes figuræ sunt omnia plana, erunt inter se ęqualia, dum diametri genitricium eorundem figurarum, quæ sunt abscisæ parabolæ, inter se quoq; æquales fuerint.

COROLLARIVM VI.

IN Propos. 28. & eius Coroll. assumpta illius figura, & facto solito exemplo per reuolutionem, ADH, parabolæ circa axim, DO, habetur, qđ si conois parabolica, ADH, in reuolutione descripta secetur quomodocunque planis siue ad axem rectis, siue obliquis, qđ abscisæ conoides erunt inter se, vt quadrata diametrorum eorundem, Nam vt omnia quadrata, BDF, regula, BF, quæ axim, DO, rectè secat, ad rectangula sub parabola, CEG, & figura distantiarum, ERG, ita esse omnes circulos, BDF, diametros in ea sitas habentes, sumptos iuxta regulã, BF, ad omnes similes ellipses figuræ genitricis, CEG, sumptas iuxta regulam, CG, quarum diametri maiores sunt in figura CEG, minores verò in figura distantiarum, REG, ostendemus methodo antecedentis, ergo dicti omnes circuli parabolæ, BDF, ad dictas omnes ellipses parabolæ, CEG, erũt



vt qua-

vt quadratum, DN, ad quadratum, EM, ergo & conois parabolica, BDF, ad conoidem parabolicam, CEG, erit vt quadratum, DN, ad quadratum, EM, vnde, conuertendo, conois parabolica, GEC, ad conoidem parabolicam, FDB, erit vt quadratum, EM, ad quadratum, DN, si ergo aliud planum, vtcunq; obliquè axem, DO, secauerit, erit conois parabolica, BDF, ad hanc conoidem vltimò resectam, vt quadratum, DN, ad quadratum diametri huius resectæ conoidis, ergo ex æquali conois parabolica, CEG, ad hanc conoidem vltimò resectam, cuius basis pariter obliquè secat axim, DO, erit vt quadratum, EM, ad huius diametri quadratum, quomodocunque igitur resecetur conois planis axem secantibus, resecta segmenta sunt, vt diametrorum quadrata. Sed vniuersaliter, si, vice circulorum, vel dictarum ellipsium, sumamus alias figuras similes in vnoquoq; solido seorsim, quorum sunt omnia plana, ijs existentibus omnibus figuris similibus genitricium figurarum, quales sunt parabolæ, BDF, CEG, dicta ex ijsdem genita solida iuxta regulas bases abscissarum parabolarum, si dictæ figuræ similes fuerint inter se, vt prædicti circuli, vel similes ellipses, vel vt omnia quadrata, & rectangula sub abscissis parabolis, & figuris distantiarum earundem, regulis semper pro vnaquaque earundem parabolarum basibus sumptis, erunt inter se, vt quadrata diametrorum abscissarum per ducta plana parabolarum, intellige tamen resecãtia plana semper in supradictis esse erecta plano genitriciũ figurarum, vt planum per, CG, erectum parabolæ, ADH, plano, similiter & quod per, BF, siue in conoide, siue in alijs iam dictis solidis, vt supradictum est genitis.

APPENDIX.

Exponatur parabola, ACE, circa axim, CM, in basi, AE, cui parallela ducatur vtcunque, BD, intra ipsam, &

iungatur, BE, ducaturque, RS, diameter parabolæ, BRE, & vt fiat nostrum exemplum reuoluatur parabola, ACE, circa axim manentem, CM, vt fiat conoides parabolicę, ACE, BCD, & per, BE, ducatur planum erectum plano parabolæ, ACE, scindens frustum conoidis, BAED, in duas portiones, scilicet, BAE, BDE. Dico ergo portionem, BAE, ad portionem, BDE, (resecta, CO, æquali ipsi, RS,) esse vt quadratũ, MO, cum rectangulo bis sub, MOC, ad quadratũ, ON, cum rectangulo bis sub, ONC.

Nam conois, ACE, ad conoidem, BRE, est vt quadratum, MC, ad quadratum, SR, vel ad quadratum, OC, ergo, per conuersionem rationis, & conuertendo, portio solida, BAE, ad conoidem parabolicam, ACE, erit vt residuum quadrati, MC, dempto quadrato, OC, ad quadratum, MC, .s. vt quadratum, MO, cum rectangulo bis sub, MOC, ad quadratum, MC, quod serua. Item quia conoidem, ACE, ad conoidem, BRE, diximus esse vt quadratũ, MC, ad quadratum, CO, eadem autem conois, ACE, ad conoidem, BCD, est vt quadratum, MC, ad quadratum, CN, ergo conois, ACE, ad reliquum dempta conoide, BCD, à conoide, BRE, erit vt idem quadratum, MC, ad reliquum, dempto quadrato, CN, à quadrato, CO, .i. ad quadratum, ON, cum rectangulo bis sub, ONC, est ergo conois, ACE, ad portionem solidam, BDE, vt quadratum, MC, ad quadratum, ON, cum rectangulo bis sub, ONC, erat autem portio solida, BAE, ad conoidem parabolicam, ACE, vt quadratum, MO, cum rectãgulo bis sub, MOC, ad quadratum, MC, ergo, ex æquali, portio solida, ABE, ad portionem solidam, BDE, erit vt quadratum, MO, cum rectangulo bis sub, MOC, ad quad. ON, cũ rectãg. bis sub, ONC, quod &c.

Sed

Sed vniuersaliter si sint solida similaria genita ex parabolis, ACE, BCD, iuxta communem regulam, AE, & ducatur planum per, BE, erectum plano parabolæ, ACE, scindens solidum similare genitum ex, BDEA, in duas portiones solidas, BAE, BDE, adhuc, consequenter supradictis, inueniemus has duas portiones solidas esse in eadem ratione, vt portiones solidæ productę ex sectione frusti conoidis parabolicæ, BAED, .f. esse vt quadratum, MO, cum rectangulo bis sub, MOC, ad quadratum, ON, cum rectangulo bis sub, ONC, quod ex supradictis erui facilè potest; quæ demonstratio currit etiam, si, CM, non sit axis, sed tantum diameter, vt consideranti clarè patebit.

A. COROLL. VII. SECTIO I. A

IN Prop. 29. & Cor. Sect. 1. & 2. colligimus solida similaria genita ex parabolis in eadem altitudine constitutis, genita inquam iuxta regulas ipsarum bases, esse inter se, vt quadrata basium, & in ijsdem basibus constitutis, vt earum altitudines, vel vt diametros æqualiter basibus inclinatas; hoc igitur nedum concluditur de conoidibus parabolicis in eadem altitudine stantibus, quod sint, vt quadrata basium, vel in eadem basi existentium, quod sint, vt altitudines, sed de cæteris similaribus solidis ex ipsis parabolis genitis iuxta regulas bases, vt dictum est.

B. SECTIO II. B

ITem habemus conoides parabolicas, & cætera solida similaria ex parabolis genita iuxta regulas bases, habere inter se rationem compositam ex ratione quadratorum basium, & altitudinum, vel diametrorum æqualiter basibus inclinatarum.

C C. SECTIO III.

ITem eadem ſolida, quarum baſes altitudinibus, vel diametris æqualiter baſibus inclinatis reciprocantur, eſſe æqualia, & quæ ſunt æqualia habere baſes altitudinibus, vel diametris æqualiter baſibus inclinatis, reciprocas.

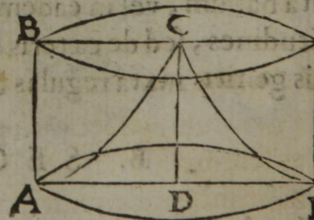
D D. SECTIO IV.

TAndem colligemus conoides parabolicas, & cætera ſolida ſimilaria ex parabolis genita iuxta regulas ipſarum baſes, quarum axes, vel diametri ad homologas baſium diametros, vel latera habeant eandem rationem .i. ſi-

miles conoides parabolicas, & ſimilia ſolida ſimilaria genita ex parabolis iam dictis, eſſe in tripla ratione dictarum homologarum linearum.

✠ ✠ COROLL. VIII. SECTIO I.

IN Prop. 30. expoſita figura, vt fiat ſolitum exemplum, reuoluatur, ACD, circa manentem axim, DC, patebit ergo cylindrum genitũ ex, BD, in reuolutione .ſ. BF, eſſe ſexcuplum ſolidi geniti ex trilineo, CDA, .ſ. ſolidi, CAF. Sed vniuerſaliter ſolidum ſimilare genitum ex, BD, ad ſibi ſimilare genitũ ex, CDA, ſexcuplam rationem habere, ſiue, CD, ſit perpendicularis ipſi, DA, ſiue non; vocetur autem ſolidum genitum per reuolutionem ex, CDA, Apex parabolicus.



SE-

A. SECTIO II. A

IN Corollario autem colligimus apices parabolicos in eadem altitudine existentes, esse vt basium quadrata, & in eisdem basibus esse, vt altitudines, sic etiam esse solida similaria genita ex trilineis in eadem altitudine, vel in eadem basi existentibus, genita inquam iuxta regulas tangentes ipsas parabolas.

B. SECTIO III. B

ITem, quod eadem solida quomodocunque sint, habeant inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinũ, vel secantiũ æqualiter tangentibus inclinatarum.

C. SECTIO IV. C

ITem, quod eadem solida bases habentia altitudinibus, vel secantibus æqualiter tangentibus inclinatis reciprocas, sint æqualia; & quæ sunt æqualia, bases habeant altitudinibus, vel secantibus æqualiter tangentibus inclinatis reciprocas.

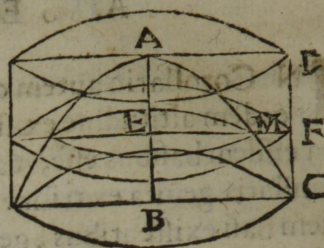
D. SECTIO V. D

TAndem, quod eadem solida sint in tripla ratione tangentium, vel secantium parabolas; si tangentes ad secantes semiparabolas, ex quibus in reuolutione generantur, habeant eandem rationem.

COROLLARIVM IX.

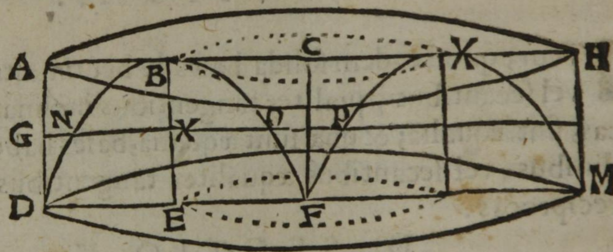
IN Propos. 31. exposita figura, & vt fiat nostrum exemplum reuoluto, AC, circa manentem axim, AB, patet solidum, quod in reuolutione fit ex trilineo, ADC, ad solidum,

dũ, quod fit ex trilineo, MFC, esse vt quadratum, AB, ad quadratum, BE, & vniuersaliter, solidum similare genitum ex, AC, dempto solido similari genito ex semiparabola, ACB, ad sibi similare genitum ex, EC, dempto solido similari genito ex frusto, EMCB, esse vt quadratum, AB, ad quadratũ, BE, genita, in quam intellige iuxta communem regulam, BC.



COROLL. X. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 32. exposita figura, &, vt fiat nostrum exemplum reuoluto, AF, circa manentem axim, CF, patebit cylindrũ in reuolutione genitum ex AF, ad solidum genitum ex parabola, DBF, esse vt, AF, ad parabolam, DBF, & ita esse quodlibet solidum similare genitum ex, AF, ad sibi similare genitum ex figura, CBDF, dempto solido similari genito ex trilineo, BCF: cylindrum verò genitum ex, AF, .f. AM, ad solidum in reuolutione genitum ex figura, CBDF, esse vt, AF, ad parabolam, DBF, cum $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. parallelogrammi, AF, .i. vt 24. ad 17. & ita esse solidum similare genitum ex, AF, ad sibi similare genitum ex figura, CBDF, genita inquam iuxta communem regulam, DF. Vocetur autem solidum, quod in reuolutione generatur ex parabola, DBF. Semianulus stri-



ctus parabolicus; quod verò gignitur ex figura, CBDF; Semibasis columnaris parabolica stricta.

SECTIO POSTERIOR.

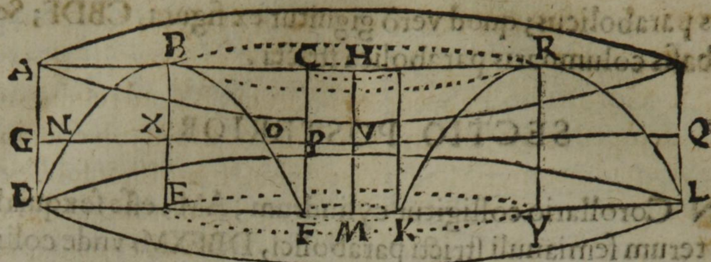
IN Corollario colligitur cylindrum, AM, esse sexquialterum semianuli stricti parabolici, DBFXM, vnde colligi potest proprietates, quæ conoidibus, vel apicibus parabolicis in Corollarijs 7. & 8. Proposit. 51. huius inesse ostensa sunt, & de semianulis strictis parabolicis pariter concludi.

COROLLARIVM XI.

IN Proposit. 33. habemus partem interiorem semianuli stricti parabolici, ad exteriorem (quæ partes disseparantur per superficiem in reuolutione descriptam in superioris figura per lineam, siue axim, BE,) esse vt 5. ad 11. & sic esse quodlibet solidum similare genitum ex, BF, dempto solido similari genito ex trilineo, BCF, ad sibi similare genitum ex figura, CBDF, dempto solido similari genito ex, BF, genita, inquam, iuxta communem regulam, DF.

COROLL. XII. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 34. assumpta eiusdem figura, vt fiat exemplum reuoluatur, AM, circa manentem axim, HM, fiat autem ex, AM, in reuolutione cylindrus, AL; patet igitur cylindrum, AL, ad solidum in reuolutione genitum ex parabola, DBF, esse vt, AF, ad parabolam, DBF, (hoc autem vocetur Semianulus latus parabolicus) & ad solidum genitum ex figura, HBDM, esse vt quadratum, DM, ad quadratum, ME, $\frac{1}{2}$. quadrati, ED, cũ rectangulo sub sexquitertia, DE, & sub, EM, quod vocetur Semibasis columnaris parabolica



lata; Et vniuersaliter solidum similare genitum ex, AM, ad sibi similare genitum ex figura, HBDM, habere eandem rationem proximè dictæ; ad idem verò dempto solido similari genito ex quadrilineo, BFMH, esse vt, AF, ad parabolã, DBF, .i. in ratione sexquialtera.

SECTIO POSTERIOR.

IN Coroll. potest colligi etiam in Cor. 10. Prop. 51. Sect. poster. cõcludi posse cylindrum in reuolutione genitum ex, AF, ad semibasim columnarem strictam parabolicã genitã ex figura, CBDF, esse vt quadratũ, DF, ad quadratum, FE, ½. quadrati, ED, & rectangulum sub sexquitertia, DE, & sub, EF, & sic esse solida similaria ex eisdem genita iuxta communem regulam, DF.

COROLL. XIII. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 35. iterum assumpta antecedentis figura, patet cylindrum genitum in reuolutione ex, BM, .i. cylindrum, BY, ad solidum genitum ex reuolutione figuræ, BHMF, .f. ad solidũ, BFKR, quod vocetur Semitympanum parabolicum, esse vt quadratum, EM, ad quadratum, MF, cum rectangulo sub ⅔. EF, &, FM vna cum ⅙. quadrati, EF; & sic esse solidum similare genitum ex, BM, ad sibi similare genitum ex figura, BHMF, iuxta cõem regulã, DM.

SECTIO POSTERIOR.

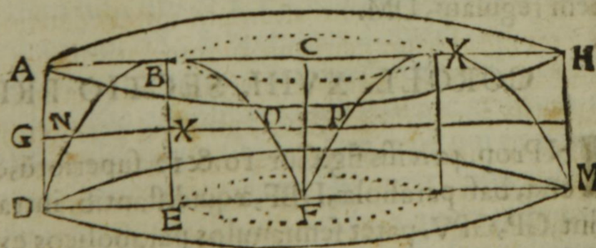
EX Corollario habetur cylindrum, BY, ad residuum, dempto semitympano parabolico, BFKR, ab eodem, esse vt quadratum, EM, ad rectangulum sub, MF, & sub sexquitertia, FE, cum $\frac{5}{}$. quadrati, FE, & sic esse solidum similare genitum ex, BM, ad residuum, dempto ad eodem solido similari genito ex figura, BHMF, iuxta communem regulam, DM.

COROLLARIVM XIV.

IN Prop. 36. visa adhuc eadem figura, patet portionum semianuli lati parabolici ex, DBF, parabola in reuolutione geniti, quæ separantur à superficie descripta ab axi, BE, exteriorem ad interiorem .s. quæ gignitur à semiparabola, BDE, ad eam, quæ gignitur à semiparabola, BFE, esse vt, EM, cū $\frac{1}{3}$. EM, & $\frac{1}{2}$. ED, ad, MF, cum $\frac{1}{3}$. MF. & $\frac{5}{6}$. FE, & sic esse solidum similare genitum ex figura, DBHM, dempto solido similari genito ex, BM, ad solidum similare genitum ex, BM, dempto solido similari genito ex figura, BFMH, iuxta communem regulam, DM.

COROLLARIVM XV.

IN Prop. 37. visa fig. Cor. 10. P. 51. huius, patet conoidem parabol. genitā in reuolutione ex semiparabola, BDE, ad semianulum strictum para-



bolicum genitum ex parabola, DBF, esse vt $\frac{1}{4}$. DF, ad $\frac{4}{3}$. DF, .i. vt 3. ad 16. & sic esse solidum similare genitum ex, DBE, semiparabola, ad sibi similare genitum ex figura, CBDF, dempto solido similari genito ex trilineo, BCF, iuxta communem regulam, DF.

COROLLARIVM XVI.

IN Propos. 38. conspecta adhuc eadem superiori figura, habetur semianulũ latum parabolicũ genitum in reuolutione ex parabola, DBF, ad semianulum strictum parabolicum genitum ex eadem, esse vt, DM, MF, ad, FD, & sic esse solidum similare quodcunq; genitũ ex figura, HBDM, dempto solido similari genito ex figura, BHMF, ad solidum sibi similare genitum ex figura, CBDF, dempto solido similari genito ex trilineo, BCF, iuxta cõem regulam, DM.

COROLLARIVM XVII.

IN Prop. 39. visa eadem superioris figura, habemus semianulum latum parabolicum genitum ex parabola, DBF, ad conoidem parabolicam genitam ex eadem per reuolutionem, esse vt, DM, MF, ad $1\frac{1}{6}$. ipsius, FD, & sic esse quodhibet solidum similare genitum ex, HBDM, dempto solido similari genito ex figura, BHMF, ad solidum sibi similare genitum ex semiparabola, BDE, iuxta communem regulam, DM.

COROLL. XVIII. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 40. visis fig. Cor. 10. & 12. superiorũ, & ductis vtcũq; basi parabolæ, DBF, æquidistantib. intra ipsam, quæ sint, GP, GPV, patet semianulos parabolicos ex parabolis, DBF, NBO, in vtraq; figura per reuolutionem genitos, esse in-

ſe inter ſe, vt ipſas parabolas, DBF, NBO; & ſic eſse quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex figura, HBDM, dempto ſolido ſimilari genito ex figura, BFMH, ad ſibi ſimilare genitum ex figura, HBNV, dempto ſolido ſimilari genito ex figura, HBOV. Et ſic etiam ſolidum ſimilare genitum ex figura, CBDF, dempto ſolido ſimilari genito ex trilineo, CBF, ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex figura, CBNP, dempto ſolido ſimilari genito ex figura, BCPO, genita inquam iuxta communes regulas, DF.

SECTIO POSTERIOR.

EX Coroll. habetur ſemianulos latos parabolicos ex parabolis, DBF, NBO, in reuolutione circa, HM, genitos eſse ad inuicē, vt ſemianulos strictos parabolicos ex parabolis, DBF, NBO, genitos in reuolut. circa, CF, & ſic ſolida ſimilaria, &c. & vtroſq; ſemianulos parabolicos, ſiue latos, ſiue strictos eſse ad inuicem, vt cubi dictarum parabolarum baſium, DF, NO, & ſic etiam ſolida ſimilaria, &c.

COROLLARIVM XIX.

IN Prop. 41. viſis adhuc fig. Cor. 10. & 12. ſuperiorū, patet ſemibaſim columnarem strictā parabolicam genitam in reuolutione ex figura, CBDF, ad ſemibaſim columnarem latam parabolicam genitam ex figura, CBNP, eſse vt parallelepipedum ſub, BE, & $\frac{1}{2}\frac{7}{4}$. quadrati ipſius, DF, ad parallelepipedum ſub, BX, & his ſpatijs .ſ. quadrato, XP, $\frac{1}{2}$. quadrati, NX, & rectangulo ſub ſexquitertia, NX, & ſub, XP; & ſic etiam eſse quodlibet ſolidū ſimilare genitum ex figura, CBDF, ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex figura, CBNP, iuxta cōmunem regulam, DF: patet inſuper ſemibaſim columnarem latam parabolicam genitam in reuolutione circa, HM, ex figura, DBHM, ad ſemibaſim columnarem

rem latam parabolicam genitam ex figura, HBNV, esse vt parallelepipedum sub, BE, & his spatijs .s. quadrato, ME, $\frac{1}{3}$. quadrati, ED, & rectãgulo sub sexquitertia, DE, & sub, EM, ad parallelepipedum sub, BX, & his spatijs .s. quadrato, VX, $\frac{1}{3}$. quadrati, XN, & rectangulo sub sexquitertia, NX, & sub, XV; & sic etiam esse solidum similare quodcũq; genitum ex figura, HBDM, ad solidũ sibi similare genitum ex figura, HBNV, iuxta communem regulam, DM.

COROLLARIVM XX.

IN Prop. 42. assumpta figura, quæ ad ipsum pertinet .s. parallelogrammo, AF, & frusto parabolæ maiori illi incluso .s. EBHF, vt fiat nostrum exẽplum reuoluatur, AF, circa manentem axim, CF, fiat autem ex, AF, cylindrus, AN, & ex figura, HBCF, solidum, HBON, quod vocetur: semibasis columnaris media parabolica, & extenso plano, AF, indefinitè producatur in cylindro parallelogrãmum, AN, & in semibasi columnari figura, HBON, quæ erit circa axẽ, CF, composita ex duabus figuris, EBHF, FEON, similibus, & æqualibus ei, quæ per reuolutionem semibasim columnarem, HBON, generat; patet ergo in hac Proposit. cylindrum, AN, ad semibasem columnarem mediam parabolicam, HBON, esse vt quadratum basis, HF, ad quadratum, FG, $\frac{1}{3}$. quadrati, GH, cum rectangulo sub sexquitertia, HG, & sub, GF; sic verò etiam erit quodlibet solidum similare genitum ex, AF, ad sibi similare genitum ex figura, CBHF, iuxta communem regulam, HF.

CO-

COROLLARIVM XXI.

IN Prop. 43. viſa ſuperioris figura, patebit cylindrum, AN, ad ſolidum genitum in reuolutione ex fruſto maiori parabolæ, EBHF, (quod vocetur Aceruus maior parabolicus) .ſ. ad Aceruum, HBEON, eſſe vt parallelepipedum ſub, BG, & quadrato, HF, ad reliquum parallelepipedi ſub, BG, & his ſpatijs .ſ. quadrato, FG, $\frac{1}{2}$. quadrati, GH, & rectangulo ſub ſexquitertia, HG, & ſub, GF, ab eodem dempto $\frac{1}{6}$. parallelepipedi ſub, CE, & quadrato, FG; Sic etiam erit ſolidum ſimilare quodcunq; genitum ex, AF, ad ſibi ſimilare genitum ex figura, CBHF, dempto ſolido ſimilari genito ex trilineo, BCE, iuxta communem regulam, HF.

COROLLARIVM XXII.

IN Prop. 44. adiuncta ſuperioris figuræ linea, RV, parallela ipſi, HF, quæ, RV, ſit producta vſq; in, X, per ipſam ducatur planum æquidiſtans baſi, HN, quod faciet in ſemibaſi columnari, HBON, communem ſectionem circulum, RX; habetur ergo hinc ſemibaſim columnarem mediam parabolicam, HBON, ad abſciſſum per circulum, RX, fruſtum, RBOX, eſſe vt parallelepipedum ſub, BG, & his ſpatijs .ſ. quadrato, FG, $\frac{1}{2}$. quadrati, GH, & rectangulo ſub ſexquitertia, HG, & ſub, GF, ad parallelepipedum ſub, BS, & ſub his ſpatijs .ſ. quadrato, VS, $\frac{1}{2}$. quadrati, SR, & rectangulo ſub ſexquitertia, RS, & ſub, SV. Veluti etiã erit quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex figura, CBHF, ad ſibi ſimilare genitum ex figura, CBRV, iuxta cõem regulã, HF.

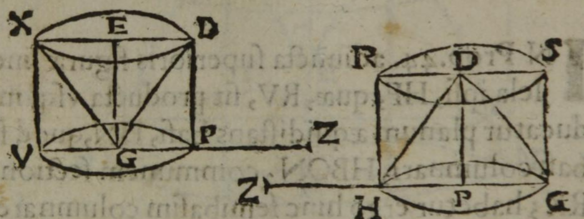
COROLLARIVM XXIII.

IN Prop. 45. viſa adhuc anteced. figura, patet aceruum maiorem parabolicum, HBEON, ad conoidem parabolicum

licam genitam ex ſemiparabola, BHG, eſſe vt reliquum parallelepipedi ſub, BG, & his ſpatis. ſ. quadrato, FG, $\frac{1}{2}$. quadrati, GH, & rectangulo ſub, FG, & ſexquitertia, GH, ab eodẽ dempto $\frac{1}{6}$. parallelepipedi ſub, CE, & quadrato, FG, ad dimidium parallelepipedi ſub, BG, & quadrato, GH; vt etiam erit quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex figura, CBHF, dempto ſolido ſimilari genito ex trilineo, BCE, ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex ſemiparabola, BHG, iuxta communem regulam, HF.

COROLLARIVM XXIV.

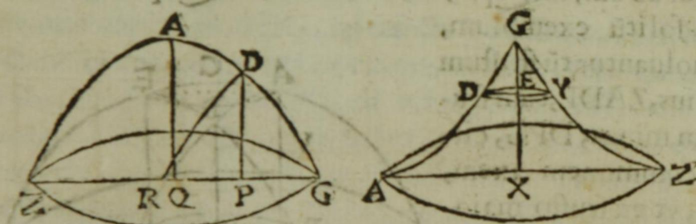
IN Prop. 47. ſumatur ex figura Prop. 46. fruſtum minus parabolæ, quod eſt, DPG, cum parallelogrammo, DG, & integra baſi parabolę, ZAG, quę eſt, ZG, &, vt fiat ſolitũ exemplum, reuoluatur, DG, circa manentem axim, DP, & iterũ circa manentem axim, EG, fiet ergo ex reuolutione circa, DP, à parallelogrãmo, DG, cylindrus, RG, & à fruſto parabolæ minori, PDG, ſolidum, quod ſit, HDG, quodq; vocetur, Aceruus minor parabolicus; & ex reuolutione circa, EG, à parallelogrammo, DG, in alia figura cylindrus, DV, & à trilineo extra fruſtum minus parabolæ conſtituto ſolidum, DGX, quod eſt fruſtum apicis parabolici reſectum per circulum, DX, quodq; vocetur Fruſtum apicis parabolici. Patet ergo cylindrum, RG, ad aceruum minorem parabolicum, HDG, eſſe vt, ZP, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG; ac cylindrũ, DV, ad fruſtum apicis parabolici, DGX, eſſe vt, ZP, ad ſui reliquum,



demptis ab ea $\frac{2}{7}$. ZP, cum $\frac{1}{6}$. PG; Sic autem etiam erit quodlibet solidum similare genitum ex, DG, ad solidum sibi similare genitum ex frusto minori, DGP, vt, inquam, in priori parte huius Theor. dictum est; & sic etiã solidum quodlibet similare genitum ex, DG, ad sibi similare genitum ex trilineo, DEG, iuxta communem regulam, ZG, vt in posteriore dicti Theor. parte dictum est.

COROLLARIVM XXV.

IN Propositione 48. sumatur de figura Proposit. 46. parabola, ZAG, cum basi, ZG, & axi, AQ, & resecto eius minori frusto, DPG, de eiusdem figura adhuc sumatur, AXG, trilineum, in quo ducitur, DE, æquidistans ipsi, AX, &



seorsim ponatur, vt autem fiat solitum exemplũ, reuoluatur parabola, ZAG, circa manentem axim, AQ, & frustum minus eiusdem, quod est, DPG, circa, DP, ex quo fiat aceruus minor, RDG. Insuper trilineum, AXG, reuoluatur circa, GX, vt fiat apex parabolicus, AGZ, & ex, GDE, eius frustum, GDY; patet igitur ex ipsa Prop. 48. aceruum minorem, RDG, ad conoidem parabolicam, ZAG, habere rationem compositam ex ea, quam habet cõposita ex $\frac{1}{7}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, & ex ratione parallelepipedi sub, DP, & quadrato, PG, ad dimidium parallelepipedi sub, AQ, & quadrato, QG; & sic etiam esse quodlibet solidum similare genitum ex frusto parabolæ, DGP, ad sibi similare genitum

ex ſemiparabola, AQG; iuxta communem regulam, ZG. Item ex eadem Prop. patet apicem parabolicum, AGZ, ad eius fruſtum, DGY, habere rationem compoſitam ex ea, quam habet ſexta pars parallelepipedi ſub, AQ, & quadrato, QG, ad parallelepipedum ſub, DP, & quadrato, PG, & ex ea, quam habet, ZP, ad reſiduum, demptis ab eadē, ZP, $\frac{2}{3}$. ZP, cum $\frac{1}{6}$. PG: Sic autem quoq; erit quodcunq; ſolidum ſimilare genitum ex trilineo, AXG, ad ſibi ſimilare genitum ex trilineo, GDE, iuxta communem regulam, AX.

COROLLARIVM XXV.

IN Propoſitione 49. aſſumpta de figura Propoſit. 46. parabola, ZAG, cum axi, AQ, & illi parallela, DP, abſcindatur ab axi, AQ ipſa, AV, exceſſus, AQ ſuper, DP, & vt fiat ſolitū exemplum, reuoluantur tū fruſtum maius, ZADP, tum fruſtum minus, DPG, circa communem axem, DP, vt ex fruſto maiori, DAZP, fiat aceruus maior parabolicus, ZADON, & ex fruſto minori, DPG, fiat aceruus minor parabolicus, RDG: Patet ergo ex hac Propoſ. aceruum minorem, RDG, ad aceruum maiorem, ZADON, habere rationem compoſitam ex ea, quam habet compoſita ex $\frac{1}{3}$. ZP, & $\frac{1}{6}$. PG, ad, ZP, & ex ratione parallelepipedi ſub, DP, & quadrato, PG, ad parallelepipedum ſub, AQ, & his ſpatijs .ſ. quadrato, PQ, $\frac{4}{3}$. quadrati, QZ, & rectangulo ſub ſexquitertia, ZQ, & ſub, QP, dempto ab eodem $\frac{1}{6}$. parallelepipedi ſub, AV, & quadrato, QP: Sic autem erit etiam quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex fruſto minori, DPG, ad ſibi ſimilare genitum

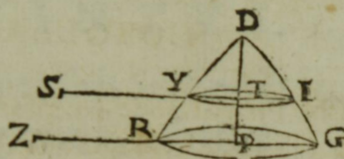


ex

ex figura, CAZP, Prop. 46. dempto solido similari genito ex trilineo, ACD, iuxta communem regulam, ZG.

COROLLARIVM XXVII.

IN Propositione 50. de figura Proposit. 46. sumatur frustum minus parabolæ, quod est, DGP, quodque secatur per rectam, TI, æquidistantem ipsi, PG, accipiatur insuper duæ integræ, ZG, SI, & vt fiat nostrum exemplum, reuoluatur, DPG, frustum circa manentem axim, DP, vt ex, DP G, fiat aceruus minor, RDG, & ex, DTI, eius frustum, YDI, patet ergo ex hoc Theorem.



aceruum minorem, RDG, ad resectum frustum, YDI, habere rationem compositã ex ea, quam habet rectangulum, ZPG, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, PG, ad rectangulum, STI, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, TI, & ex ea, quam habet quadratum, PG, ad quadratum, TI. Vt etiam erit quodlibet solidum similare genitum ex frusto minori parabolæ, quod est, DPG, ad sibi similare genitum ex trilineo, DTI, iuxta cõem regulã, PG.

SCHOLIVM.

PLura alia possemus adhuc circa hæc examinare, præcipuè soliditatem eius, quod produceretur, reuoluta parabola circa basim, vel illi parallelam, siue tangentem parabolam, siue extra ipsam constitutam, & proportionem eiusdem segmentorum; necnon & aliorum corporum, quorum notitia tum ob speculationem iucunda, tum in ordine ad praxim considerata, non inutilis etiam esse videtur, sed hæc alijs indaganda relinquam. Hæc autem nunc delibasse sufficiat.

Finis Quarti Libri.

GEOMETRIÆ CAVALERII.

LIBER QVINTVS.

In quo de Hyperbola, Oppositis Sectionibus, ac solidis ab eisdem genitis, habetur contemplatio.

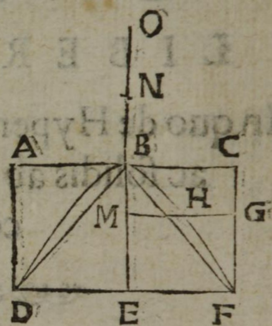
THEOREMA I. PROPOS. I.



MNIA quadrata Hyperbolæ, regula sumpta basi .s. vna ex ordinatim applicatis ad axim, vel diametrum eiusdem, ad omnia quadrata parallelogrammi in eadem basi, & altitudine cum ipsa, erunt vt linea composita ex dimidia trāsuersi lateris hyperbolæ, & $\frac{1}{3}$. diametri, vel axis eiusdem, ad compositam ex transuerso latere, & axi, vel diametro eiusdem: Eadem verò ad omnia quadrata trianguli in eadem basi, & altitudine cum ipsa erunt, vt

composita ex sexquialtera transuersi lateris, & axi, vel diametro eiusdem, ad compositam ex trāsuerso latere, & axi, vel diametro eiusdem.

Sit igitur hyperbola, DBF, in basi, DF, cuius axis, vel diameter, EB, & transuersum latus, BO, bifariam diuisum in, N, describatur verò parallelogrammum, AF, in eadem altitudine, & basi cū hyperbola, DBF, & nunc circa axim, vel diametrum, BE, circa quam sit etiam triangulum, BDF. Dico ergo omnia quadrata hyperbolæ, DBF, regula, DF, ad omnia quadrata, AF, esse vt cōpositam ex, NB, & $\frac{1}{3}$. BE, ad, OE; ad omnia verò quadrata trianguli, DBF, esse vt compositam ex sexquialtera, OB, & ipsa, BE, ad, OE; sumatur in, BE, vtcunq; punctum, M, & per, M, ducatur, MG, parallela ipsi, DF, secans curuam hyperbolæ in, H. Est ergo quadratum, EF, vel quadratum, GM, ad quadratum, MH, vt rectangulum, OEB, ad rectangulum, OMB, est autem, BF, parallelogrammum in eadem altitudine, & basi cum semihyperbola, BEF, & punctum, M, vtcunq; sumptum, per quod acta est ipsi, DF, parallela, MG, regula, DF, repertumque est, vt quadratum, GM, ad quadratum, MH, ita esse rectangulum, OEB, ad rectangulum, OMB, ergo horum quatuor ordinum magnitudines erunt proportionales .s. omnia quadrata, BF, magnitudines primi ordinis collectæ iuxta primam .s. iuxta quadratum, GM, ad omnia quadrata semihyperbolæ, BEF, magnitudines secundi ordinis collectas iuxta secundam .s. iuxta quadratum, MH, erunt vt rectangula sub maximis abscissarum, BE, magnitudines tertij ordinis collectæ iuxta tertiam .s. iuxta rectangulum sub, OE, EB, ad rectangula sub



3.9. l. 1. & Scho. 40.

Coroll. 3. 26. l. 2.

om-

omnibus abſciſſis, EB, adiuncta, BO, & ſub omnibus abſciſſis, EB, magnitudines quarti ordinis collectas iuxta primã, .ſ. iuxta rectangulum, OMB; verum rectangula ſub maximis abſciſſarum, EB, adiuncta, BO, & ſub maximis abſciſſarum, EB, ad rectangula ſub omnibus abſciſſis, EB, adiuncta, BO, & ſub omnibus abſciſſis, EB, recti, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſunt vt, OE, ad compoſitam ex, NB, & $\frac{1}{2}$. BE, ergo, conuertendo, omnia quadrata ſemihyperbolæ, BEF, ad omnia quadrata, BF, vel eorum quadrupla .i. omnia quadrata hyperbolæ, DBF, ad omnia quadrata, AF, etiam ſi, AF, non eſſet circa axim, vel diametrum, BE, ſed tantum in eadem altitudine cum hyperbola, DBF, erunt vt compoſita ex $\frac{1}{2}$. OB, & $\frac{1}{2}$. BE, ad, OE. Corol 30. l. 2.

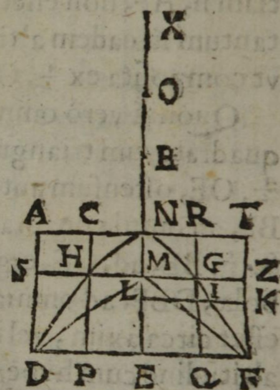
Quoniã verò omnia quadrata, AF, ſunt tripla omnium quadratorum trianguli, DBF, ideò ſunt ad illa, vt, OE, ad $\frac{1}{3}$. OE, oſtenſum autem eſt omnia quadrata hyperbolæ, DBF, ad omnia quadrata, AF, eſſe vt compoſitam ex $\frac{1}{2}$.OB, & $\frac{1}{3}$. BE, ad, OE, ergo, ex æquali, omnia quadrata hyperbolæ, DBF, ad omnia quadrata trianguli, DBF, etiã ſi non eſſet circa axim, vel diametrum, BE, ſed tantum in eadem altitudine cum hyperbola, DBF, erunt vt compoſita ex $\frac{1}{2}$. OB, & $\frac{1}{3}$. BE, ad $\frac{1}{3}$. OE, vel vt horum tripla .i. vt compoſita ex ſexquialtera, OB, & ipſa, BE, ad, OE, quod oſtendere opus erat. 24. l. 2.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI duæ ad axim, vel diametrum hyperbolæ ordinatim applicatæ fuerint rectæ lineæ, hyperbolas conſtituentes, ſit autem earum altera regula: omnia quadrata hyperbolæ ab vna earundem conſtitutæ ad omnia quadrata hyperbolæ per aliam conſtitutæ, erunt vt parallelepipe-

dum ſub compoſita ex ſexquialtera tranſuerſi lateris hyperbolarum dictarum, & ſub axi, vel diametro hyperbolæ primò dictæ, & ſub quadrato eiuſdem axis, vel diametri, ad parallelepipedum ſub compoſita ex eiuſdem trãſuerſi lateris ſexquialtera, & axi, vel diametro hyperbolæ ſecundò dictæ, & ſub quadrato eiuſdem axis, vel diametri.

Sint intra curuam hyperbolæ duæ vtcunq; ad axim, vel diametrum, NE, ordinatim ductæ rectæ lineæ, HG, DF, hyperbolas, NHG, NDF, conſtituentes, ſit autem earum altera, vt, DF, ſumpta pro regula, & tranſuerſum eorundem latus, NO, bifariam diuiſum in, B, cui in directũ ſit adiecta, OX, æqualis dimidiæ, ON. Dico ergo omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, eſſe vt parallelepipedũ ſub, XE, & quadrato, EN, ad parallelepipedum ſub, XM, & quadrato, MN. Fiant ergo in baſibus, DF, HG, & circa axes, vel diametros, NM, ME, parallelogramma, AF, CG: Omnia ergo quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, habent rationem compoſitam ex ea, quam habent omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, AF, omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, CG, & omnia quadrata, CG, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG; ſed omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, AF, ſunt vt cõpoſita ex $\frac{1}{2}$. ON, .i. ex, BN, & $\frac{1}{3}$. NE, ad, OE, vel vt iſtorum tripla.ſ. vt, XE, ad triplã, OE. Inſuper omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, CG, habent rationem compoſitam ex ea, quam habet



Defin. 12. l. 1.

Ex antec.

11. l. 2.

bet

bet quadratum, DF, ad quadratum, HG, ideſt rectangulum, OEN, ad rectangulum, OMN, .i. horum tripla, ſcilicet rectangulum ſub tripla, OE, &, EN, ſola, ad rectangulum ſub tripla, OM, & ſola, MN, & ex ratione, EN, ad, NM; tandem omnia quadrata, CG, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, ſunt vt, OM, ad compoſitam ex, BN, & $\frac{1}{3}$. NM, .i. vt tripla, OM, ad, MX, .i. ſumpta, MN, communi altitudine, vt rectangulum ſub tripla, OM, & ſub, MN, ad rectãgulum ſub, XM, MN, ergo omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, habent rationem compoſitam ex ea, quam habet, XE, ad triplam, EO, .i. ſumpta, EN, communi altitudine, ex ea, quam habet rectangulum, XEN, ad rectangulum ſub, NE, & tripla, EO, & ex ea, quam habet rectangulum ſub tripla, OE, & ſub, EN, ad rectangulum ſub tripla, OM, & ſub, MN, & rectangulum ſub tripla, OM, & ſub, MN, ad rectangulũ ſub, MN, & MX, & tandem ex ea, quam habet, EN, ad, NM; porrò iſtæ rationes .ſ. quam habet rectangulum ſub, XE, &, EN, ad rectangulum ſub tripla, OE, &, EN, item quam habet rectangulum ſub tripla, OE, &, EN, ad rectangulũ ſub tripla, OM, &, MN, & quam habet rectangulum ſub tripla, OM, &, MN, ad rectangulum, XMN, conficiunt rationem rectanguli, XEN, ad rectangulum, XMN, quæ ſimul cum ratione, quam habet, EN, ad, NM, conficit rationem parallelepipedi ſub, NE, & rectangulo, NEX, .i. ſub, XE, & quadrato, EN, ad parallelepipedum ſub, NM, & rectangulo, NMX, .i. ſub, XM, & quadrato, MN, ergo omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad oĩa quadrata hyperbolæ, HNG, erunt vt parallelepipedum ſub, XE, & quadrato, EN, ad parallelepipedum ſub, XM, & quadrato, MN, quod oſtendere oportebat.

Corol. 39. & Sch. 40. l. 1.

Ex antec.

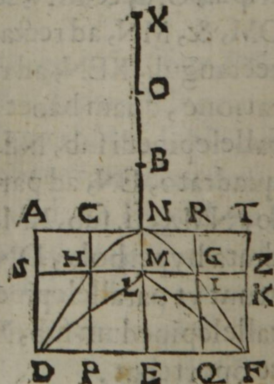
36. l. 1.

THEO-

THEOREMA III. PROPOS. III.

IN eadem antecedentis figura, si producatur, HG, hinc inde vsque ad curuam hyperbolicam, cui incidat in, SZ, iunganturque, DM, MF, regula eadem, DF, retenta; ostendemus omnia quadrata parallelogrammi, SF, ad omnia quadrata frusti hyperbolæ, HDFG, esse vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, &, NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. NO, & $\frac{1}{2}$. ME, & sub, ME: Omnia verò quadrata trianguli, DMF, ad omnia quadrata eiusdem frusti, HDFG, esse vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & tripla, NM, vna cum rectangulo sub composita ex, NX, &, ME, sub, ME.

Sumatur in, ME, vtcunq; punctum, L, & per ipsum regulæ, DF, parallela ducatur, LK, curuam hyperbolicam in, I, secans; Est ergo quadratum, EF, vel quadratum, LK, ad quadratum, LI, vt rectangulum, OEN, ad rectangulum, OLN; est autem parallelogrammum, MF, in eadem basi, & altitudine cum figura, MGFE, punctum, L, sumptum est vtcunque, perq; ipsum regulæ, DF, ducta parallela, LK, repertum est, vt quadratum, KL, ad quadratum, LI, ita esse rectangulum, OEN, ad rectangulum, OLN; quatuor ergo ordinum magnitudines constructæ iuxta has quatuor inuentas magnitudines proportionales, erunt quoq; proportio-



gonales .i. omnia quadrata, MF, ad omnia quadrata figuræ, MGFE, quæ sunt magnitudines primi, & secundi ordinis constructæ iuxta primam, & secundam .s. iuxta quadratum, KL, & quadratum, LI, erunt vt rectangula sub maximis abscissarum, EM, adiuncta, MO, & sub maximis abscissarum, EM, adiuncta, MN, ad rectangula sub omnibus abscissis, EM, adiuncta, MO, & sub omnibus abscissis, EM, adiuncta, MN, quæ sunt magnitudines tertij, & quarti ordinis collectæ iuxta tertiam, & quartam .s. iuxta rectangulũ, OEN, OLN; verum rectangula sub maximis abscissarum, EM, adiuncta, MO, & sub eisdem adiuncta, MN, ad rectangula sub omnibus abscisis, EM, adiuncta, MO, & sub ijsdẽ adiuncta, MN, omnibus recti, vel eiusdem obliqui transitus sumptis, sunt vt rectangulum, OEN, ad rectangulũ sub, OE, &, NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$.ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, ergo omnia quadrata, MF, ad omnia quadrata figuræ, GMEF, vel horum quadrupla .i. omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata frusti, HDFG, erunt vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, &, NM, vna cum rectang. sub cõposita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME. Coroll. 3. 26. l. 2. Corol 31. l. 2.

Quia verò omnia quadrata trianguli, DMF, sunt $\frac{1}{3}$ .omnium quadratorum, SF, ideò ad omnia quadrata frusti, HDFG, erunt vt $\frac{1}{3}$. rectanguli, OEN, ad rectangulum sub, OE, &, NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$.ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, vel vt horum tripla .i. vt rectangulũ, OEN, ad rectangulum sub, OE, & tripla, NM, vna cum rectangulo sub composita ex sexquialtera, ON, .i. ex, MX, &, ME, & sub, ME, quæ ostendere opus erat. 24. l. 2.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

IN eadem antecedentis figura productis, CH, RG, versus basem, DF, cui incidant in, PQ, regula eadem retenta, ostendemus omnia

qua-

Coroll. 1. 26 l. 2.

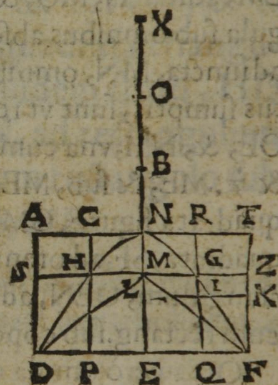
quadrata, SF, ad omnia quadrata frusti, HDFG, demptis omnibus quadratis, HQ, esse vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, EM, & sub composita ex $\frac{1}{3}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO: Omnia verò quadrata trianguli, DMF, ad eadem esse ostendemus, vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub cõposita ex, EX, dupla, NM, & sub, ME.

In antec. Omnia .n. quadrata, SF, ad omnia quadrata frusti, HDF G, ostensa sunt esse, vt rectãgulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, &, NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME: Omnia verò quadrata, SF, ad

9. l. 2. omnia quadrata, HQ, sunt vt quadratum, DF, ad quadratum, PQ, vel

39. & Sch. 40. l. 1. ad quadratum, HG, .i. vt rectangulum, OEN, ad rectangulum, OMN, ergo eadem ad reliquum omnium quadratorũ frusti, DHGF, demptis omnibus quadratis, HQ, erunt vt rectangulum, OEN, ad reliquũ, dempto rectangulo, OMN, à rectangulis sub, OE, MN, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, &

1. 2. Elem. $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, est autem rectangulum sub, OE, MN, æquale rectãgulis sub, OM, MN, & sub, EM, MN, ergo dempto rectangulo, OMN, à rectangulo sub, OE, MN, remanet rectangulum, EMN, ad quod vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, ipsum rectangulũ, OEN, erit vt omnia quad. SF, ad omnia quad. frusti, HDFG, demptis omnibus quadratis, HQ, æquatur autem rectãgulum, EMN, cum rectangulo sub, EM, & sub cõposita ex $\frac{1}{3}$. EM, & $\frac{1}{2}$. NO, rectangulo sub, EM, & sub composita ex $\frac{1}{3}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO, ergo omnia quadrata, SF,



ad

ad omnia quadrata frusti, DHGF, demptis omnibus quadratis, HQ, erunt vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, EM, & sub cōposita ex $\frac{1}{2}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO.

Omnia verò quadrata trianguli, DMF, ad eadem erunt, vt $\frac{1}{3}$. rectanguli, OEN, ad rectangulū sub, EM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO, .i. vt totū rectangulum sub, OEN, ad rectangulum sub, EM, & sub composita ex, EM, tripla, MN, &, NX, .i. sub, EM, & sub composita ex, EX, & dupla, MN, quæ ostendenda erant.

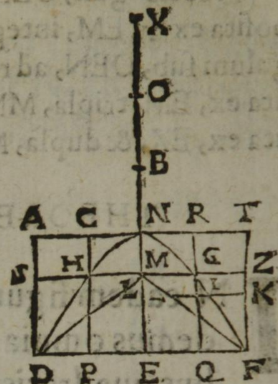
THEOREMA V. PROPOS. V.

IN eadem figura, regula eadem retēta, ostendemus omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG, esse vt parallelepipedum sub composita ex ipsa, XE, EN, & sub quadrato, NE, ad parallelepipedum sub composita ex eadem, XE, cum, EN, NM, & sub quadrato, ME.

Quia enim omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata hyperbolæ, DNF, sunt vt, OE, ad cōpositam ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. NE, ideò per conuersionem rationis, & conuertēdo omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolę, DNF, ad omnia quadrata, AF, erūt vt composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{2}{3}$. NE, ad, OE, .i. sumpta, NE, communi altitudine, vt rectāgulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{2}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectāgulum, OEN. Quoniā verò 2. huius.



verò oĩa quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad oĩa quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, DHGF, habent rationem cõpositam ex ea, quam habent omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, AF, .i. ex ea, quam habet rectangulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{2}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum, NEO; & ex ratione, quam habẽt omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, SF, .i. ex ea, quam habet, NE, ad, EM, & tandem ex ea, quam habent omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnib. quadratis frusti, HDFG, ideò omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, SF, dẽptis omnibus quadratis frusti, HDFG, habebunt rationem compositam ex ea, quam habet rectangulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{2}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectangulũ, NEO, & ex ea, quam habet, NE, ad, EM, & ex ea, quam habent omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG. Quoniam autem omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata frusti, HDFG, sunt vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, NM, cum rectangulo sub cõposita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, ideò omnia quadrata, SF, ad residuum, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG, erunt vt rectangulum, OEN, ad residuum, demptis à rectangulo, OEN, rectangulo sub, OE, NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME; si igitur à rectangulo, OEN, dempseris rectangulum sub, OE, MN, remanebit rectangulum sub, OE, EM, rursus si à rectangulo sub, OE, EM, dempseris rectangulum sub cõposita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME,



Defin. 12. l. 1.

20. l. 2.

3. huius.

idest

.i. si dempseris rectangulum sub, OB, &, ME, remanebit rectangulum sub, BE, EM, à quo si adhuc auferas rectãgulum sub $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, .i. $\frac{1}{3}$. quadrati, ME, habebimus rectangulum, BEM, dempto $\frac{1}{3}$. quadrati, ME, ad quod rectangulum, OEN, erit vt omnia quadrata, SF, ad sui reliquum, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG, ergo omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG, habebunt rationem compositam ex his rationibus .s. ex ea, quam habet rectangulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{2}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum, OEN, & ex ratione, NE, ad, EM, & ex ea, quam habet rectãgulum, OEN, ad rectangulum, BEM, dempto $\frac{1}{3}$. quadrati, ME; harum autem istæ duæ, quam .s. habet rectangulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{2}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum, OEN, & quam habet rectangulum, OEN, ad rectangulum, BEM, dempto $\frac{1}{3}$. quadrati, ME, conficiunt rationẽ rectanguli sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{2}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum, BEM, dempto $\frac{1}{3}$. quadrati, ME, vel, his triplicatis, conficiunt rationem rectanguli sub composita ex tribus, BN, .s. ex, NX, & ter $\frac{2}{3}$. NE, .s. dupla, NE, .s. sub composita ex, NE, &, EX, & sub, NE, ad rectangulum sub tripla, BE, & sub, EM, demptis $\frac{3}{3}$. idest integro dempto quadrato, ME, quia verò tripla, BE, est composita ex, EX, & dupla, EN, si à rectangulo sub composita ex, EX, & dupla, EN, & sub, EM, abstuleris quadratum, ME, .i. rectãgulum sub, ME, &, ME, remanebit rectangulum sub composita ex ipsa, XE, EN, NM, & sub, EM, illas ergo tres componentes rationes in has duas resolutas habemus, scilicet in eam, quam habet rectangulum sub, XEN, integra, & sub, EN, ad rectangulum sub integra, XE, EN, NM, & sub, ME, & in eam, quam habet, NE, ad, EM, quæ duæ rationes componunt rationem parallelepipedi sub, NE, & sub rectangulo integræ, XEN, ductæ in, EN, idest parallelepi- 36.l.2.

 pedi

pedi sub integra, XEN, & quadrato, NE, ad parallelepipedum sub, ME, & rectangulo integræ, XE, EN, NM, ductæ in, ME, .i. ad parallelepipedum sub integra, XE, EN, NM, & quadrato, ME, ergo omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG, erunt vt parallelepipedum sub integra, XEN, & quadrato, NE, ad parallelepipedum sub integra, XE, EN, NM, & quadrato, ME, quod erat ostendendum.

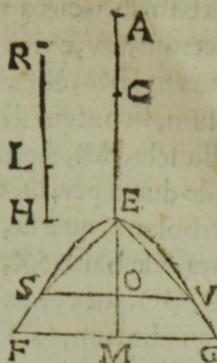
PROBLEMA I. PROPOS. VI.

A Data hyperbola portionem abscindere per lineam ad eiusdem axim, vel diametrum ordinatim applicatam, cuius omnia quadrata, regula propositę hyperbolę basi, ad omnia quadrata triãguli in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum cum portione, siue hyperbola abscissa, existentis, habeant datam rationem, quam oportet esse quidem maioris inæqualitatis, sed tamen minorem sexquialtera.

Sit ergo data hyperbola, FEG, cuius axis, vel diameter, EM, & latus transuersum, CE, cuius sit, AE, sexquialtera, basis, & regula, FG, data ratio, quam habet, HR, ad, RL, maioris inæqualitatis, sed minor sexquialtera, oportet ergo ab hyperbola, FEG, per lineam ad, EM, ordinatim applicatam .i. basi, siue regulæ, FG, parallelam, portionem, siue hyperbolam abscindere, cuius omnia quadrata ad omnia quadrata triaguli in eadem basi, & circa eũdem axim, vel diametrum cum ipsa habeant rationem, quam habet, HR, ad, RL; quia ergo ratio, HR, ad, RL, est minor sexquialtera, erit minor ea, quam habet, AE, ad, EC, & etiam

diui-

diuidẽdo minor ea, quam habet, AC, ad, CE, eandem ergo, quam habet, HL, ad, LR, habebit, AC, ad maiorem, CE, sit illa, CO, & per, O, ducatur, SV, parallela ipsi regulæ, FG, iunganturque, SE, EV: Omnia ergo quadrata hyperbolæ, SEV, ad omnia quadrata trianguli, SEV, sunt vt, AO, ad, OC, quia verò, AC, ad, CO, est vt, HL, ad, LR, cõponendo, AO, ad, OC, erit vt, HR, ad, RL, ergo omnia quadrata hyperbolæ, SEV, ad omnia quadrata trianguli, SEV, erunt vt, HR, ad, RL, .i. in ratione data, quod facere opus erat.

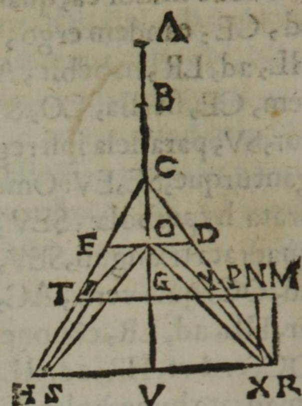


THEOREMA VI. PROPOS. VII.

SI circa datam hyperbolam describãtur asymptoti, eiusdem autem basis vsq; ad asymptotos producatur, quæ sumatur pro regula; Omnia quadrata hyperbolæ ad omnia quadrata trianguli asymptotis, & basi comprehensi, habebunt rationem cõpositam ex ea, quam habet quadratum basis hyperbolæ ad quadratum basis triãguli, & ex ea, quam habet rectangulum sub composita ex sexquialtera transuersi lateris, & axi, vel diametro datæ hyperbolæ, & sub eodem axi, vel diametro, ad rectangulum sub composita ex transuerso latere, & axi, vel diametro eiusdem hyperbolæ; & sub composita ex $\frac{1}{2}$. transuersi lateris, & eodem axi, vel diametro.

Sit

Sit igitur data hyperbola, cuius basis, SX, circa axim, vel diametrum, OV, cuius transuersum latus sit, BO, bifariam in C, diuisum, sit autem illi in directum adiuncta, AB, æqualis, BC, deinde ducta per, O, tangente hyperbolam, quæ sit, ED, cui erit parallela basis, SX, abſcindãtur, EO, OD, ita vt quadratum, EO, & quadratum, OD, ſeorſim ſint æqualia quartæ parti rectanguli ſub, BO, latere tranſuerſo, &



ſub eiuſdem recto latere, ſi ergo iunctis, CE, CD, ipſæ producantur indefinitè verſus baſim, SX, cui productæ occur-
r. 2. Con. rant in punctis, H, R, erunt, CH, CR, aſymptoti datæ hyperbolæ. Dico igitur omnia quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, habere rationem compoſitam ex ea, quam habet quadratum, SX, ad quadratũ, HR, & rectangulum, AVO, ad rectangulum, BVC; iungantur, OS, OX: Omnia ergo quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, habẽt rationem compoſitam ex
Defin. 12. ea, quam habent omnia quadrata hyperbolæ, SOX, ad om-
l. 1. nia quadrata trianguli, SOX, .i. ex ea, quam habet, AV, ad,
1. huius. VB, & ex ea, quam habent omnia quadrata trianguli, SOX,
D Cor. 22 ad omnia quadrata trianguli, HCR, quæ eſt compoſita ex
l. 2. ea, quam habet quadratum, SX, ad quadratum, HR, & ex ea, quam habet, OV, ad, VC, habemus ergo has tres rationes componentes rationem, quam habent omnia quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, ſcilicet eam, quam habet quadratum, SX ad quadratum, HR, & quam habet, AV, ad, VB, & tandem, quam habet, OV, ad, VC, harum autem iſtæ duæ .ſ. quam habet, AV, ad, VB,
6. ſeſ. &, OV, ad, VC, componunt rationem rectanguli, AVO, ad

re-

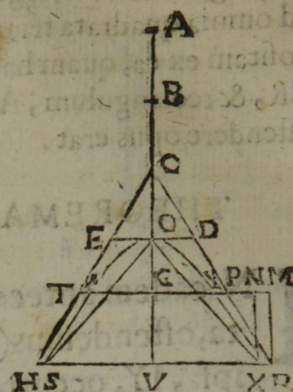
rectangulum, BVC, ergo omnia quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, SX, ad quadratum, HR, & rectangulum, AVO, ad rectangulum, BVC, quod ostendere opus erat.

THEOREMA VII. PROPOS. VIII.

IN eadem anteced. figura, regula eadem retẽta, ostendemus (ducta intra hyperbolã, SOX, ipsa, IY, occurrente asymptotis, CH, CR, in, T, P,) omnia quadrata trapezij, THRP, ad omnia quadrata frusti hyperbolæ, ISXY, esse in ratione composita ex ea, quam habet rectangulũ sub, GP, VR, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, PM, ad quadratum, VX, & ex ea, quam habet rectangulum, BVO, ad rectangulum sub, BV, OG, vna cum rectãgulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. BO, & $\frac{1}{3}$. GV, & sub, GV.

Ducantur per puncta, X, R, XN, RM, rectæ lineæ parallelæ axi, vel diametro hyperbolæ, OV, occurrentes, TP, productæ in, N, M: Omnia ergo quadrata trapezij, GPRV, ad omnia quadrata quadrilinei, GVXY, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata trapezij, 28. 2.
PGVR, ad omnia quadrata, GR, .i. ex ea, quam habet rectangulum sub, PG, VR, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, PM, ad quadratum, VR, & ex ea, quam habent omnia quadrata, GR, ad 9. 2.
omnia quadrata, GX, idest ex ea, quam habet quadratum, RV, ad quadratum, VX; quæ duæ rationes componunt ra- 6. 2.
tionem, quam habet rectangulum sub, GP, VR, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, PM, ad quadratum, VX; & tandem ex ea, quam habent omnia quadrata, GX, ad omnia quadrata, GYXV, 3 huius
.i. ex ea, quam habet rectangulum, BVO, ad rectangulum sub,

ſub, BV, GO, vna cum rectangulo ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$. BO, & $\frac{1}{3}$. GV, & ſub, GV, ergo omnia quadrata trapezij, PGVR, ad omnia quadrata quadrilinei, YGVX, vel eorũ quadrupla .i. omnia quadrata trapezij, THRP, ad omnia quadrata fruſti, ISXY, habebũt rationem compoſitam ex ea, quam habet rectangulũ ſub, GP, VR, cũ $\frac{1}{3}$. quadrati, PM, ad quadratum, VX, & ex ea, quam habet rectangulum, BVO, ad rectangulũ ſub, BV, GO, vna cum rectangulo ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$. BO, & $\frac{1}{3}$. GV, & ſub, GV, quod oſtendere opus erat.



THEOREMA VIII. PROPOS. IX.

Viſa adhuc anteced. figura, exponemus aliter rationem ibi adinuentam tantummodo compoſitam ex duabus, ad vnam ſolum eandem reducentes, probando .ſ. omnia quadrata trianguli, HCR, regula eadem, HR, retenta, ad omnia quadrata hyperbolæ, SOX, eſſe vt cubus, CV, eſt ad parallelepipedum ter ſub, CO, & quadrato, OV, cum cubo, OV.

Nam vt in ſupradicta Propoſit. oſtenſum eſt, omnia qua-
6. huius. drata trianguli, CHR, ad omnia quadrata hyperbolæ, SOX,
conuertendo, habent rationem compoſitam ex ea, quam
habet quadratum, HR, ad quadratum, SX, & rectangulum,
6. l. 2. BVC, ad rectangulum, AVO, quæ eſt compoſita pariter ex
duabus .ſ. ex ea, quam habet, CV, ad, VO, & ex ea, quam

habet,

habet, BV, ad, VA, vt autem, BV, ad, VA, sic est, sumpta, OV, communi altitudine, rectangulum, BVO, ad rectangulum, AVO, quod serua. Sumatur nunc harum rationum componentium ea, quam habet quadratũ HR, ad quadratum, SX, quæ est eadem ei, quam habet quadratum, HV, ad quadratum, VS, quia verò rectangulum, HSR, cum quadrato, SV, est æquale quadrato, HV, ideò quadratum, VS, est excessus, quo quadratum, HV, superat rectangulum, HSR, & quia rectangulum, HSR, est æquale quadrato, EO, ideò, vt quadratum, HV, ad rectangulum, HSR, ita erit idẽ quadratum, HV, ad quadratum, EO, & ita erit quadratum, VC, ad quadratum, CO, quia triangula, CEO, CHV, sunt similia, ergo, per conuersionem rationis, quadratum, HV, ad excessum sui super quadratum, EO, .f. ad quadratum, VS, erit vt quadratum, VC, ad excessum sui super quadratum, CO, .i. ad rectangulũ bis sub, CO, OV, cum quadrato, OV, .i. ad rectangulum semel sub, BO, OV, cum quadrato, OV, .i. ad integrum rectangulũ BVO; erit ergo, vt quadratum, HV, ad quadratum, VS, ita quadratum, CV, ad rectangulum, BVO, hæc ergo ratio, quam nempè habet quadratum, CV, ad rectangulum, BVO, sumpta vice eius, quam habet quadratum, HV, ad quadratum, VS, vel quadratum, HR, ad quadratum, SX, (quæ erat vna rationum componentium) componit rationem omnium quadratorum triãguli, HCR, ad omnia quadrata hyperbolæ, SOX, simul sumpta cum ea, quam habet rectangulum, BVO, ad rectangulum, AVO, & cum ea, quam habet, CV, ad, VO; harum autem trium rationum componentium ea, quam habet quadratum, CV, ad rectangulum, BVO, & quam habet hoc rectangulum, BVO, ad rectangulum, AVO, cõponunt rationem quadrati, CV, ad rectangulum, AVO, illas ergo tres in has duas rationes resolutas habemus .f. in eam, quam habet quadratum, CV, ad rectangulum, AVO, & in eam, quam habet, CV, ad, VO, porrò istæ duæ rationes componunt rationem

5.1.L. 5.2.Elem. 10.8.Coll. 4.6.Elem.

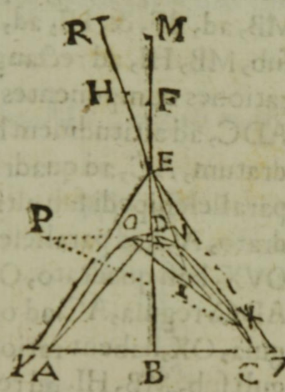
parallelepipedi sub, CV, & quadrato, CV, .i. cubi, CV, ad
36.l.1. parallelepipedum sub, OV, & rectangulo, AVO, .i. parallelepipedi sub, AV, & quadrato, VO, .i. parallelepipedi sub, AO, & quadrato, OV, cum cubo, OV, .i. parallelepipedi ter sub, CO, & quadrato, OV, cum cubo, OV; ergo omnia quadrata trianguli, HCR, ad omnia quadrata hyperbolæ, SOX, erunt vt cubus, CV, ad parallelepipedũ ter sub, CO, & quadrato, OV, cum cubo, OV, quod ostendere opus erat.

THEOREMA IX. PROPOS. X.

SI à centro hyperbolæ duæ intra asymptotos eiusdem ductæ fuerint rectæ lineæ indefinitè productæ, agantur autem intra curuam hyperbolicam parallelæ tangentibus in punctis concursus ductarum linearum, & curuæ hyperbolicæ hinc inde ad eandem productæ, erunt istæ bases hyperbolarum, quarum diametri, vel axes erunt portiones ductarum à centro interceptæ inter ipsas, & earundem hyperbolarum vertices: Dico autem omnia quadrata vnius dictarum hyperbolarum, regula eiusdem basi, ad omnia quadrata alterius, regula quoq; huius basi, habere rationem compositam ex ratione rectanguli sub composita ex sexquialtera transuersi lateris hyperbolæ primò dictæ, & axi, vel diametro eiusdem, & sub composita ex trãsuerso latere, & axi, vel diametro hyperbolæ secundò dictæ, ad rectangulum sub composita ex sexquialtera transuersi lateris hyperbolę secundò dictæ, & axi, vel diametro eiusdem, & sub

composita ex transuerso latere, & axi, vel diametro hyperbolæ primò dictæ; & ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ primò dictæ, basi verò basis eiusdem quadrato ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ secundò dictæ, basiq; pariter eiusdem basis quadrato.

Sit ergo hyperbolæ. ADC, vtcunq; basis, AC, centrum, E, per quod intra eiusdem asymptotos, EY, EZ, ductæ sint, FED B, HEVI, vtcunq; indefinitè productæ, sit tamen altera earum diameter iam expositę hyperbolæ, pro alia hyperbola autem constituenda, ducta pariter sit vtcunq; intra curuam hyperbolicam, & in eandem hinc inde producta ipsa, OX, parallela tāgenti curuam hyperbolicam in puncto, V, in quo ipsam, HI, secat. Dico ergo omnia quadrata hyperbolæ, ADC, regula, AC, ad omnia quadrata hyperbolæ, OVX, regula, OX, habere rationem compositā (sumptis, EF, FM, æqualibus ipsi, ED; &, EH, HR, æqualibus ipsi, EV,) ex ratione rectanguli sub, MB, HI, ad rectangulum sub, RI, FB; & ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ, ADC, & basi quadrato, AC, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, OVX, basi autem (iuncta ipsa, OX,) quadrato, OX. Nam omnia quadrata hyperbolæ, ADC, regula, AC, ad omnia quadrata hyperbolæ, OVX, regula, OX, (iunctis, AD, DC, OV, VX,) sumptis medijs omnibus quadratis triangulorum, ADC, OVX, habent rationem compositam ex ratione omnium Defin. 12. 11.



quadratorum hyperbolæ, ADC, ad omnia quadrata trianguli, ADC, .i. ex ratione, MB, ad, BF, & ex ratione omniũ quadratorum trianguli, ADC, ad omnia quadrata trianguli, OVX, quæ est composita ex ratione altitudinis trianguli, ADC, vel hyperbolæ, ADC, ad altitudinem trianguli, OVX, vel hyperbolæ, OVX, & ex ratione quadrati, AC, ad quadratum, OX, & tandem est composita ex ratione omnium quadratorum trianguli, OVX, ad omnia quadrata hyperbolæ, OVX, .i. ex ea, quam habet, HI, ad, IR, harum autem rationum componentium istæ duæ .s. quam habet, MB, ad, BF, &, HI, ad, IR, componunt rationem rectãguli sub, MB, HI, ad rectangulum sub, RI, FB; aliæ autem duæ rationes componentes .s. quam habet altitudo hyperbolæ, ADC, ad altitudinem hyperbolæ, OVX, & quã habet quadratum, AC, ad quadratum, OX, componunt rationem parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ, ADC, basi quadrato, AC, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, OVX, basi quadrato, OX, ergo omnia quadrata hyperbolę, ADC, regula, AC, ad omnia quadrata hyperbolæ, OVX, regula, OX, habent rationem compositam ex ratione rectanguli sub, MB, HI, ad rectangulum sub, RI, FB, & ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ, ADC, basi quadrato, AC, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, OVX, basi verò quadrato, OX, quod ostendere opus erat.

2. huius.

C Cor. 22. l. 2.

3. huius.

6. l. 2.

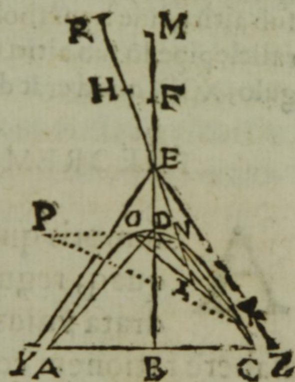
THEOREMA X. PROPOS. XI.

IN eadem antec. figura, iuncta, DV, & à puncto, X, ducta, XP, parallela ipsi, DV, indefinitè producta, à puncto autem, O, ipsa, OP, parallela ei, quæ tangeret hyperbolã, ADC, in puncto, D, quæ indefinitè quoq; producta occurrat

currat

currat ipsi, XP, in puncto, P, suppositoque, BD, esse axim, ostendemus omnia quadrata hyperbolæ, ADC, ad rectangula omnia hyperbolæ, OVX, similia rectangulo sub, XO, OP, habere rationem compositam ex ratione rectanguli sub, MB, HI, ad rectangulum sub, RI, FB, & ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ, ADC, & basi quadrato, AC, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, OVX, basi autem rectangulo sub, XO, OP.

Nam omnia quadrata hyperbolæ, ADC, regula eadem, AC, ad omnia quadrata hyperbolæ, OVX, regula, OX, ostensa sunt habere rationem compositam ex ratione rectanguli sub, MB, HI, ad rectangulum sub, RI, FB, & parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ, ADC, basi quadrato, AC, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, OVX, basi autem quadrato, OX; insuper omnia quadrata hyperbolæ, OVX, ad rectangula omnia eiusdem hyperbolæ similia rectangulo, XOP, regula, XO, sunt vt vnum ad vnum, scilicet vt quadratum, XO, ad rectangulum, XOP, .f. sumpta communi altitudine eiusdem hyperbolæ, OVX, altitudine, vt parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, OVX, basi quadrato, OX, ad parallelepipedum sub eadem altitudine, basi autem rectangulo, XOP, ergo omnia quadrata hyperbolæ, ADC, regula, AC, ad omnia rectangula hyperbolæ, OVX,



In anteč.

OVX,

OVX, ſimilia rectangulo, XOP, regula, OX, erunt in ratione compoſita ex ratione rectanguli ſub, MB, HI, ad rectangulum ſub, RI, FB, & parallelepipedi ſub altitudine hyperbolæ, ADC, & ſub quadrato, AC, ad parallelepipedũ ſub altitudine hyperbolæ, OVX, baſi quadrato, OX, & ex ratione huius parallelepipedi ad parallelepipedum ſub eiuſdem hyperbolæ, OVX, altitudine baſi rectãgulo, XOP, quæ duæ vltimò dictæ rationes componũt rationem parallelepipedi ſub altitudine hyperbolæ, ADC, baſi quadrato, AC, ad parallelepipedum ſub altitudine hyperbolæ, OVX, baſi rectãgulo, XOP, ergo omnia quadrata hyperbolæ, ADC, regula, AC, ad omnia rectangula hyperbolæ, OVX, ſimilia rectangulo, XOP, regula, OX, habebunt rationem compoſitam ex ea, quam habet rectangulum ſub, MB, HI, ad rectangulum ſub, RI, FB, & ex ea, quam habet parallelepipedum ſub altitudine hyperbolæ, ADC, baſi quadrato, AC, ad parallelepipedũ ſub altitudine hyperbolæ, OVX, baſi rectangulo, XOP, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XI. PROPOS. XII.

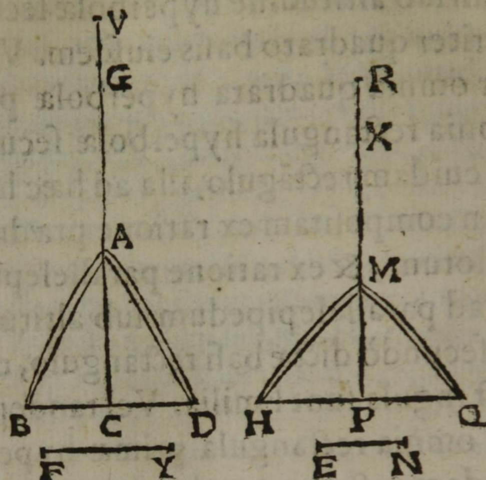
ASſumptis quibuſcunq; hyperbolis, in vnaquaq; regula baſi, oſtẽdemus omnia quadrata vnius ad omnia quadrata alterius, habere rationem compoſitam ex ratione rectãguli ſub compoſita ex ſexquialtera tranſuerſi lateris, & axi, vel diametro hyperbolæ primò dictæ, & ſub compoſita ex tranſuerſo latere, & axi, vel diametro hyperbolæ ſecundò dictæ, ad rectangulum ſub compoſita ex trãſuerſi lateris ſexquialtera, & axi, vel diametro hyperbolæ ſecundò dictæ, & ſub cõpoſita ex tranſuerſo latere, & axi, vel diametro hy-

hyperbolæ primò dictæ, & ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ primò dictæ, basi autem quadrato basis eiusdem, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ secundò dictæ, basi pariter quadrato basis eiusdem. Vel si comparentur omnia quadrata hyperbolæ primò dictæ, ad omnia rectangula hyperbolæ secundò dictæ similia cuidam rectãgulo, illa ad hæc habebunt rationem compositam ex ratione prædictorum rectangulorum, & ex ratione parallelepipedi primò dicti ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ secundò dictæ basi rectangulo, cui omnia dicta rectangula sunt similia. Vel tandem si comparentur omnia rectangula primæ hyperbolæ similia cuidam rectangulo ad omnia rectangula secundæ hyperbolæ similia pariter cuidam rectangulo, illa ad hæc habebunt rationem compositam ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ primò dictæ basi rectangulo, cui omnia eiusdem rectangula sunt similia, ad parallelepipedum sub altitudine secundæ hyperbolæ, basi rectangulo, cui omnia eiusdem rectangula iam dicta sunt similia, & ex ratione, quæ in huius Theorematis supradictis casibus inter illa duo rectangula primò loco exposita fuit.

Sint assumptæ quęcunq; hyperbolæ, BAD, HMQ, circa axes, vel diametros, AC, MP, circa quas sint quoq; triangula, BAD, HMQ, & in basibus, BD, HQ, latus autẽ transversum hyperbolæ, BAD, sit, GA, cuius sexquialtera, VA;

& l...

& latus transuersum hyperbolæ, HMQ, sit, MX, cuius sexquialtera, MR, sint autem expositæ duæ vtcunque rectæ lineæ, FY, EN. Dico omnia quadrata hyperbolæ, BAD, regula, BD, ad omnia quadrata hyperbolæ, HMQ, regula, HQ, habere rationem compositam ex ea, quam habet rectãgulum sub, VC, XP, ad rectãgulum sub, RP, CG, & ex ea, quã habet parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, BAD, & sub quadrato, BD, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, HMQ, basi quadrato, HQ; quod ostẽdemus ad modum Propos. 10. Si verò comparentur omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia rectangula hyperbolę, HMQ, similia rectangulo sub, HQ, EN, ostẽdemus illa ad hæc habere rationem compositam ex ratione primò dicta inter illa rectangula, & ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ, BAD, basi quadrato, BD, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, HMQ, basi rectangulo sub, HQ, EN; hocq; ostendemus iuxta methodum Propos. antecedentis. Si tandem comparẽtur omnia rectangula hyperbolæ, BAD, similia rectãgulo sub, BD, FY, ad omnia rectangula hyperbolæ, HMQ, similia rectangulo sub, HQ, EN, ostendemus propositum de his hoc pacto: Nam omnia rectangula hyperbolæ, BAD, similia rectangulo sub, BD, FY, ad omnia quadrata eiusdem, BAD, sunt vt rectangulum sub, BD, FY, ad quadratum, BD, .i. vt



parallelepipedum ſub altitudine hyperbolæ, BAD, baſi rectangulo ſub, BD, FY, ad parallelepipedum ſub eadem altitudine baſi quadrato, BD: pariter omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia rectangula hyperbolæ, HMQ, ſimilia rectangulo ſub, HQ, EN, habent rationem compoſitam ex ratione rectanguli ſub, VC, XP, ad rectangulũ ſub, RP, GC, & parallelepipedi ſub altitudine hyperbolæ, BAD, & ſub quadrato, BD, ad parallelepipedum ſub altitudine hyperbolæ, HMQ, baſi rectangulo ſub, HQ, EN, ergo, ex æquo, omnia rectangula hyperbolæ, BAD, ſimilia rectangulo ſub, BD, FY, regula, BD, ad omnia rectangula hyperbolæ, HMQ, ſimilia rectangulo ſub, HQ, EN, regula, HQ, habebunt rationem compoſitam ex ratione rectanguli ſub, VC, XP, ad rectangulum ſub, RP, GC, & ex ratione parallelepipedi ſub altitudine hyperbolæ, BAD, baſi rectangulo ſub, BD, FY, ad parallelepipedum ſub eadem altitudine, & baſi quadrato, BD, & ex ratione huius parallelepipedi ad parallelepipedum ſub altitudine hyperbolæ, HMQ, baſi rectangulo ſub, HQ, EN; .i. compoſitam ex ratione parallelepipedi ſub altitudine hyperbolæ, ABD, baſi rectangulo ſub, BD, FY, ad parallelepipedum ſub altitudine hyperbolæ, HMQ, baſi rectangulo ſub, HQ, EN, quæ erant oſtend.

THEOREMA XII. PROPOS. XIII.

SImilium hyperbolarum omnia quadrata, regulis earum baſibus, ſunt in tripla ratione axium, vel diametrorum earundem.

Sint ſimiles hyperbolæ, BAD, HMQ, earum latera tranſuerſa, GA, XM, quorum ſint ſexquialteræ, AV, MR, in directum axibus, vel diametris, AC, MP, baſes, & regulæ ſint, BD, HQ. Dico omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia quadrata hyperbolæ, HMQ, eſſe in tripla ratione eius,

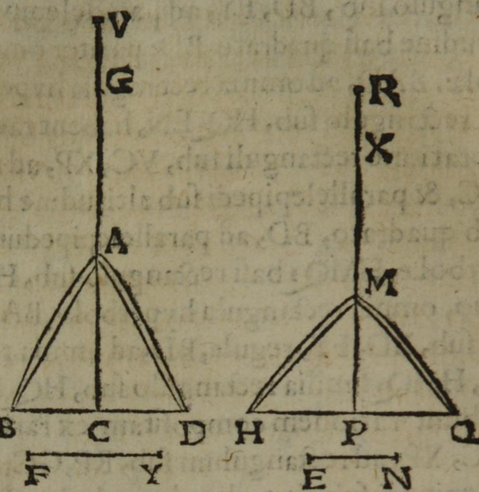
quam habet, AC, ad, MP, iūgantur, BA, AD, HM, MQ. Quoniam ergo hyperbolæ sunt similes basis, BD, ad, CA, erit vt basis, HQ, ad, PM, & sunt anguli inclinationis, AC, ad, BD, & MP, ad, HQ, inter se æquales, ergo triãgula, BAD, HMQ, sunt similia, & ideò oĩa quadrata eorundem, regulis iisdem, erunt inter se in tripla ratione laterum homologorum .i. eius, quam habet, BD, ad, HQ, vel, AC, ad, MP; quia verò quadratum, BC, ad rectangulum, GCA, est vt hyperbolæ, BAD, rectum latus ad transuersum .f. vt rectum latus ad transuersum hyperbolæ, HMQ, quia illæ sunt similes .f. vt quadratũ, HP, ad rectangulum, MPX, ideò quadratum, BC, ad rectangulũ, ACG, erit vt quadratum, HP, ad rectangulum, MPX; quia autem ratio, quam habet, BC, ad, CA, &, BC, ad, CG, componit rationem quadrati, BC, ad rectangulum, ACG, & item ratio, quam habet, HP, ad, PM, &, HP, ad, PX, componit rationem quadrati, HP, ad rectangulum, MPX, harũ autem rationum componentium ea, quam habet, BC, ad, CA, est eadem ei, quam habet, HP, ad, PM, ideò reliquæ cõponentium erunt eædem .f. BC, ad, CG, erit vt, HP, ad, PX, est autem etiam, AC, ad, CB, conuertendo, vt, MP, ad, PH, ergo, ex æquali, & conuertendo, GC, ad, CA, erit vt, XP, ad, PM, & diuidendo, GA, ad, AC, erit vt, XM, ad, MP, & antecedentium dimidia .f. VG, ad, AC, erit vt, RX, ad, MP,

Juxta def. Apoll. 6. Con.

F. Cor. 22. l. 2.

21. primi Con.

Juxta def. Cõmand. & dicta ad Schol. 28. l. 1.



eſt autem eadem, VG, ad, GA, vt eadem, RX, ad, XM, ergo, VG, ad, GC, erit vt, RX, ad, XP, & componendo, VC, ad, CG, erit vt, RP, ad, PX, eſt autem, VC, ad, CG, vt omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia quadrata trianguli, BAD, &, RP, ad, PX, vt omnia quadrata hyperbolæ, HMQ, ad omnia quadrata trianguli, HMQ, ergo omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia quadrata trianguli, BAD, erũt vt omnia quadrata hyperbolæ, HMQ, ad omnia quadrata trianguli, HMQ, &, permutando, omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia quadrata hyperbolæ, HMQ, erunt vt omnia quadrata trianguli, BAD, ad omnia quadrata trianguli, HMQ, .i. in tripla ratione eius, quam habet, AC, ad, MP, quod oſtendere opus erat.

1. huius.

F Cor. 22. l. 2.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIV.

SI exponatur ſemihyperbola, quæ per axem, vel diametrum integræ ſit abſciſſa, habẽs pro baſi dimidiam baſis integræ hyperbolæ, fiat autem parallelogrammum ſub dicta baſi, & axi, vel diametro, in angulo ab eiſdem contento, ſumpta baſi pro regula: Omnia quadrata dicti parallelogrãmi ad omnia quadrata trilinei extra hyperbolam conſtituti, erunt vt idem parallelogrãmum ad ſui reliquum ab eodem dempta ſemihyperbola, vna cum exceſſu, quo dicta ſemihyperbola ſuperat $\frac{1}{3}$. dicti parallelogrammi, cum $\frac{1}{6}$. parallelogrammi ſub tãgente hyperbolam, & axis, vel diametri hyperbolæ ea portione, ad quam reliqua ſit, vt integra axis, vel diameter ad eiuſdem latus tranſuerſum.



Sit ergo axis, vel diameter hyperbolæ, BE, cuius dimidia, BED, latus transuersum, AB, & in angulo, BED, sub, BE, ED, constitutum parallelogrammum, GE, sit autem, vt, EB, ad, BA, ita, EH, ad, HB, & per, H, ducta, HM, parallela ipsi, ED, quæ sumatur, pro regula, ita vt sit cõstitutum parallelogrammum sub, HB, & sub, BG, quæ erit tãgens hyperbolam in puncto, B. Dico igitur omnia quadrata, BD, ad omnia quadrata trilinei, BGD, esse vt, BD, ad sui reliquum, dempto ab eodem semihyperbola, BED, vna cum excessu, quo ipsa superat $\frac{1}{3}$. dicti parallelogrammi, BD, cum $\frac{1}{6}$. BM. Nam omnia qua-

Coroll. 1. 26. l. 2. drata, BD, ad rectangula sub, BD, & semihyperbola, BED, sunt vt, BD, ad ipsam, BED, rectangula verò sub, BD, &,

C. Cor. 23. l. 2. BED, æquantur rectangulis sub, BGD, BED, simul cum omnibus quadratis, BED; ergo omnia quadrata, BD, ad rectangula sub, BGD, BED, cum omnibus quadratis, BED, erunt vt, BD, ad, BED; sunt autem omnia quadrata, BD,

2. huius. ad omnia quadrata, BED, vt, AE, ad cõpositam ex $\frac{1}{2}$. AB, & $\frac{1}{3}$. BE, .i. vt, BE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. BH, & $\frac{1}{3}$. HE, quia, AE, BE, proportionaliter diuiduntur in punctis, B,

5. l. 2. H, .i. vt parallelogrammum, BD, ad cõpositum ex $\frac{1}{2}$. BM, & $\frac{1}{3}$. HD, .i. vt, BD, ad compositum ex $\frac{1}{3}$. BD, & $\frac{1}{6}$. BM, ergo omnia quadrata, BD, ad rectangula sub, BGD, BED, erunt vt, BD, ad excessum, quo semihyperbola superat $\frac{1}{3}$. BD, cum $\frac{1}{6}$. BM, erant autem omnia quadrata, BD, ad rectangula sub, BGD, BED, vna cum omnib. quadratis, BED, vt, BD, ad, BED, ergo omnia quadrata, BD, ad rectangula bis sub, BGD, BED, vna cum omnibus quadratis, BED, erunt vt, BD, ad, BED, vna cum excessu, quo, BED, superat $\frac{1}{3}$. BD, cũ $\frac{1}{6}$. BM, ergo per conuersionem rationis omnia quadrata, BD, ad omnia quadrata, BGD, erunt vt, BD, ad sui reliquum, ab eodem dempta semihyperbola, BED,

& ex-

& excessu, quo eadem superat $\frac{1}{r}$. BD, & $\frac{1}{c}$. BM, quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Hanc Propositionem apposui, vt & nonnullas alias inferius, quæ licet supponant quadraturam hyperbolæ iam notam, vt & ipsæ complete intelligantur, non inutiliter tamen aliqualiter sciri existimaui, vt si alicuius industria illius quadratura in lucem prodeat, illicò & hic apposita nota fiant; vel è conuersò, vt per hæc aliquando adinuenta statim illius quadratura nobis innotescat; vnde cum sciemus, quam rationem habeat, BD, ad semihyperbolam, BED, apprehendemus statim, quam rationem habeant omnia quadrata, BD, ad omnia quadrata trilinei, BGD: Vel è contra, si quando notificabimus, quam rationem habeant omnia quadrata, BD, ad omnia quadrata trilinei, BGD, statim compertum habebimus, quam rationem habeat, BD, ad semihyperbolam, BED, & eius quadratura nota reddetur.

THEOREMA XIV. PROPOS. XV.

SI parallelogrammum, & hyperbola fuerint in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum, regula basi. Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata figuræ compositæ ex hyperbola, & alterutro trilineorum extra hyperbolam constitutorum, demptis omnibus quadratis assumpti trilinei, erunt vt dictum parallelogrammum ad inscriptam hyperbolam.

Sit hyperbola, CBD, in basi, CD, circa axim, vel diametrum, BE, eius latus transuersum, AB, in eadem autem basi, CD, & circa eundem axim, vel diametrum, BE, sit paral-

rallelogrammum, FD, regula, verò, CD. Dico ergo omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata figuræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, alterutrius ex duobus, BFC, BGD, esse vt, FD, ad hyperbolam, CBD, quod patet nam, CBD, est figura qualem postulat Prop. 29. Lib. 3. est enim, BE, communis axis, vel diameter, FD, parallelogrammi, & hyperbolæ, CBD, vnde patet propositum.

THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

IN eadem anteced. Propos. figura, si producatur, CD, vtcunq; in, M, & compleatur parallelogrammum, HC, regula, CM: Omnia quadrata, FM, demptis omnibus quadratis, GM, ad omnia quadrata figuræ, HBCM, demptis omnibus quadratis figuræ, HBDM, erunt vt, FD, ad hyperbolam, CBD.

Patet hoc Theor. nam, CBD, est figura, qualem postulat Prop. 30. Lib. 3. quia, BE, est communis axis, vel diameter, parallelogrammi, FD, & hyperbolę, CBD, vnde &c.

COROLLARIVM.

Hinc habetur omnia quadrata, FD, ad omnia quad. figura, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, eße vt omnia quadrata, FM, demptis omnibus quadratis, GM, ad omnia quadrata figura, HBCM, dẽptis omnibus quadratis fig. HBDM, quia vtraq; sunt, vt, FD, ad hyperbolam, CBD.

THEO-

THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

IN eadem Prop. 15. figura si intelligamus ductam vtcunq; axi, vel diametro, BE, parallelam, RS, fiat autem, vt omnia quadrata, FE, ad omnia quadrata semihyperbolæ, BCE, regula, CD, .i. vt, AE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$.AB, & $\frac{1}{3}$.BE, ita quadratum, CE, ad quadratum, EI, & vt, FE, ad semihyperbolã, BCE, ita esse supponatur, CE, ad, EV, vbicunq; cadat punctum, V. Dico omnia quadrata, FS, ad omnia quadrata figuræ, RBCS, regula, CD, esse vt quadratum, CD, ad quadratum, SE, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, ES.

Omnia .n. quadrata figuræ, RBCS, secantur per, BE, in omnia quadrata, BS, in omnia quadrata semihyperbolæ, BCE, & in rectangula bis sub, BCE, & sub, BS, ad horum ergo singula comparemus omnia quadrata, FS; hæc igitur ad omnia quadrata, BS, sunt vt quadratum, CS, ad quadratum, SE, pariter omnia quadrata, FS, ad omnia quadrata, FE, sunt vt quadratum, SC, ad quadratum, CE, omnia verò quadrata, FE, ad omnia quadrata, BCE, sunt vt quadratum, CE, ad quadratum, EI, ergo, ex æquali, omnia quadrata, FS, ad omnia quadrata, BCE, erunt vt quadratum, CS, ad quadratum, EI; quod serua. Item omnia quadrata, FS, ad rectangula sub, FE, ER, sunt vt quadratum, CS, ad rectangulum, CES, rectangula verò sub, FE, ER, ad rectangula sub, BCE, ER, sunt vt, FE, ad, BCE, .i. vt, CE, ad, VE, .i. sumpta, ES, communi altitudine, vt rectangulum, CES, ad rectangulum, VES, ergo, ex æquo, omnia quadrata, FS, ad rectangula sub, BCE, ER, erunt vt quadratum, CS, ad

D. Cor. 23 l. 2.

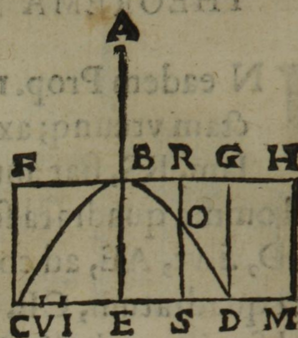
14. l. 2.

Coroll. 1. 26. l. 2.

re-

rectangulum, VES, ad eadem verò bis sumpta, vt quadratum, CS, ad rectangulum bis sub, VE S; ergo, consequentibus simul collectis, omnia quadrata, FS, ad omnia quadrata, BS, ad omnia quadrata, BCE, & ad rectãgula bis sub, BCE, ER; idest ad omnia quadrata figuræ, RBCS, erũt vt quadratum, CS, ad quadratum, SE, quadratum, EI, & rectãgulum bis sub, VE, ES; qua methodo similiter ostendemus omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata figuræ, GBCD, esse vt quadratum, CD, ad quadratum, DE, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, ED; & similiter omnia quadrata, FM, ad omnia quadrata figuræ, HBCM, esse vt quadratum, CM, ad quadratum, ME, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, EM, quod ostendere opus erat.

D. Cor. 23 l. 2.



THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

IN eadem Prop. 15. figura ostendemus omnia quadrata figuræ, HBCM, demptis omnibus quadratis figuræ, HBDM, regula eadem retẽta, ad omnia quadrata figuræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, esse vt composita ex, CM, MD, ad, DC.

Hoc Theorema demonstrabitur methodo Sect. 2. Corollarij 29. Prop. 34. Lib. 3. quod similiter quacunq; figura existente, CBD, dummodo, BE, sit communis axis eius, &, FD, facilè colligemus.

THEO-

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

IN eadem Prop. 15. figura ostendemus omnia quadrata, BCE, regula, CD, ad omnia quadrata figuræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, esse vt quadratum, IE, ad rectangulum sub, CD, & dupla, VE.

Nā omnia quadrata, BCE, ad omnia quadrata, FE, sunt vt quadratum, IE, ad quadratum, EC, item omnia quadrata, FE, ad omnia quadrata, FD, sunt vt quadratum, EC, ad quadratum, CD, & tandem omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata figuræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, sunt vt, FD, ad hyperbolam, CBD, .i. vt, CE, ad, EV, vel vt, CD, ad duplam, VE, vel vt quadratum, CD, ad rectangulum sub, CD, & dupla, VE, ergo, ex æquali, omnia quadrata semihyperbolæ, BCE, ad omnia quadrata figuræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, erunt vt quadratum, EI, ad rectangulum sub, CD, & dupla, VE, quod erat demonstrandum.

9. l. 2.

15. huius.

COROLLARIVM.

Qvia verò omnia quadrata figuræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, ad omnia quadrata fig. HBCM, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMD, ostensa sunt esse, vt, CD, ad, DMC, .i. sumpta communi altitudine dupla, VE, vt rectangulum sub, CD, & dupla, VE, ad rectangulum sub, CMD, & dupla, VE, ideò etiam, ex æquali, omnia quadrata, BCE, ad omnia quadrata figuræ, HBCM, demptis omnibus quadratis figuræ, BHMD, erunt vt quadratum, EI, ad rectāgulum sub, CMD, & dupla, VE.

18. huius.

SCHOLIVM.

HÆc, & similia possumus circa hyperbolam, eiusque portiones contemplari; quorum plurima Lectoris industriæ examinanda relinquo, tum ad nimiam prolixitatem euitandam, tum etiam, quia hæc Theoremata minus fortè reliquis iucunda erunt, cum completa eorum notitia in suppositione eiusdem hyperbolæ quadratura deficiat; si quis tamen adhuc voluerit alia circa eandem contemplari, methodum tenere poterit Lib. 2. & 3. à me prosequutam, mihi verò post hyperbolarum speculationem ad oppositas sectiones, & coniugatas Apollonij opportunè videtur transeundum.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

SI ad axim, vel diametrum vtriusq; oppositarum sectionum ordinatim applicentur rectæ lineæ in easdem terminatę, ita vt abscissæ per easdē ab axibus, vel diametris versus vertices sint æquales, erunt istæ applicatæ parallelogrāmi opposita latera, quod parallelogrammum si cōpleatur, regula applicatarum altera sumpta, omnia quadrata parallelogrammi cōstituti ad reliquum, demptis ab ijsdem omnibus quadratis oppositarū hyperbolarum iam per dictas ordinatim applicatas constitutarum, erunt vt rectangulum sub composita ex transuerso latere, & axi, vel diametro alterutrius oppositarum hyperbolarum, & sub composita ex hoc axi, vel diametro, & $\frac{1}{2}$. transuersi lateris, ad rectangulum bis sub $\frac{1}{2}$. transuersi lateris, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. eiusdem transuersi lateris,

& axi, vel diametro alterutrius oppositarum hyperbolarum, cum $\frac{2}{3}$. quadrati eiusdem axis, vel diametri.

Sint oppositæ sectiones, AMC, BND, quarũ latus transuersum sit, NM, communis axis, vel diameter earundem, ad quam hinc inde productam ordinatim applicẽtur, BD, AC, in sectiones terminatæ, abscindentes versus vertices, N, M, axes, vel diametros, FN, ME, hyperbolarũ, BND, AMC, (quas pariter oppositas voco) quæ sint inter se æquales, junganturque, BA, DC, & sit, O, cẽtrum oppositarum sectionum, BND, AMC: Quoniam ergo, FN, ME, sunt æquales, erunt etiam æquales, BD, AC, & sunt æquidistantes, quia ad eandem diametrum, vel axim, FE, sunt ordinatim applicatæ, ergo, BA, DC, erunt æquidistantes, &, BC, parallelogrammum. Dico ergo (regula sumpta altera applicatarum, AC, BD, vt, AC,) omnia quadrata, BC, ad reliquum eorundem demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, BND, AMC, esse vt rectangulũ, NEO, ad rectangulum, NOE, bis, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, EM. Ducãtur per, M, O, puncta parallelæ, AC, ipsæ, VS, TR, igitur, TR, tanget sectionem, AMC, & sunt parallelogramma, TC, VC, VD: Omnia ergo quadrata parallelogrammi, VC, ad omnia quadrata hyperbolæ, AMC, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, VC, ad omnia quadrata, TC, .i. ex ratione, OE, ad, EM, & ex ratione omnium quadratorum, TC, ad omnia quadrata hyperbolæ, AMC, idest ex ea, quam habet, NE, ad compositam ex,



Elicitur ex 19 Pri. Con.

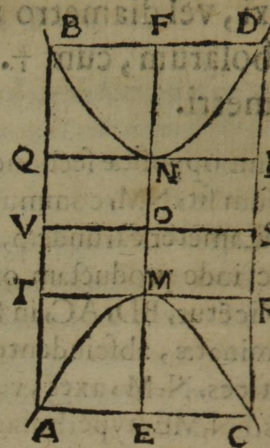
17 Primi Con

Defin. 12. l. 1.

10 l. 2.

1. huius.

OM, & $\frac{1}{3}$. ME, istæ duæ rationes autem .s. quam habet, OE, ad, EM, &, NE, ad compositam ex, OM, & $\frac{1}{3}$. ME, componunt rationem rectanguli sub, NE, EO, ad rectãgulum sub, EM, & sub composita ex, OM, & $\frac{1}{3}$. ME, ergo omnia quadrata, VC, ad omnia quadrata hyperbolæ, AMC, sunt vt rectangulum, NEO, ad rectangulum sub, EM, & sub composita ex, OM, & $\frac{1}{3}$. ME, quod est æquale rectangulis sub, OM, &, ME, & sub $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, .i. rectangulo, OME, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, ME; quia verò rectangulum, NEO, æquatur rectangulo, NOE, cum quadrato, OE, quadratũ verò, OE, æquatur quadratis, EM, MO, cum rectangulis bis sub, EMO, ideò si ab his dempseris semel rectangulum, EMO, remanebit de quadrato, OE, rectangulum, EMO, cũ quadratis, EM, MO, rursus si dempseris $\frac{1}{3}$. quadrati, EM, à quadrato, EM, remanebunt $\frac{2}{3}$. quadrati, EM, rectangulum, EMO, cum quadrato, MO, rectangulũ verò, EMO, cum quadrato, OM, æquatur rectangulo, EOM, vel, EON, quod collectum simul cum $\frac{2}{3}$. quadrati, EM, est residuum, quod remanet detracto rectangulo, EMO, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, EM, à quadrato, EO, ergo detracto rectangulo, EMO, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, EM, à quadrato, EO, iuncto rectangulo, EON, .i. à rectangulo, NEO, remanent duo rectangula, NOE, cũ $\frac{2}{3}$. quadrati, ME; quia ergo ostensum est omnia quadrata, VC, ad omnia quadrata hyperbolæ, AMC, esse vt rectangulum, NEO, ad rectangulum, OME, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, ME, ideò, per conuersionem rationis, omnia quadrata, VC, ad reliquum, demptis ab ijsdem omnibus quadratis hyperbolæ, AMC, erunt vt rectangulum, NEO, ad rectangulum bis sub, NOE, cum $\frac{2}{3}$.



6. l. 2.

4. Sec. Elem.

qua-

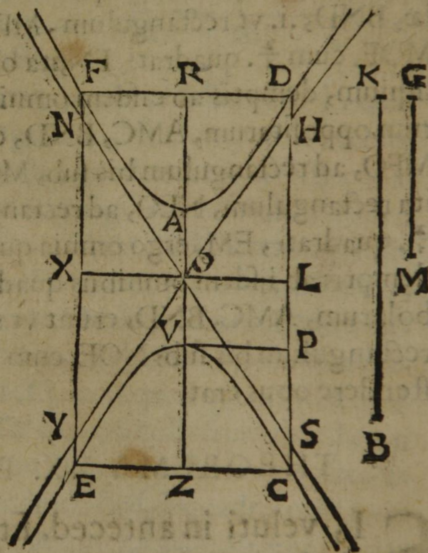
quadrati, EM. Eodem pacto, si ducamus per, N, ipsam, QP, parallelam ipsi, BD, quæ erit tangens sectionem, BND, in puncto, N, ostendemus omnia quadrata, BS, ad reliquum, deptis omnibus quadratis hyperbolæ, BND, (sumptis medijs omnibus quadratis, BP,) esse vt rectangulum, MFO, ad rectangulum bis sub, MOF, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, FN, .i. vt rectangulum, NEO, ad rectangulum bis sub, NOE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, EM, nam, EM, est æqualis, NF, & ideò etiam, EN, æqualis, MF, &, EO, pariter est æqualis ipsi, OF. Tandem vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia .i. vt omnia quadrata, BS, ad reliquum, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, BND, .i. vt rectangulum, MFO, ad rectangulũ bis sub, MOF, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, FN, ita omnia quadrata, BC, ad reliquum, demptis ab eisdem omnibus quadratis hyperbolarum oppositarum, AMC, BND, est autem, vt rectãgulum, MFO, ad rectangulum bis sub, MOF, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, FN, ita rectangulum, NEO, ad rectangulum bis sub, NOE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, EM, ergo omnia quadrata, BC, ad reliquum demptis ab ijsdem omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, AMC, BND, erunt vt rectangulum sub, NEO, ad rectangulum bis sub, NOE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ME, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

SI, veluti in anteced. sit parallelogrammum, habens opposita latera, quæ sint ad diametrum trãsuersam oppositarum sectionum ordinatim applicata, quæq; oppositarum hyperbolarum sint bases, insuper describantur earũ asymptoti, & regula sit latus transuersum, cõstituti parallelogrammi omnia quadrata ad omnia quadrata figuræ, quæ cõtinetur lateribus parallelogrammi

mi iam dicti, lateri transuerso parallelis, & portionibus oppositarum sectionum inter eadem latera comprehensis, erunt vt quadratum vniuscuiusuis laterum dicti parallelogrammi lateri transuerso æquidistantiũ ad quadratũ lateris transuersi, vna cũ ÷. quadrati portionis dicti lateris eiusdẽ parallelogrammi, quæ inter asymptotos inclusa manet.

Sint oppositæ sectiones, FAD, EVC, quarum latus transuersum, AV, centrum, O, per quod transeant earũ asymptoti, YOH, NOS, sit autem, veluti in anteced. Prop. constitutũ parallelogrammum, FC, cuius opposita latera, FD, EC, sint ad axim, vel diametrũ, AV, in eadem productam, ordinatim applicata, erunt, DC, FE, ipsi, AV, æquidistãtes, sint earũ portiones inter asymptotos cõclusæ, HS, NY, regula sit, AV. Dico ergo omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, idest figuræ conclusæ inter latera, FE, DC, & oppositarũ sectionũ portiones inter eadem manentes, quæ sunt, FAD, EVC, esse vt quadratum, DC, vel, FE, ad quadratum, AV, cum ÷. quadrati, HS, vel, NY. Per puncta ergo, O, V, ducantur, XL, VP, ad ipsam, AV, ordinatim applicatæ, erit igitur, XL, secunda diameter, &, VP, tanget sectionẽ, EVC. Quoniam



niam ergo rectangulum, HCS, æquatur quadrato, OV, idest quadrato, LP, rectangulum verò, HCS, æquatur rectangulo, LSC, bis vna cum quadrato, SC, ideò rectangulũ, LSC, bis vna cum quadrato, SC, erit æquale quadrato, LP; eodem pacto si intelligamus ipsi, LC, æquidistantem vtcunq; ductam intra parallelogrammum, OP, vsq; ad sectionem, VC, productam, ostendemus rectangulum bis sub eius portionibus inter, OL, OS, & inter, OS, & sectionem, VC, conclusis, vna cum quadrato eius, quæ inter, OS, & sectionem, VC, clauditur, æquari quadrato eius, quæ manet inter, OL, VP, & sic de reliquis cõsimiliter sumptis; vnde patebit tandem rectangula sub triangulo, LOS, & figura, OVCS, bis sumpta, vna cum omnibus quadratis figuræ, OVCS, æquari omnibus quadratis, OP, regula, AV, iam suppositis, quia ergo omnia quadrata, CO, ad omnia quadrata, OP, sunt vt quadratum, ZO, ad quadratum, OV, ideò pariter omnia quadrata, OC, ad rectangula sub triangulo, LOS, & figura, OVCS, bis, vna cũ omnibus quadratis figuræ, OVCS, erunt vt quadratum, ZO, ad quadratum, OV; quod seruã.

11. Secundi Con.

9. l. 2.

Insuper omnia quadrata, CO, ad omnia quadrata parallelogrammi, SO, si compleretur, essent vt quadratum, CL, ad quadratum, LS, sunt autem omnia quadrata trianguli, OLS, $\frac{1}{3}$. omnium quadratorum parallelogrammi, SO, ergo omnia quadrata, CO, ad omnia quadrata trianguli, LOS, erunt vt quadratum, CL, ad $\frac{1}{3}$. quadrati, LS; & quoniam ostensum est omnia quadrata, CO, ad rectangula bis sub triangulo, LOS, & figura, OVCS, vna cum omnibus quadratis figuræ, OVCS, esse vt quadratum, ZO, vel, CL, ad quadratum, OV, ideò omnia quadrata, CO, ad rectangula bis sub triangulo, LOS, & figura, OVCS, vna cum omnibus quadratis tum figuræ, OVCS, tum trianguli, OLS, .i. omnia quadrata, CO, ad omnia quadrata figuræ, OLCV, erunt vt quadratum, CL, ad quadratum, OV, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, LS, & antecedentium dupla .s. omnia quadrata, XC, ad-

D. Cor. 23. l. 2.

10. l. 2.

ad omnia quadrata figuræ, EVCLX, erunt vt quadratũ, CL, ad quadratum, OV, cũ $\frac{1}{3}$. quadrati, LS, & adhuc isto-
9. l. 2. rum quadrupla .s. omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, erunt vt quadratũ, CL, ad quadratum, OV, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, LS, vel vt istorum quadrupla, scilicet, vt quadratum, CD, ad quadratum, AV, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HS, vel, NY, quod ostendere opus erat.

Aliter supradictam rationem explicare.

Dico omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, esse vt quadratum, RZ, compositæ ex transuerso latere, AV, & axibus, vel diametris oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad quadratum, AV, vna cum rectangulo sub, AZ, & sexquitertia, ZV. Nam ostensum est eadem esse, vt quadratum, CL, vel, ZO, ad quadratum, OV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, LS, & quoniam rectangulum, CSD, cum qua-
5. Sec. Ele. drato, SL, est æquale quadrato, CL, vel, ZO, rectangulum
Elicitur ex 11. sec. Con. auxilio 16. pri. Con. autem, CSD, est æquale quadrato, OV, ideò quadratũ, LS, erit æquale reliquo quadrati, ZO, dempto quadrato, OV, .i. erit æquale rectangulo sub, OVZ, bis, vna cum quadrato, VZ, .i. rectangulo sub, AVZ, semel cum quadrato, VZ, .i. rectangulo sub, AZV, & ideò $\frac{1}{3}$. quadrati, LS, erit æquale $\frac{1}{3}$. rectanguli sub, AZ, ZV, .i. erit æquale rectãgulo sub, AZ, & $\frac{1}{3}$. ZV, & ideò omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, erunt vt quadratum, ZO, ad quadra-

dra-

dratum, OV, cum rectangulo ſub, AZ, & $\frac{1}{3}$. ZV, .i. vt horum quadrupla, nempè, vt quadratum, RZ, ad quadratum, AV, cum rectangulo ſub, AZ, & $\frac{4}{3}$. ZV, .i. ſub, AZ, & ſexquitertia, ZV, quæ ratio ſic proponebatur explicanda, quęque, vt libet, retineri poterit.

COROLLARIVM.

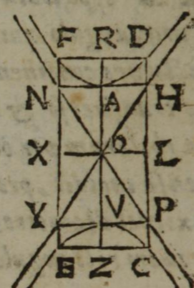
Hinc patet quadratum dimidiæ eius, quæ lateri tranſuerſo oppoſitarum ſectionum æquidiſtanter ducitur, ſubtenditurq; angulo, qui deinceps eſt angulo ſub aſymptotis comprehenſo. ſectiones continenti, æquale eſſe rectangulo ſub compoſita ex latere tranſuerſo. & axi, vel diametro alterutrius conſtitutarum hyperbolarum per ordinatim applicatas à punctis, quibus dicta ſubtenſa incidit, producta, ipſis oppoſitis ſectionibus. & ſub eodem axi, vel diametro, quod patet, veluti oſtenſum eſt quadratum, SL, æquari rectangulo, AZV.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII.

SI per vertices oppoſitarum ſectionum rectæ lineæ ordinatim ad eorum axim, vel diametrum applicentur vſque ad aſymptotos productæ, quarum extrema ad eaſdem partes ſumpta iungantur rectis lineis, iungenteſq; vſq; ad oppoſitas ſectiones producantur, erunt iſtæ parallelogrammi oppoſita latera, quod parallelogrãmum ſi compleatur, regula exiſtente latere tranſuerſo: Omnia quadrata conſtituti parallelogrãmi erunt ſexquialtera omnium quadratorum figuræ comprehenſæ ſub lateribus dicti parallelogrammi lateri tranſuerſo æquidiſtãtibus, & ſub oppoſitarum

ectionum portionibus inter eadem latera cõclusis: Omnia verò quadrata dictæ figuræ erunt quadrupla omnium quadratorum triangulorum, qui sub asymptotis, & ijsdem inclusis portionibus laterum parallelogrammi, transuerso lateri æquidistantium continentur.

Sint oppositæ sectiones, FAD, EVC, quarum latus trãsuersum sit, AV, centrum, O, asymptoti indefinitè producti, NP, HY, per puncta autem, AV, sint ductæ ordinatim, NH, YP, productæ vsq; ad asymptotos, in punctis, N, H, Y, P, ipsis incidentes, quæ sectiones tangent, deinde iunctis, NY, HP, producantur ipsæ iungentes vsq; ad sectiones illis in punctis, F, E, C, D, occurrentes, iunganturque, FD, EC, & per, O, ad ipsam,



37. Secun. Con. AV, ordinatim applicetur, XL, incidens, FE, in, X, &, DC, in, L, quæ erit secunda diameter, & producatur, AV, indefinitè incidens ipsis, FD, EC, in punctis, R, Z, erit ergo, FC, parallelogrammum, nam rectãgulum,
31. Secun. Con. YFN, .i. rectangulum, ENF, est æquale quadrato, AO, idest rectangulo, CHD, item quadratum, NX, est æquale quadrato, HL, & ideò rectangulum, ENF, cum quadrato, NX,
5 Sec Ele. .i. quadratum, XF, erit æquale rectangulo, CHD, cũ quadrato, LH, .i. quadrato, LD, & ideò, XF, erit æqualis ipsi, LD, & eius dupla FE, æqualis duplæ, CD, & eidem parallela, vnde, FD, erit, EC, parallela, & ambæ ordinatim ad axim, vel diametrum, RZ, ordinatim applicatæ, & ideò in, R, Z, bifariam sectæ, &, FC, erit parallelogrammum, sit regula latus transuersum, AV. Dico nunc omnia quadrata parallelogrammi, FC, esse sexquialtera omnium quadratorum figuræ, FADCVE; & hęc esse quadrupla omnium quadra-

dra-

dratorum triangulorum, NOY, HOP; nam omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, ostensa sunt esse, vt quadratum, DC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, HP, est autem quadratum, HP, æquale quadrato, AV, & ideò sunt, vt quadratum, DC, ad quadratum, HP, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, HP, vel vt quadratum, RZ, ad quadratũ, AV, cum $\frac{1}{2}$: quadrati, AV. Producantur nunc asymptoti, NP, HY, versus, EC, cui productæ incidant in S, I, est ergo rectangulum, SEI, æquale quadrato, YV, .i. quadrato, EZ, & ideò rectangulum, SEI, cum quadrato, EZ, duplũ est quadrati, EZ, vel quadrati, YV, est autem rectangulũ, SEI, cum quadrato, EZ, æquale quadrato, SZ, & ideò quadratũ, SZ, duplum est quadrati, YV, est autem, vt quadratum, SZ, ad quadratum, YV, ita quadratum, ZO, ad quadratum, OV, ergo quadratum, ZO, erit duplum quadrati, OV, vel eorum quadrupla .s. quadratum, ZR, duplum quadrati, AV; quia verò dictum est omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, esse vt quadratum, RZ, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, AV, .i. vt quadratum, RZ, ad $\frac{3}{2}$. quadrati, AV, & est quadratum, RZ, duplũ quadrati, AV, ideò quadratum, RZ, erit $\frac{4}{2}$. quadrati, AV, ergo quadratũ, RZ, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, AV, erit vt $\frac{4}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. .i. vt 6. ad 4. .i. in ratione sexquialtera, ergo omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, erunt in ratione sexquialtera.

21. huius.

11. Secun. Con.

Igitur conuertendo omnia quadrata figuræ, FADCVE, ad omnia quadrata, FC, erunt in ratione subsexquialtera, .i. vt 4. ad 6. sunt autem omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata, NP, vt quadratum, ZR, ad quadratum, AV, idest dupla .i. vt 6. ad 3. & omnia qnadrata, NP, sunt tripla omnium quadratorum triangulorum, NYO, OHP, .i. sunt ad illa, vt 3. ad 1. ergo, ex æquali, omnia quadrata figuræ, FADCVE, ad omnia quad. triangulorum, NYO, OHP, erunt vt 4. ad 1. .i. eorum quadrupla, quæ erant ostendenda.

COROLLARIVM I.

QVoniam verò in Propos. antec. ostensum est, ac in eius figura, omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, esse vt quadratum, DC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HS, & quia omnia quadrata, ZL, ad omnia quadrata trianguli, OSL, vel eorum quadrupla.s.omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata trianguli, SOH, ostensa sunt esse, vt quadratum, CL, ad $\frac{1}{3}$. quadrati, LS, vel vt quadratum, CD, ad $\frac{1}{3}$. quadrati, HS, & sic eorum dupla.s. vt quadratum, LC, ad $\frac{1}{3}$. quadrati, SH, ita omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata triangulorum, NOY, HOS, erant autem omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, vt quadratum, DC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HS, ergo omnia quadrata, FC, ad reliquum, demptis omnibus quadratis triangulorum, NOY, HOS, ab omnibus quadratis figuræ, FADCVE, erunt vt quadratum, DC, ad quadratum, AV; & ideò in præsenti Propos. omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FAD.CVE, demptis ab ijsdem omnibus quadratis triangulorum, NOY, HOP, erunt vt quadratum, RZ, ad quadratum, AV, .i. dupla.

COROLLARIVM II.
Ex præcedenti deductum.

PAtet etiam nos posse inuenire parallelogrammum circumscriptum sectionibus oppositis, veluti, FC, idest ita quod eius duo opposita latera sint bases oppositarum hyperbolarum & reliqua duo lateri transuerso parallela, quod sumatur pro regula, ita vt quam, vt omnia quadrata descripti parallelogrammi ad omnia quadrata figuræ dictis lateribus, quæ transuerso lateri æquidistant, & ab ijsdem sectionum oppositarum inclusis portionibus comprehensæ, demptis omnibus quadratis triangulorum sub asymptotis, & ab ijs inclusis portionibus laterum parallelogrammi transuerso lateri æquidistantium, habeant datam rationem, dummodo ea sit maio-

ris

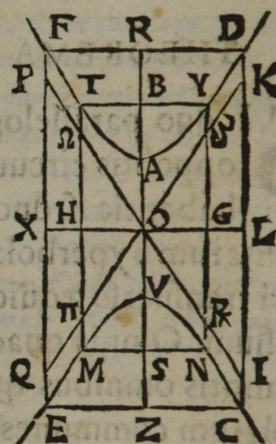
ris inæqualitatis: Sit in figura Propoſ. 21. data ratio maioris inæqualitatis, quam habet, KB, ad, GM, & ſupponatur ductā fuiſſe, FE, æquidiſtantem lateri tranſuerſo, AV, ita vt quadratum, FE, ad quadratum, AV, ſit vt, KB, ad, GM, & conſtructā fuiſſe figuram, velut ibi factum eſt, patet igitur, quia omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, ſunt vt quadratum, FE, ad quadratum, AV, ex Coroll. antec. demptis tamen ab omnibus quadratis dictæ figuræ, omnibus quadratis triāgulorum, NOT, HOS, quod ideò ad eadem erunt in ratione data .ſ. in ea, quam habet, KB, ad, GM.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXIII.

SI duo parallelogramma vtcunq; ſectionibus oppoſitis circumſcripta fuerint modo ſolito, habentia .ſ. duo oppoſita latera, quæ ſint oppoſitarum hyperbolarum baſes, & reliqua duo lateri tranſuerſo æquidiſtātia, regula vna dictarum baſium: Omnia quadrata vnius parallelogrammi, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum communes cum eo baſes habentium, ad omnia quadrata alterius parallelogrammi, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum communes cum eo baſes habentium, erunt vt parallelepipedum ſub altitudine axi, vel diametro vnius hyperbolarum, cuius eſt communis baſis cum parallelogrammo primò dicto, baſi rectangulo ſub dimidia tranſuerſi lateris, & ſub compoſita ex eadem dimidia, & axi, vel diametro dictæ hyperbolæ, vna cum ⅓ quadrati eiuſdem axis, vel diametri, ad parallelepipedum ſub altitudine axi,

vel diametro hyperbolæ, cuius eſt communis baſis cum parallelogrammo ſecundò dicto, baſi rectãgulo ſub dimidia tranſuerſi lateris, & ſub compoſita ex eadem dimidia, & axi, vel diametro hyperbolę poſtremò dictæ, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati eiuſdem axis, vel diametri.

Sint oppoſitis ſectionibus, FAD, EVC, quorũ latus tranſuerſum, AV, centrum, O, circumſcripta parallelogrãma vtcunque, FC, TN, quorum duo oppoſita latera ſint baſes oppoſitarũ hyperbolarum, FD, EC, nempè hyperbolarum, FAD, EVC, &, TY, MN, hyperbolarum, TAY, MVN, nempè ſint ad axim, vel diametrum tranſuerſam, AV, ordinatim applicata, & reliqua latera ad ſecundũ axim, vel diametrum, quæ ſit, XL, pariter ordinatim applicata, regula autem vna dictarum baſium, vt, EC. Dico ergo omnia quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad omnia quadrata, TN, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, TAY, MVN, eſſe vt parallelepipedum ſub altitudine, ZV, baſi rectangulo, VOZ, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, ZV, ad parallelepipedum ſub altitudine, SV, baſi rectangulo, VOS, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, SV: Omnia .n. quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad omnia quadrata, TN, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, TAY, MVN, habent rationem compoſitam ex ea, quam habent omnia quadrata, FC, demptis omnibus quadratis



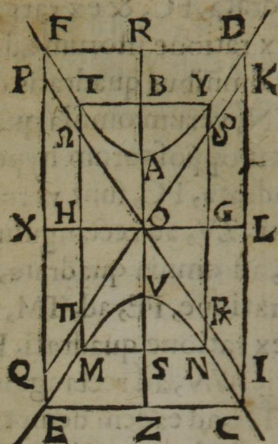
dratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad omnia quadrata, FC, & ex ratione horũ ad omnia quadrata, TN, & ex ratione istorum ad omnia eorundem quadrata, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, TAY, MVN; verum omnia quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad omnia quadrata, FC, sunt vt rectangulum, AOZ, bis, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ZV, ad rectangulum, AZO: Omnia item quadrata, FC, ad omnia quadrata, TN, habẽt rationem compositam ex ratione, FE, ad, TM, vel, EX, ad, MH, siue, ZO, ad, OS, & ex ratione quadrati, EC, ad quadratũ, MN, siue rectanguli, AZV, ad rectangulum, ASV: Tandem omnia quadrata, TN, ad eadem demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, TAY, MVN, sunt vt rectangulum, ASO, ad rectangulum, AOS, bis, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, SV, habemus ergo has quatuor rationes primò dictam rationem cõponentes .s. rationem rectanguli, AOZ, bis, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, VZ, ad rectangulum, AZO, rationem, ZO, ad, OS, rationem rectanguli, AZV, ad rectangulum, ASV, & tandem rationem rectanguli, ASO, ad rectangulum, AOS, bis cum $\frac{2}{3}$. quadrati, SV, harum autem rationum illa, quam habet rectangulum, AZV, ad rectangulum, ASV, cõponitur ex ratione, ZV, ad, VS, & ex ratione, ZA, ad, AS, habemus ergo quinque rationes cõponentes rationem primò dictam, sit igitur primo loco disposita ratio, quam habet rectangulum bis sub, AOZ, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ZV, ad rectangulum, AZO; si rursus assumamus ex cæteris quatuor rationibus eam, quam habet, ZA, ad, AS, vel (sumpta, ZO, communi altitudine) quam habet rectangulũ, AZO, ad rectangulum sub, ZO, AS, quæ habeatur secundò loco; & insuper si ex cæteris tribus rationibus sumamus, quam habet, ZO, ad, OS, vel (sumpta, AS, communi altitudine) quam habet rectangulum sub, ZO, AS, ad rectangulum, ASO, quæ sit pòsita tertiò loco, & tandem si teneamus quartò loco eam,

20. huius.

Defin. 12. l. 1.

20. huius.

quam



quam habet rectangulum, ASO, ad rectangulum sub, AOS, bis, $\frac{2}{3}$. quadrati, SV, habebimus has quatuor hoc ordine dispositas consequenter rationes .s. rationē rectanguli sub, AOZ, bis cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ZV, ad rectāgulum, AZO, rationem huius ad rectangulum sub, AS, OZ, rationem huius ad rectangulum, ASO, & tandem rationē huius ad rectangulū, AOS, bis, vna cum $\frac{2}{3}$. quadrati, SV, quæ component rationem primæ ad vltimam .s. eam, quam habet rectangulum, AOZ, bis vna cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ZV, ad rectangulum, AOS, bis, vna cum $\frac{2}{3}$. quadrati, SV, vel quam habent horum dimidia .s. rectangulū, AOZ, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, ZV, ad rectangulum, AOS, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, SV, illas ergo quatuor rationes in solam hanc redegimus; huic si iungamus eam, quam habet, ZV, ad, VS, quæ erat quinta ratio, quæ residua erat, componetur ex dictis quinque rationibus hæc sola .s. quam habet parallelepipedum sub altitudine, ZV, basi rectangulo, AOZ, vel, VOZ, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, ZV, ad parallelepipedum sub altitudine, SV, basi rectangulo, AOS, vel, VOS, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, SV, quæ erit ea, quam habebunt omnia quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad omnia quadrata, TN, demptis omnibus quadratis oppositaruui hyperbolarum, TAY, MVN, quod &c.

Defin. 12. l. 1.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIV.

IN eadem antecedentis figura, regula sumpta, DC, ostendemus omnia quad. fig. FADCVE,

ad

ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, esse vt parallelepipedum sub, XL, & quadrato, RZ, cum duplo quadrati, AV, ad parallelepipedũ sub, HG, & quadrato, BS, cum duplo quadrati, AV.

Omnia namque quadrata figuræ, FADCVE, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, habent rationem cõpositam ex ea, quam habent omnia quadrata figuræ, FADCVE, ad omnia quadrata, FC, .i. ex ratione quadrati, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, (quæ sit portio, DC, capta inter asymptotos, qui sint, PI, KQ, ducti per, O, secantes, YN, in, &, ℞, FE, in, P, Q, &, TM, in, Ω, Π,) ad quadratum, DC, & ex ratione omnium quadratorũ, FC, ad omnia quadrata, TN, quæ est composita ex ea, quam habet quadratum, DC, ad quadratum, YN, & ex ea, quam habet, EC, ad, MN, & tandem ex ratione omnium quadratorum, TN, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, .i. ex ratione quadrati, YN, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, &℞, porrò ex his rationibus componentibus ea, quam habet quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, ad quadratum, DC, item quadratum, DC, ad quadratum, YN, & quadratum, YN, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, &℞, componunt rationem quadrati, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, &℞, vel, triplicatis terminis, componunt rationem trium quadratorũ, AV, cum quadrato, KI, ad tria quadrata, AV, cum quadrato, &℞, vel componunt rationẽ trium quadratorum, OV, cũ quadrato, LI, ad tria quadrata, OV, cum quadrato, G℞; quadratum autem, LI, est æquale rectangulo, OVZ, bis cum quadrato, VZ, & quadratum, G℞, æquale rectangulo, OVS, bis cum quadrato, VS; nam rectangulum, KCI, ex Prop. 11. Lib. 2. Conicorum æquatur quadrato, OV, & idem rectangulum, KCI, cum quadrato, IL, æquatur quadrato, LC, vel quadrato, OZ, vnde quadratum, LI, remanet æquale rectangulo sub, OVZ, bis cum

21. huius.

11. l. 2.

21. huius.

Defin. 12. l. 1.

quadrato, VZ; & sic etiam quadratum, GR, concludetur æquale esse rectangulo bis sub, OVS, cum quadrato, VS; componunt ergo rationem trium quadratorum, OV, cum rectangulo, OVZ, bis & quadrato, VZ, .i. duorũ quadratorum, OV, cum quadrato, OZ, ad tria quadrata, OV, cum rectangulo, OVS, bis & quadrato, VS, .i. ad duo quadrata, OV, cum quadrato, OS, hæc autem ratio simul cum ea, quæ remansit .i. cum ratione, EC, ad, MN, componit rationem parallelepipedi sub, EC, & basi quadrato, ZO, cum duplo quadrati, OV, ad parallelepipedũ sub, MN, & basi quadrato, SO, cum duplo quadrati, OV; vel parallelepipedi sub, XL, basi quadrato, RZ, cum duplo quadrati, AV, ad parallelepipedum sub, HG, basi quadrato, BS, cum duplo quadrati, AV, quod nobis erat ostendendum.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXV.

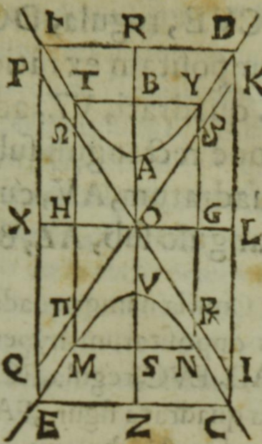
IN eadem figura Prop. 23. ostendemus omnia quadrata figuræ, FADCVE, (regula eadem, AV,) demptis omnibus quadratis triangulorum, KOI, POQ, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, demptis omnibus quadratis triangulorum, & OR, ΩOΠ, esse vt, EC, ad, MN, vel, XL, ad, HG, qui sunt secundi axes, vel diametri.

Nam omnia quadrata figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis triangulorum, KOI, POQ, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, demptis omnibus quadratis triãgulorum & OR, ΩOΠ, habẽt rationem compositam ex ratione omnium quadratorum figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis triangulorum, KOI, POQ, ad omnia quadrata, FC, .i. ex ratione quadrati, AV, ad quadratum, DC, item ex ratione omnium quadratorum, FC, ad omnia

Coroll. 1. 22. huius.

qua-

quadrata, TN, quæ eſt compoſita ex ratione quadrati, DC, ad quadratum, YN, & ex ratione, CE, ad, NM, & tandem componitur ex ratione omniũ quadratorum, TN, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, demptis omnib. quadratis triãgulorum, &O℞, ΩOΠ, .i. ex ea, quam habet quadratum, YN, ad quadratũ, AV, ex his autem rationibus illa, quam habet quadratum, AV, ad quadratum, DC, quadratum, DC, ad quadratum, YN, & quadratum, YN, ad quadratum, AV, componunt rationem quadrati, AV, ad quadratum, AV, quæ ſimul cum ratione ipſius, EC, ad, MN, componit rationem parallelepipedi ſub, EC, & quadrato, AV, ad parallelepipedũ ſub, MN, & quadrato, AV, quæ tandem eſt eadem ei, quam habet, EC, ad, MN, quia illa ſunt parallelepipeda in eadem baſi, & ideò omnia quadrata figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis triangulorum, KOI, POQ, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, demptis omnibus quadratis triangulorum, &O℞, ΩOΠ, erunt vt, EC, ad, MN, vel, XL, ad, HG, quod demonſtrare opus erat.



Coroll. 1. 22. huius.

Defin. 12. l. 1.

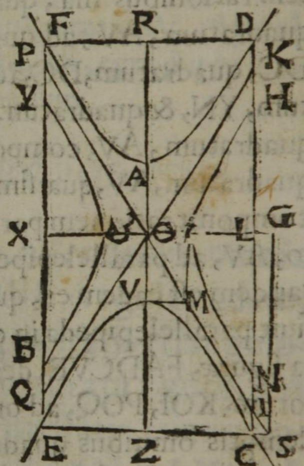
THEOREMA XXV. PROPOS. XXVI.

Aſſumpta iterum figura Propoſ. 23. dimiſſo quouis parallelogrammorum, FC, TN, vt dimiſſo, TN, cæteris ijſdem manentibus, oſtendemus omnia quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, FAD,

EVC, regula, EC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, regula, DC, vel, AV, habere rationem compositam ex ratione rectanguli, AOZ, bis cum $\frac{2}{3}$. quadrati, VZ, ad rectangulum, AZO, & ex ratione rectanguli sub, DC, vel, RZ, & sub, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, vel cum rectangulo sub, AZ, & sexquitertia, ZV.

Omnia namq; quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarũ, FAD, EVC, regula, EC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, regula, AV, habent rationem compositam ex ratione omniũ quadratorum, FC, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad omnia quadrata, FC, communi regula, EC, .i. ex ratione rectãguli, AOZ, bis cum $\frac{2}{3}$. quadrati, VZ, ad rectangulum, AZO, & ex ratione omnium quadratorum, FC, regula, EC, ad omnia quadrata, FC, regula, CD, vel, AV, .i. ex ratione, EC, ad, CD, vel rectanguli sub, EC, CD, ad quadratum, CD, & tandem componitur ex ratione omnium quadratorum, FC, regula, DC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, regula eadem, DC, .i. ex ratione quadrati, DC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, duæ verò rationes, scilicet rectanguli sub, EC, CD, ad quadratum, CD, & quadrati, CD, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, componunt rationem rectanguli, DC, CE, vel sub, RZ, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, ergo omnia quadrata, FC, dem-

20. huius. 29. l. 2. 21. huius



demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, regula, EC, ad omnia quadrata figuræ, FAD CVE, regula, DC, vel, AV, habebunt rationem compositam ex ratione rectanguli, AOZ, bis, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, KI, ad rectangulũ, AZO, & ex ratione rectanguli sub, RZ, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, KI, .i. cum $\frac{2}{3}$ .quadrati, KI, quæ sunt $\frac{4}{3}$. quadrati, LI, .i. rectanguli, AZV, vnde rectangulum sub, AZ, & sexquitertia, ZV, erit æquale tertiæ parti quadrati, KI, erit igitur dicta ratio composita ex ratione primò dicta, & ex ratione rectanguli sub, RZ, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, KI, siue cum rectangulo sub, AZ, & sexquitertia, ZV, quod ostendere propositum erat. Corol. 2 r. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVII.

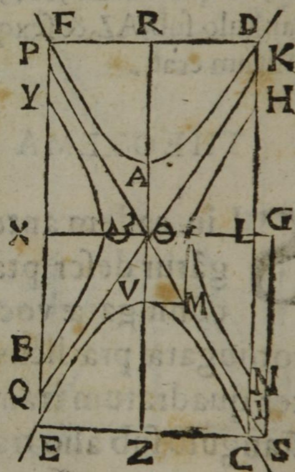
SI in eadem anteced. Proposit. figura intelligãtur descriptæ sectiones, quæ ab Apollonio coniugatæ vocantur, quæ sint, Y&B, HTN, coniugatæ prædictis, FAD, EVC, habentes scilicet quadratum transuersi lateris, & T, æquale rectangulo sub alio transuerso latere, AV, & linea iuxta quam possunt, siue latere recto oppositarum sectionum, FAD, EVC, & regula sit, DC, latus parallelogrammi, FC, expositis primò sectionibus oppositis, FAD, EVC, circumscriptum, æquidistans earum lateri trãsuerso, AV: Omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, Y&B, HTN, quæ portionibus laterum, FE, DC, inter oppositas sectiones, Y&B, HTN,

exi-

existentium constituuntur, erunt vt parallelepipedum sub dimidia basis primò expositarum alterutrius hyperbolarum, vt sub, ZC, & sub quadrato, ZS, (quæ habetur, productis, ZC, OI, donec sibi occurrant, vt in, S,) ad parallelepipedũ bis sub, LT, & quadrato, TO, cum cubo, TO, & amplius $\frac{1}{3}$. eiusdem cubi.

Producatur, OL, indefinitè, cui occurrat, SG, ducta per, S, ipsi, ZO, æquidistans, & occursus sit in puncto, G, & per, T, ipsa, MT, æquidistans ducatur ipsi, AV, & per, V, VM, æquidistans ipsi, VT, quæ tangẽt sectiones in pũctis, VT, & conueniẽt inter se in asymptoto, OS, vt in, M, vt ex pri. Secundi Conicorum elici potest: Omnia ergo quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, vel omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, sunt vt quadratum, DC, ad quadratum AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, siue vt quadratum, CI, ad quadratum, OV, vel, TM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, LI, quia verò quadratum, CL, vel, SG, ad quadratum, MT, est vt quadratum, GO, ad quadratum, OT, & quadratum, GS, ad quadratum, LI, est vt quadratum, GO, ad quadratum, OL, ideò quadratum, SG, ad quadratum, TM, vel, OV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, LI, erit vt quadratum, GO, ad quadratum, OT, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, OL, siue vt triplũ quadrati, GO, ad quadratum, LO, cum tribus quadratis, O T, vel sumpta, LO, communi altitudine, vt parallelepipedum sub, LO, & triplo

21. huius.



plo quadrati, OG, ad parallelepipedum sub, LO, & quadrato, OL, cum triplo quadrati, OT, sic igitur erunt omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, ꝙ serua.

Insuper omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata trianguli, KOI, sunt vt quadratum, DC, ad ⅓. quadrati, KI, vel vt quadratum, CL, vel quadratum, GS, ad ⅓. quadrati, LI, vel vt quadratum, GO, ad ⅓. quadrati, OL, vel vt triplum quadrati, GO, ad quadratum, OL, vel, sumpta, OL, communi altitudine, vt parallelepipedũ sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad parallelepipedum sub, LO, & quadrato, LO, .i. ad cubum, LO. Vlterius omnia quadrata triãguli, KOI, ad omnia quadrata hyperbolæ, HTN, sunt vt cubus, LO, ad parallelepipedum ter sub, OT, & quadrato, TL, cum cubo, TL, ergo, ex æquali, omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata hyperbolæ, HTN, erunt vt parallelepipedũ sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad parallelepipedum ter sub, OT, & quadrato, TL, cum cubo, TL, erant autem omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, vt idem parallelepipedum sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad parallelepipedum sub, LO, & quadrato, OL, cum triplo quadrati, OT, ergo omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, HTN, erunt vt parallelepipedum sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad reliquum, quod habetur, dempto parallelepipedo ter sub, OT, & quadrato, TL, cum cubo, TL, à parallelepipedo sub, LO, & quadrato, LO, .i. à cubo, LO, & parallelepipedo sub, LO, & triplo quadrati, OT, verum, quia cubus, LO, æquatur parallelepipedis ter sub, OT, & quadrato, TL, ter sub, TL, & quadrato, TO, cum cubis, OT, TL, ideò si à cubo, OL, dematur parallelepipedum ter sub, OT, & quadrato, TL, cum cubo, TL, remanebit parallelepipedum ter sub, LT, & quadrato, TO, cũ cubo, TO, quod iungendum est parallelepipedo sub, LO, & triplo quadrati, TO, habebimus ergo pro quæsito residuo parallelepipedum

9 huius.

38. l. 2.

36.1 2. dum ſub, LO, & quadrato, OT, ter .i. ſub, LT, & quadrato, TO, ter, cum tribus cubis, TO, & adhuc parallelepipedum ſub, LT, & quadrato, TO, ter, cum cubo, TO, .i. habebimus parallelepipedũ ſub, LT, & quadrato, TO, ſexies, cum quatuor cubis, TO, pro quæſito reſiduo, igitur omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, HTN, vel omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, Y&B, HTN, erunt vt parallelepipedum ſub, LO, & triplo quadrati, OG, ad parallelepipedum ſexies ſub, LT, & quadrato, TO, cum quatuor cubis, TO, .i. vt parallelepipedum ſub, LO, vel, ZC, & quadrato, OG, vel, ZS, ad parallelepipedũ bis ſub, LT, & quadrato, TO, cum cubo, TO, & amplius ⅔. eiuſdem cubi, TO, nam hæc ſunt eorundem ſubtripla, vt conſideranti facilè patebit, quod erat oſtendendum.

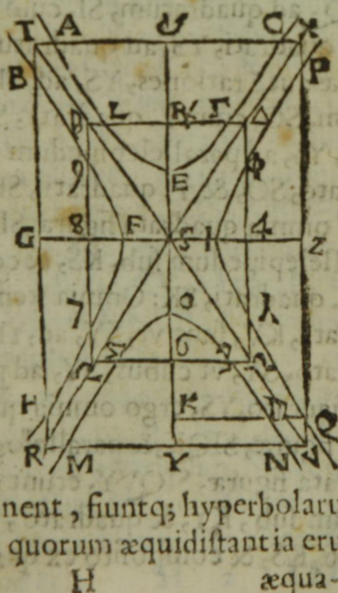
THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVIII.

SI, expoſitis ſectionibus coniugatis, parallelogramınum deſcribatur, habens latera earundem axibus, vel diametris coniugatis parallela, in earum aſymptotis conuenientia, eaſdemq; oppoſitas ſectiones diuidentia alterutro axium, vel diametrorũ, ſumpto pro regula: Omnia quadrata deſcripti parallelogrammi ad omnia quadrata figurę duobus oppoſitis lateribus parallelogrammi regulæ æquidiſtãtibus, & reliquorum laterum portionibus inter ſectiones coniugatas, & prædicta latera concluſis, & ipſis cõiugatis ſectionibus, comprehenſæ, demptis ab ijſdem omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, quarum

latus

latus transuersum non fuit sumptum pro regula, erũt vt cubus dimidij lateris parallelogrammi regulæ non æquidistantis, ad duo parallelepipeda, quorum vnum continetur sub dimidio excessus dicti lateris super basim hyperbolæ, quam idem latus abscindit, & sub quadrato dimidij eiusdem lateris, aliud verò sub dimidio basis dictæ hyperbolæ, & sub $\frac{1}{3}$. quadrati eiusdem, cum quadrato dimidij lateris transuersi, quod non est regula, ab his tamen dempto parallelepipedo sub dimidio lateris transuersi, quod non est regula, & sub quadrato axis, vel diametri alterutrius hyperbolarũ, quarum est latus transuersum, vna cum $\frac{1}{3}$. cubi eiusdem axis, vel diametri.

Sint igitur expositæ sectiones coniugatæ, AEC, MON, PIQ, BFH, quarum communes asymptoti indefinitè cũ sectionib. sint producti, qui sint, TSV, RSX, sint autem earũ axes, vel diametri coniugatæ, EO, FI, quarum alterutra sit sumpta pro regula, vt, FI, sit vlterius descriptum parallelogrammum, TV, latera habens æquidistantia ipsis, EO, FI, & in asymptotis, TV, XR, conuenientia in punctis, T, R, V, X, ipsasq; sectiones diuidẽtia, ita vt, quæ inter sectiones manent, fiuntq; hyperbolarum bases sint, PQ, NM, HB, AC, quorum æquidistantia erunt

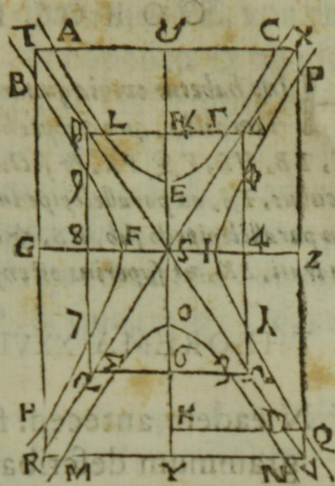


H æqua-

æqualia. Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, TV, ad omnia quadrata figuræ inter, TX, RV, TB, HR, VQ, PX, & ſectiones, BFH, PIQ, concluſæ, demptis ab iiſdem omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, AEC, MON, eſſe vt cubus dimidij, XV, ad parallelepipedum ſub, QV, & quadrato dimidij lateris, XV, vna cum parallelepipedo ſub dimidio, PQ, & ſub compoſito ex $\frac{1}{3}$. quadrati eiuſdem dimidij, PQ, & quadrato, SO, ab his tamen dempto parallelepipedo ſub, SO, & quadrato reliquæ ad medietatem, XV, cum $\frac{1}{3}$. cubi eiuſdem reliquæ. Producantur, FI, EO, hinc inde vſq; ad latera, TX, XV, VR, RT, quibus occurrant in punctis, &, Z, Y, G, in quibus illa bifariam diuiduntur, & per, Q, ducatur, QK, æquidiſtans ipſi, RV: Omnia igitur quadrata parallelogrammi, SV, ad omnia quadrata figuræ, Defin. 12. l. 1. SIQK, habent rationem compoſitam ex ea, quam habent omnia quadrata, SV, ad omnia quadrata, SQ, .i. ex ratio- 10. l. 2. ne, YS, ad, SK, & ex ratione omnium quadratorum, SQ, 22. huius. ad omnia quadrata figuræ, SIQK, .i. ex ratione quadrati, KQ, ad quadratum, SI, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KD, .i. ex ratione quadrati, YS, ad quadratum, SO, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, SK, duæ autē rationes, YS, ad, SK, & quadrati, YS, ad quadratum, SO, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, SK, componunt rationem cubi, YS, ad parallelepipedum ſub, KS, & compoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, SK, ergo omnia quadrata, SV, ad omnia quadrata figuræ, SIQK, erunt vt cubus, YS, ad parallelepipedum ſub, KS, & compoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, SK: Omnia item quadrata, SV, ad omnia qua- 10. l. 2. drata, KV, ſunt vt, SY, ad, YK, .i. ſumpta cōmuni baſi quadrato, SY, vt cubus, SY, ad parallelepipedum ſub, YK, & quadrato, YS, ergo omnia quadrata, SV, ad omnia quadrata figuræ, SIQK, & parallelogrammi, KV, .i. ad omnia quadrata figuræ, SIQVY, erunt vt cubus, YS, ad parallelepipedum ſub, KY, & quadrato, YS, vna cum parallelepipedo ſub, KS, & compoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, SK:

Quo-

Quoniam verò omnia quadrata, SV, ſunt tripla omniũ quadratorum trianguli, SYV, hæc verò ad omnia quadrata ſemihyperbolæ, OYN, ſunt vt cubus, SY, ad parallelepipedum ter ſub, SO, & quadrato, OY, cum cubo, OY, ideò omnia quadrata, SV, ad omnia quadrata ſemihyperbolæ, YON, erunt vt tres cubi, SY, ad parallelepipedum ter ſub, SO, & quadrato, OY, cum cubo, OY, .i. vt cubus, SY, ad parallelepipedum ſub, SO, & quadrato, OY, cum $\frac{1}{3}$. cubi, OY; erant autem omnia quadrata, SV, ad omnia quadrata figuræ, SIQVY, vt cubus, SY, ad parallelepipedum ſub, KY, & quadrato, YS, vna cum parallelepipedo ſub, KS, & compoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, SK, ergo omnia quadrata, SV, ad omnia quadrata figuræ, SIQVY, demptis omnibus quadratis ſemihyperbolæ, YON, vel horum quadrupla .ſ. omnia quadrata, GV, ad omnia quadrata figuræ, FIQVRH, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, MON, vel horum dupla .i. omnia quadrata, TV, ad omnia quadrata figuræ, XPIQVRHFBT, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, AEC, MON, erunt vt cubus, YS, vel, ZV, ad parallelepipedum ſub, KY, & quadrato, YS, vel ſub, QV, & quadrato, VZ, vna cum parallelepipedo ſub, KS, & cōpoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, SK, vel vna cum parallelepipedo ſub, ZQ, & compoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, ZQ, ab his tamen dempto parallelepipedo ſub, SO, & quadrato, OY, quæ eſt reliqua ad ipſam, SY, vel, ZV, vna cum $\frac{1}{3}$. cubi eiuſdem reliquæ, NY, quæ eſt diameter alterutrius hyperbolarum dictarum, quod &c.



24. l. 2.

9. huius.

COROLLARIVM.

HInc habetur omnia quadrata, TV, ad omnia quadrata figuram dictæ, quæ comprehenditur terminis, qui sunt, TX, RV, TB, HR, VQ, PX, & sectionibus oppositis, BFH, PIQ, esse vt cubus, YS, ad parallelepipedum sub, KY, & quadrato, YS, vna cum parallelepipedo sub, KS, & composito ex quadrato, SO, & ⅓. quadrati, SK, vt superius ostensum est.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXIX.

IN eadem anteced. figura si aliud parallelogrammum describatur vtcunque, conditionibus tamen, quo, TV, descriptum est, cuius latera sectiones coniugatas diuidant, quod sit parallelogrammum, βΩ, cuius latera sectiones coniugatas diuidant in punctis, L, Γ, Φ, Λ, 3, Σ, 7, 9, & axes, vel diametros coniugatas, &Y, GZ, in punctis, ℞, 8, 6, 4, regula alterutro axium, vel diametrorum coniugatarum, VT, FI: Ostẽdemus omnia quadrata figuræ, quæ remanet demptis oppositis hyperbolis, BFH, PIQ, à parallelogrammo, TV, ablatis ab ijsdem omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, AEC, MON, (quæ figura breuitatis causa dicatur, figura parallelogrammi, TV,) ad omnia quadrata figuræ, quæ remanet, demptis oppositis hyperbolis, ΦΙΛ, 9F7, à parallelogrammo, βΩ, ablatis ab ijsdem omnibus quadratis oppositarum hyperbolarũ, LEΓ, ΣΟ3, quæ dicatur figura parallelogrammi, βΩ, esse vt paral-

lelepipedum ſub, QV, & quadrato, VZ, vna cum parallelepipedo ſub, QZ, & cõpoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, QZ, ab his dempto parallelepipedo ſub, SO, & quadrato, OY, & $\frac{1}{3}$. cubi, OY, ad parallelepipedum ſub, ΛΩ, & quadrato, Ω4, vna cum parallelepipedo ſub, Λ4, & compoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, Λ4, dempto parallelepipedo ſub, SO, & quadrato, O6, cum $\frac{1}{3}$. cubi, O6.

Nam omnia quadrata figuræ parallelogrãmi, TV, demptis iam dictis, ad omnia quadrata figurę parallelogrammi, βΩ, demptis iam dictis, habent rationem compoſitam ex ratione omnium quadratorũ primò dictæ figuræ, demptis &c. ad omnia quadrata, TV, .i. ex ea, quam habet parallelepipedum ſub, QV, & quadrato, VZ, vna cum parallelepipedo ſub, QZ, & compoſita ex quadrato, OS, & $\frac{1}{3}$. quadrati, QZ, dempto ab his parallelepipedo ſub, SO, & quadrato, OY, & $\frac{1}{3}$. cubi, OY, ad cubum, ZV, item ex ratione omnium quadratorum, TV, ad omnia quadrata, βΩ, ideſt ex ratione cubi, VZ, ad cubum, Ω4, quia parallelogrãma, TV, βΩ, ſunt ſimilia, cum ſint circa eandem diametrum, & tandem ex ratione omnium quadratorum, βΩ, ad omnia quadrata figuræ parallelogrammi, βΩ, demptis iam dictis, .i. ex ratione cubi, Ω4, ad parallelepipedum ſub, ΛΩ, & quadrato, Ω4, vna cum parallelepipedo ſub, Λ4, & compoſito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, Λ4, ab his dempto parallelepipedo ſub, SO, & quadrato, O6, vna cum $\frac{1}{3}$. cubi, O6, rationes autem parallelepipedorũ primò dictorum, dempto parallelepipedo ſub, SO, & quadrato, OY, cum $\frac{1}{3}$. cubi, OY, ad cubum, ZV, cubi, ZV, ad cubum, Ω4, & cubi, Ω4, ad parallelepipeda poſtremò dicta, dempto parallelepipedo ſub, SO, & quadrato, O6, cum $\frac{1}{3}$. cubi, O6; cõ-

Ex antec. (beside "&c. ad omnia quadrata, TV")
13. l. 2. (beside "ex ratione cubi, VZ")
Ex antec. (beside ".i. ex ratione cubi, Ω4")

po-

Defin. 12. l. 1. ponunt rationem parallelepipedorum primò dictorum, dempto iam dicto ad parallelepipeda postremò dicta, dempto iam dicto, ergo omnia quadrata figuræ parallelogrammi, TV, demptis omnibus quadratis oppositarũ hyperbolarum, AEC, MON, ad omnia quadrata figuræ parallelogrammi, βΩ, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, LEΓ, ΣO3, erunt vt parallelepipedũ sub, QV, & quadrato, VZ, vna cum parallelepipedo sub, QZ, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, QZ, ab his dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, OY, cũ $\frac{1}{3}$. cubi, OY, ad parallelepipedum sub, ΛΩ, & quadrato, Ω4, vna cum parallelepipedo sub, Λ4, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, Λ4, ab his dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, O6, cũ $\frac{1}{3}$. cubi, O6, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM.

Hinc patet, quod eadem methodo ostẽdemus omnia quadrata figuræ parallelogrammi, TV, nihil ab eis dempto, ad omnia quadrata figuræ parallelogrammi, βΩ, nihil pariter ab eis dempto, esse vt parallelepipeda primò dicta ad parallelepipeda secundò dicta.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXX.

In omnibus huius Lib. 5. Propositionibus, in quibus duarum quarumcunq; figurarum notificata fuit ratio omnium quadratorum, iuxta regulas in eisdem assumptas, nota etiam euadit ratio similarium solidorum, quæ ex illis gignuntur figuris, iuxta easdem regulas.

Quoniam enim ostensum est Lib. 2. Prop. 23. vt omnia qua-

quadrata duarum figurarum inter se sumpta cum datis regulis, ita esse solida similaria genita ex ijsdem figuris iuxta easdem regulas, ideò cum in huius Libri Propositionibus inuēta est ratio omnium quadratorum duarum figurarum cum talibus regulis, colligemus etiam nunc eandem esse rationem duorum similarium solidorum, quæ ex illis figuris iuxta easdem regulas genita dicuntur, quæ amplius in sequentibus dilucidabimus singulas Propositiones, quę opportunæ fuerint, denuò assumentes.

Vnde cum in prima Propos. exempli gratia ostensum est (conspecta denuò eiusdem figura) omnia quadrata hyperbolæ, DBF, regula, DF, ad omnia quadrata, AF, esse vt cōpositam ex, NB, & $\frac{1}{3}$. BE, ad, OE, eandem comperiemus habere rationem solidum similare genitum ex hyperbola, DBF, ad solidum similare genitum ex, AF, iuxta communem regulam, DF; & eodem pacto colligemus, veluti omnia quadrata hyperbolæ, DBF, ad omnia quadrata triāguli, DBF, sunt vt composita ex sexquialtera, OB, & ex, BE, ad, OE, ita esse solidum similare genitum ex hyperbola, DBF, ad sibi similare genitum ex triangulo, DBF, iuxta communem regulam, DF.

SCHOLIVM.

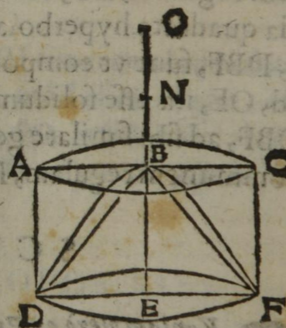
QVoniam verò ex Propos. 45. Lib. Primi habetur, quod si quæcunque conois hyperbolica, in cuius basi sit cylindrus, & conus, & circa eundem axem, vel diametrum secetur planis basi æquidistantibus, quibus pariter secentur cylindrus, & conus, fient conceptæ in solidis figuræ similes basi, ideò 45. l. 1.
omnia plana eorundem regula basi erunt omnes figuræ similes dictorum solidorum, in quibus si ducatur planum per axem, producet in ipsis figuras genitrices earundem, nempè parallelogrāmum in cylindro, hyperbolam in conoide, & triangulum in cono; dicta autem solida erūt similaria genita ex his figuris genitricibus iux- Elicitur ex 45. l. 1. pro Conoide Hyperb & ex Cor. 3. 34 l 2. pro Cylindro, & Cono.

ta com-

ta communem regulam ipsam basim, & ideò eorum ratio nota erit, quia scimus quam rationem habeant inter se omnia quadrata dictarum genitricium figurarum, regula basi. Hæc autem similiter pro sequentibus memoria teneantur, in quibus fiet nostrum solitum exemplum per reuolutionem figurarum circa suos axes, vt habeamus omnes figuras similes genitorum solidorum, quæ sint circuli diametros in figuris genitricibus, quibus sint erecti, sitas habentes, licet eadem verificentur assumptis non axibus, sed tantum diametris, vt alibi pluries repetitum est, ex dictis autem infrascripta habentur Corollaria.

COROLLARIVM I.

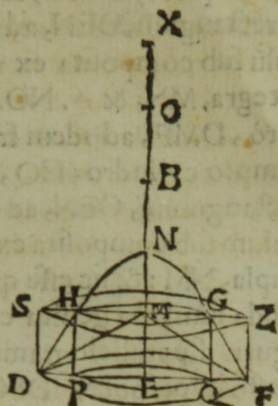
VT igitur fiat nostrum exemplum in Prop. 1. reuoluatur parallelogrammum, AF, circam manentem axim, BE, vt fiat ex parallelogrãmo, AF, cylindrus, AF, ex hyperbola, DBF, conois, DBF; & ex triangulo, DBF, conus, DBF, colligitur ergo cylindrum, AF, ad conoidem, DBF, esse vt, OE, ad compositam ex, NB, & $\frac{1}{3}$. BE, conoidem autem, DBF, ad conum, DBF, esse vt cõpositã ex sesquialtera, OB, & ex, BE, ad, OE; & ita esse solida quæcunque similaria genita ex eisdem figuris .s. ex parallelogrammo, AF, hyperbola, DBF, & triangulo, DBF, iuxta communem regulam, DF, vt supra dictum est, quæ declarare oportebat.



COROLLARIVM II.

IN Prop. 2. assumpta eius figura, dimissis parallelogrammis, AZ, CG, & rectis, CH, RG, LK, vt fiat nostrum exem-

exemplum reuoluatur figura circa manentem axim, NE, vt fiat ex parallelogrammo, SF, cylindrus, SF, ex triangulo, DMF, conus, DMF, & ex hyperbolis, DNF, HNG, conoides hyperbolicæ, DNF, HNG, patet ergo ex hac Propoſ. conoidem, DNF, ad conoidem, HNG, abſciſſam plano, HG, æquidiſtante ipſi plano, DF, eſſe vt parallelepipedum ſub, XE, & quadrato, EN, ad parallelepipedum ſub, XM, & quadrato, MN, & ſic eſſe quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex hyperbola, DNF, ad ſibi ſimilare genitum ex hyperbola, HNG, iuxta communem regulam, DF.



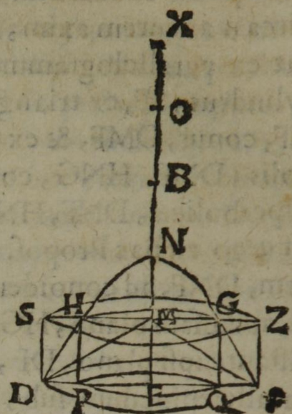
COROLLARIVM III.

IN Prop. 3. patet in ſuperioris figura, in qua eius exemplum conſtructum eſt, cylindrum, SF, ad fruſtum conoidis, HDFG, eſſe vt rectangulum, OEN, ad rectãgulum ſub, OE, &, NM, vna cum rectangulo ſub compoſita ex $\frac{1}{2}$. NO, & $\frac{1}{3}$. ME, & ſub, ME. Et conum, DMF, ad idem fruſtum eſſe, vt rectangulum, OEN, ad rectangulum ſub, OE, & tripla, NM, vna cum rectangulo ſub compoſita ex, NX, &, ME, & ſub, ME; & ſic eſſe ſolida ſimilaria quæcunq; genita ex eiſdem figuris, parallelogrammo nempè, SF, fruſto hyperbolæ, HDFG, & triangulo, DMF, iuxta communem regulam, DF.

COROLLARIVM IV.

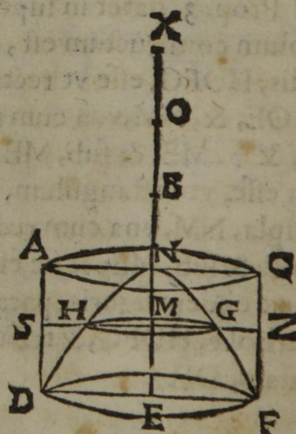
IN Prop. 4. iterum aſſumpta figura Coroll. 2. patebit cylindrum, SF, ad fruſtum hyperbolicum, HDFG, ab

eo dempto cylindro, HQ, esse vt rectangulũ, OEN, ad rectangulũ sub composita ex $\frac{1}{2}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO. Conũ verò, DMF, ad idem frustum, dempto cylindro, HQ, esse vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub composita ex, EX, & dupla, NM: & sic esse quæcũq; solida similaria genita ex eisdẽ figuris .s. parallelogrammo, SF, frusto hyperbolæ, HDFG, dempto solido similari genito ex, HQ, & triangulo, DMF, iuxta communem regulam, DF.



COROLLARIVM V.

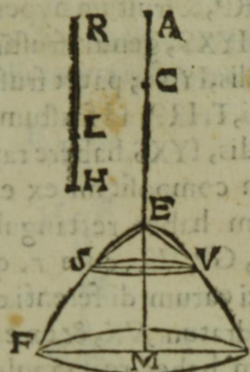
IN Prop. 5. assumpta iterum figura Prop. 2. dimissis rectis, CP, RQ, LK, & triangulo, DM, &, vt fiat solitum exemplum, ea reuoluta circa axem, NE, vt ex, AF, fiat cylindrus, AF, ex hyperbola, DNF, conois, DNF, quæ solida sint secta plano, SZ, basi, DF, æquidistante, patet cylindrũ, AF, dempta conoide, DNF, ad cylindrũ, SF, dempto frusto conoidis, DHGF, esse vt parallelepipedũ sub composita ex, XE, EN, & sub quadrato, NE, ad parallelepipedũm sub cõposita ex, XE, EN, NM, & sub quadrato, ME; & sic esse quodlibet solidum similare genitum ex, AF, dempto solido similari genito ex hyperbola,



bola, DNF, ad ſibi ſimilare genitum ex, SF, dempto ſolido ſimilari genito ex fruſto hyperbolæ, DHFG, iuxta communem regulam, DF.

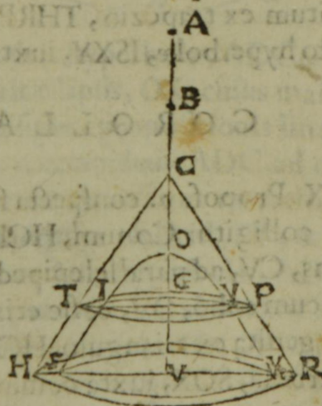
COROLLARIVM VI.

IN Prop. 6. expoſita eius figura, & vt fiat noſtrum exemplum eadem circa, EM, reuoluta, patet planum tranſiens per, SV, æquidiſtans baſi, FG, à conoide, FEG, reſecare conoidem, SEV, quæ ad conū, SEV, habet rationem datam, quā nempè habet, HR, ad, RL, idq; diſcimus efficere quocunque ſolido ſimilari exiſtente, FEG, cuius figura genitrix ſit, FEG, à quo. ſ. ſciemus abſcindere per planum baſi æquidiſtans ſolidū ſibi ſimilare, quod nempè erit genitum ex hyperbola, SEV, quod ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex triangulo, SEV, habeat rationem datam, dummodo data ratio ſit quidem maioris in æqualitatis, ſed minor ſexquialtera.



COROLL. VII.

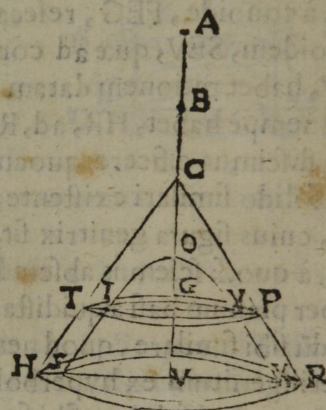
IN Prop. 7. expoſita eius figura, dimiſſis tamen rectis, ED, SO, XO, & parallelogrammis, GX, GR, eadem reuoluatur circa manētem axim, CV, vt ex triāgulo, HCR, fiat conus, HCR, & ex hyperbola, SOX, conois, SOX, patet



ergo conum, HCR, ad conoidem, SOX, esse in ratione composita ex ea, quam habet quadratum, SX, ad quadratum, HR, & rectangulum, AVO, ad rectangulum, BVC.

COROLLARIVM VIII.

IN Prop. 8. sumpto exemplo ex anteced. figura, in qua trapezium, THRP, in reuolutione genuit frustum coni, THRP, & frustum hyperbolæ, IYXS, genuit frustũ conoidis, IYXS; patet frustum coni, THRP, ad frustum conoidis, IYXS, habere rationem compositam ex ea, quam habet rectangulum sub, GP, VR, cum ⅓. quadrati earum differentiæ ad quadratum, VX, & ex ea, quam habet rectangulum, BVO, ad rectangulum sub, BV, OG, vna cum rectangulo sub composita ex ½. BO, & ⅓. GV, & sub, GV; & sic esse quodlibet solidum similare genitum ex trapezio, THRP, ad sibi similare genitum ex frusto hyperbolæ, ISXY, iuxta communem regulam, HR.



COROLLARIVM IX.

EX Propos. 9. conspecta figura Corollarij 7. manifestò colligitur Conum, HCR, ad conoiden, SOX, esse vt cubus, CV, ad parallelepipedum ter sub, CO, & quadrato, OV, cum cubo, OV, & sic etiam esse quęcunq; solida similaria genita ex triangulo, HCR, ad sibi similaria genita ex hyperbola, SOX, iuxta communem regulam, HR.

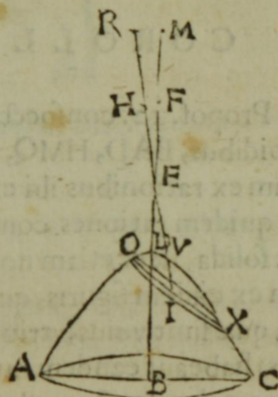
CO-

COROLLARIVM X.

IN Propoſ. 10. colligimus ſolida ſimilaria genita ex hyperbolis, AOC, OVX, habere inter ſe rationem compoſitam ex rationibus ibi appoſitis, quæ breuitatis gratia inibi recolantur.

COROLLARIVM XI.

IN Propoſ. 11. expoſita eius figura, habemus conoides hyperbolicas ab eadem conoide diremptas, habere inter ſe rationem compoſitam ex duabus rationib. ibidem appoſitis. Vt autem fiat noſtrum exemplum, intelligatur in ipſa (in qua dimittantur aſymptoti, & rectæ, ad, DC, OV, VX, PO, PX,) BD, eſſe axem, circa quam reuoluatur figura, vt ex hyperbola, A D C, fiat conois hyperbolica, A D C; vlterius per, OX, traducatur planum, OX, erectum plano genitricis hyperbolæ, ADC, cuius pars in conoide concepta erit ellipſis, OX, cuius maior diameter, OX, minor autem in figura propoſitionis linea, PO, habemus igitur ex Prop. 11. conoidem, ADC, ad conoidem, OVX, habere rationem compoſitam ex ratione rectanguli ſub, MB, HI, ad rectangulum ſub, RI, FB, & ex ratione parallelepipedi ſub altitudine hyperbolæ, ADC, baſi quadrato, AC, ad parallelepipedum ſub altitudine hyperbolæ, OVX, baſi autem rectangulo ſub, XO, OP, veluti ſunt omnia quadrata hyperbolę, ADC, regula, AC, ad omnia rectangula hyperbolæ, OVX, (regula, OX,) ſimilia recta-



43. l. 1.

Coro. 44. l. 1.

Corol. 2. 33. l. 2. ctangulo ſub, XO, OP, ſiue omnes circuli eiuſdem ad omnes ellipſes hyperbolæ, OVX, ſimiles ellipſi, cuius coniugati axes, vel diametri ſunt, XO, OP, XO, maior, OP, minor, nam omnes dicti circuli ſunt omnia plana conoidis, ADC, regula, AC, & dictæ omnes ellipſes ſunt omnia plana conoidis, OVX, eandem autem rationem ſupradictę cōperiemus habere quæcunq; ſolida, non quidem ſimilaria, inter ſe, ſed quorum omnia plana ſint omnes figuræ ſimiles genitricium figurarum, ADC, OVX, à quibus genita dicuntur, quæ habeant inter ſe eandem rationem ei, quam habet quadratum, AC, ad rectangulum, XOP.

COROLLARIVM XII.

IN Propoſ. 12. conſpecta illius figura, & completis conoidibus, BAD, HMQ, patet eorum rationem eſſe cōpoſitam ex rationibus ibi explicatis, vbi videri poterunt. Quas quidem rationes comperiemus etiam habere quæcunq; ſolida, licet etiam non ſimilaria ad inuicem, genita tamen ex eiſdem figuris, quarum omnes figuræ ſimiles (inter ſe, quæ ſunt vnius, vtriuſq; tamen figuræ genitricis diſſimiles) habeant eandem rationem, quam habent prædicta omnia quad. vel rectangula, vt ſupra ad inuicem cōparata.

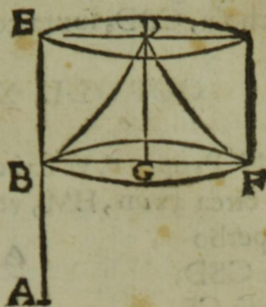
COROLLARIVM XIII.

Elicitur ex Corol. 50. l. 1. IN Prop. 13. habetur ſimiles conoides hyperbolicas eſſe in tripla ratione axium, vel diametrorum earūdem, quippe quæ ex ſimilibus hyperbolis naſcuntur: Igitur in anteced. Corollarij figura, ſi ſupponantur ſimiles hyperbolæ, BAD, HMQ, vt fiant ex illis ſimiles conoides hyperbolicæ, FEG, HTS, iſtæ erunt inter ſe in tripla ratione axium, AC, MP, & ſic erit quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex hyperbola, FEG, ad ſibi ſimilare genitum ex hyperbola, HTS, iuxta regulas, FG, HS. (Corol. 50. l. 1.)

CO-

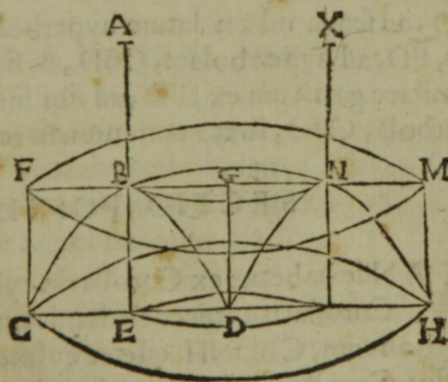
COROLLARIVM XIV.

IN Prop. 14. expoſita eius figura, vt fiat exemplum, reuoluatur circa axim, DG, vt ex, EG, fiat cylindrus, EF, & ex trilineo, DGB, ſolidum, DBGF, quod vocetur: Apex hyperbolicus; patet ergo cylindrũ, EF, ad apicem, BDF, eſſe vt, BD, ad ſui reliquum, dempta ab eodem ſemihyperbola, BED, vna cum exceſſu, quo ipſa ſuperat $\frac{1}{3}$. parallelogrammi, BD, & $\frac{1}{6}$. BM; & ſic eſſe patet, quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex, BD, ad ſibi ſimilare genitum ex ſemihyperbola, BED, iuxta communem regulam, ED.



COROLLARIVM XV.

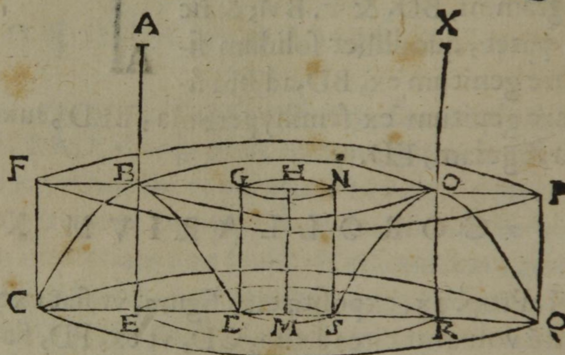
IN Prop. 15. expoſita eius figura, vt fiat exemplum, eadẽ voluatur circa axim, GD, vt ex, FD, fiat cylindrus, FH, & ex hyperbola, CBD, ſolidum, CBDNH, quod vocetur: Semianulus ſtrictus hyperbolicus: intelligantur autem ſemper hæc ſolida ſecari per axem, vt in ijs producantur figuræ, quæ in reuolutione eadem generant, nempè extenſo plano, FD, per axem, GD, produci figurã, FH, compoſi-



positam ex duobus parallelogrãmis, FD, DM, & figuram, CBDNH, cõpositam ex duabus hyperbolis, CBD, DNH; patet ergo cylindrum, FH, ad solidum, CBDNH, esse vt, FD, ad hyperbolam, CBD, & sic esse quodlibet solidum similare genitum ex, FD, ad sibi similare genitum ex hyperbola, CBD, iuxta communem regulam, CD.

COROLL. XVI. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 16. vt fiat exemplum, reuoluatur eius figura circa axim, HM, vt ex, FM, fiat cylindrus, FQ, & ex hyperbola, CBD, solidũ, CBD, SOQ, quod vocetur: Semianulus latus hyperbolicus: patet ergo cylindrũ,



FQ, ad semianulum latum hyperbolicum, CBDSOQ, esse vt, FD, ad hyperbolam, CBD, & sic esse quodlibet solidũ similare genitum ex, FD, ad sibi similare genitum ex hyperbola, CBD, iuxta communem regulam, CD.

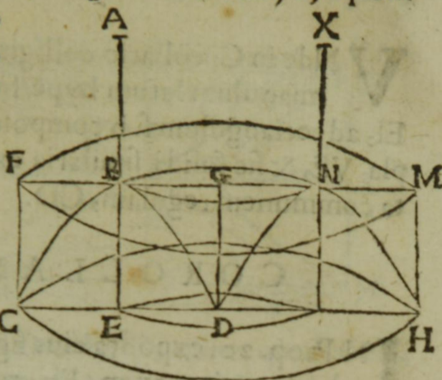
SECTIO POSTERIOR.

VNde habetur ex Corollario cylindrum, FH, in figura Corollarij antecedentis ad semianulum strictum hyperbolicum, CBDNH, esse vt cylindrum, FQ, in figura huius Corollarij ad semianulum latum hyperbolicum, CBDSOQ, & sic solida similaria &c.

CO-

COROLLARIVM XVII.

IN Prop. 17. si, ducta parallela axi, vel diametro hyperbolæ, BE, sit, GD, patet in figura Corollarij 15. quam rationē habeat cylindrus, FH., ad solidum, CBNH, quod vocetur: Semibasis columnaris stricta hyperbolica: Si verò dicta parallela sit, HM, patet in figura Corollarij anteced. quā rationem habeat cylindrus, FQ, ad solidum, CBOQ, quod vocetur: Semibasis columnaris lata hyperbolica: si tandem sit, RS, voluto, FS, circa axim, RS, vt ex, FS, fiat cylindrus, FH, & ex figura, CBRS, solidum, CBDH, quod vocetur: Semibasis columnaris media hyperbolica: patet cylindrum, FH, ad semibasim, CBDH, esse vt quadratum, CS, ad quadratum, SE, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, ES, vt & solida similaria ex eisdem genita iuxta communem regulam, CS.



COROLLARIVM XVIII.

IN Prop. 18. habetur, visis proximis antecedentibus figuris, semianulum latum hyperbolicum, CBDSOQ, ad semianulum strictum hyperbolicum, CBDNH, esse vt, CM, MD, ad, DC; & sic solida similaria &c.

COROLL. XIX. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 19. habetur, visa figura Corollarij 15. conoidem hyperbolicam genitam ex semihyperbola, CBE,

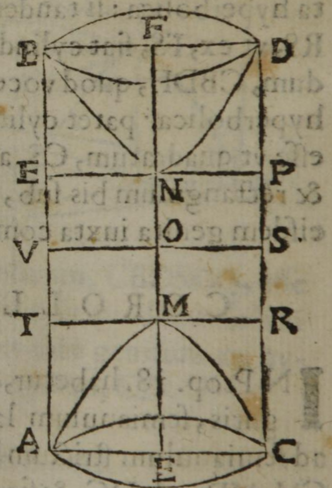
ad ſemianulum ſtrictum hyperbolicum, CBDNH, eſſe vt quadratum, IE, ad rectangulum ſub, CD, & dupla, VE.

SECTIO POSTERIOR.

VNde in Corollario colligitur eãdem conoidem ad ſemianulum latum hyperbolicum eſſe vt quadratum, EI, ad rectangulum ſub compoſita ex, CM, MD, & ſub dupla, VE, & ſic ſolida ſimilaria ex eiſdem figuris genita iuxta communem regulam, CD.

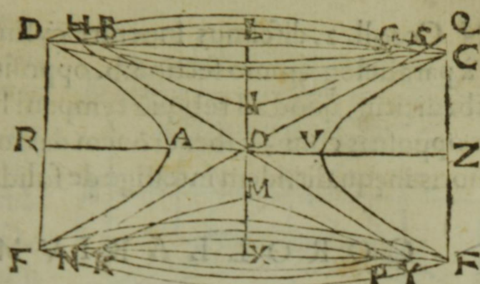
COROLLARIVM XX.

IN Prop. 20. expoſita eius figura, & vt fiat ſolitũ exemplum, ea circa axim, FE, reuoluta, vt ex, BE, fiat cylindrus, BC, & ex oppoſitis hyperbolis, BND, AMC, fiant conoides, BND, AMC, quæ pariter dicantur; Conoides oppoſitæ; patet cylindrum, BC, ad reliquum, demptis ab eodem oppoſitis conoidibus, AMC, BND, eſſe vt rectangulum, NEO, ad rectangulum, NOE, bis, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ME; & ſic eſſe quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex, BE, ad reliquũ, demptis ab eodem ſolidis ſimilaribus genitis ex ſemihyperbolis, BNF, AME, vel ſic ſolidum quodlibet ſimilare genitũ ex, BC, ad reliquum ab eodem, demptis ſolidis ſimilarib. genitis ex hyperbolis oppoſitis, BND, AMC, iuxta communem regulam, AC.



COROLLARIVM XXI.

IN Prop. 21. expoſita eius figura, & ea circa axim, LX, reuoluta, vt ex, DX, fiat cylindrus, DE, & ex figura, DAFEVC, ſolidum, DAFEVC, quod vocetur: Tympanum hyperbolicũ: & ex triangulis, HLO, OXN, oppoſiti coni, HOS, NOY, patet cylindrum, DE, ad tympanum, DAFEVC, eſſe vt quadratum, FE, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HS. Vel (vt aliter ibi explicatur) vt quadratum, RZ, ad quadratum, AV, vna cum rectangulo ſub, AZ, & ſexquitertia, ZV; & ſic eſſe quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex, DE, ad ſibi ſimilare genitum ex figura, DAFEVC, iuxta cõem regulã, FE.



COROLL. XXII. SECTIO PRIMA.

IN Prop. 22. ſi in ſuperioris figura ſupponamus, FR, eſſe æqualem ei, quæ tangens ſectionem, DAF, in, A, concluditur inter, A, & aſymptoton, ON, habetur cylindrum, DE, eſſe ſexquialterum tympani hyperbolici, DAFEVC, & hoc tympanum eſſe quadruplum conorum, NOY, HOS, & ſic eſſe ſolida ſimilaria ex eiſdem figuris genita iuxta communem regulam, DC.

SECTIO II.

IN Coroll. 1. habetur cylindrum, DE, ad tympanũ hyperbolicum, DAFEVC, demptis conis oppoſitis, HOS,

NOY, eſſe vt quadratum, DC, ad quadratum, AV, & in caſu pręſentis Prop. eſſe eorũ dupla, & ſic ſolida ſimilaria &c.

SECTIO III.

IN Coroll. 2. diſcimus inuenire cylindrum deſcriptum à parallelogrammo ſectionib. oppoſitis circumſcripto, vt ibi dicitur, quod ad reliquũ tympani hyperbolici, demptis oppoſitis conis, habeat rõnem datam, dummodo ea ſit maioris inęqualit. idem intellige de ſolidis ſimilaribus &c.

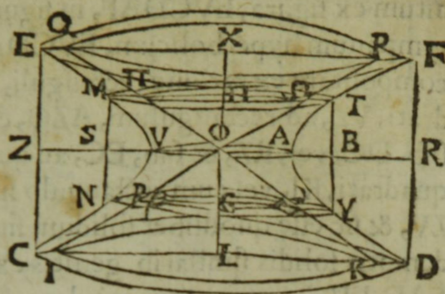
COROLLARIVM XXIII.

IN Prop. 23. aſſumpta eius figura, &, vt fiat exemplum, ea circa axim, RZ, reuoluta, vt ex, FC, fiat cylindrus, FC, & ex, TN, cylindrus, TN, & ex oppoſitis hyperbolis, FAD, EVC, oppoſitæ conoides, FAD, EVC, & ex, TAY, MVN, oppoſitæ conoides, TAY, MVN, patet ergo cylindrum, FC, dẽptis oppoſitis conoidibus, FAD, EVC, ad cylindrũ, TN, demptis oppoſitis conoidib. TAX, MVN, eſſe vt parallelepipedũ ſub, ZV, & baſi rectangulo, VOZ, cũ $\frac{3}{1}$. quadrati, ZV, ad parallelepipedum ſub, SV, baſi rectangulo, VOS, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, SV; & ſic eſſe quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex, FC, demptis ſolidis ſimilaribus genitis ex oppoſitis hyperbolis, FAD, EVC, ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ez, TN, demptis ſolidis ſimilaribus genitis ex oppoſitis hyperbolis, TAY, MVN, iuxta communem regulam, EC.

CO-

COROLLARIVM XXIV.

IN Prop. 24. expoſita eius figura, &, vt fiat exemplum, ea circa axem, XL, reuoluta, vt ex figura, EVCDAF, fiat tympanum hyperbolicum, EVCDAF, & ex figura, MVNYAT, fiat tympanũ hyperbolicum. MVNYAT, patet tympanum, EVCDAF, ad tympanum, MVNYAT, eſſe vt parallelepipedum ſub, XL, & quadrato, RZ, cum duplo quadrati, AV, ad parallelepipedum



ſub, HG, & quadrato, BS, cum duplo quadrati, AV; & ſic eſſe quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex figura, EVCDAF, ad ſibi ſimilare genitum ex figura, MVNYAT, iuxta communem regulam, CD.

COROLLARIVM XXV.

IN Prop. 25. viſa figura anteced. Coroll. in qua ex triangulis, QOP, IOK, geniti ſint coni oppoſiti, QOP, IOK, & ex triangulis, ΠΟΩ, ℞O&, coni oppoſiti, ΠΟΩ, ℞O&, patet tympanum, EVCDAF, demptis conis, QOP, IOK, ad tympanum, MVNYAT, demptis conis, ΠΟΩ, ℞O&, eſſe vt, XL, ad, HG; & ſic eſſe ſolidum ſimilare genitum ex figura, EVCDAF, demptis ſolidis ſimilaribus genitis ex triangulis, QOP, IOK, ad ſolidum ſimilare genitum ex figura, TAYNVM, demptis ſolidis ſimilaribus genitis ex triangulis, &O℞, ΩΟΠ, iuxta communem regulam, AV.

CO-

COROLLARIVM XXVI.

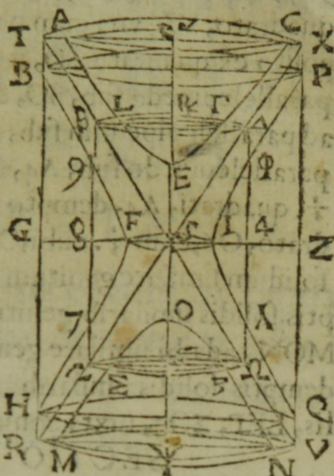
IN Prop. 26. visis figuris Corollarij 23.24.& supposito, FC, esse idem parallelogrammum, in vtrisq; figuris patet cylindrum FC, in figura Coroll.23. demptis oppositis conoidibus, FAD, EVC, ad tympanum hyperbolicum genitum ex figura, EVCDAF, in figura Corol.24. scilicet ad tympanum hyperbolicum, EVCDAF, habere rationem, compositam ex ratione rectanguli, AOZ, bis cum $\frac{2}{3}$. quadrati, VZ, ad rectangulum, AZO, & ex ratione rectanguli sub, DC, vel, RZ, & sub, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, KI, vel cum rectangulo sub, AZ, & sexquitertia, ZV, & sic esse quodlibet solidum similare genitum ex, FC, demptis solidis similarib. genitis ex oppositis hyperbolis, FAD, EVC, iuxta cōem regulam, EC, ad solidum similare sibi genitum ex figura, EVCDAF, iuxta regulam, CD.

COROLLARIVM XXVII.

IN Prop. 27. conspecta figura Coroll. 21. intelligantur descriptæ sectiones, BIG, KMP, quæ dicuntur cōiugatæ sectionibus, DAF, CVE, ex quibus in reuolutione genitæ fuerint oppositæ conoides, BIG, KMP, patet igitur cylindrum, DE, ad tympanum hyperbolicū, DAF, EVC, demptis oppositis conoidibus, BIG, KMP, esse vt parallelepipedum sub, ZC, & sub quadrato, ZQ, (quæ habetur extensa, ZC, ad asymptoton producta. s. ad, OS, cui occurrat in, Q,) ad parallelepipedū bis sub, XM, & quadrato, MO, cum cubo, MO, & amplius $\frac{1}{3}$. eiusdem cubi; & sic esse quodlibet solidum similare genitum ex, FC, ad sibi similare genitum ex figura, DAFEVC, demptis solidis similaribus genitis ex oppositis hyperbolis, BIG, KMP, iuxta communem regulam, FE, vel, AV.

COROLL. XXVIII. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 28. illius assumpta figura, eadem reuoluatur circa axem, &Y, vel, GZ, sit autem reuolutio circa, &Y; patet ergo cylindrũ genitum ex, TV, nempè, TV, ad reliquum, ab eodem demptis solidis genitis ex quatuor hyperbolis coniugatis, BFH, PIQ, AEC, MON, esse vt cubus, ZV, vel, SY, ad parallelepipedum sub, QV, & quad. ZV, vna cum parallelepipedo sub, ZQ, & sub composito ex ⅓. quadrati, ZQ, & quadrato, SO, ab his tamen dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, OY, cum ⅓. cubi, OY, & sic esse solidum similare quodcunque genitum ex parallelogrammo, TV, ad sibi similare genitum ex figura, TBFHRVQIPX, demptis solidis similarib. genitis ex oppositis hyperbolis, AEC, MON, iuxta cõem regulã, RV; eadem verò esse ostendemus sumpta pro regula ipsa, VX, & reuolutione facta circa axẽ, GZ.



SECTIO POSTERIOR.

IN Coroll. colligitur cylindrum, TV, ad cylindrum, TP, &, HV, cum tympano, BFHQIP, esse vt cubus, YS, ad parallelepipedum sub, KY, & quadrato, YS, vna cum parallelepipedo sub, KS, & composito ex quadrato, SO, & ⅓. quadrati, SK; & sic solida similaria ex eisdem figuris genita iuxta ibi assumptam regulam, RV.

COROLL. XXIX. SECTIO PRIOR.

IN Propos. 29. visa eius figura, eaque reuoluta circa axem, &Y, vt in anteced. conspicitur, patet solidum in reuolutione descriptum à figura residua, demptis à paral-

lelo-

lelogrammo, TV, quatuor hyperbolis, BFH, PIQ, AEC, MON, ad solidum descriptum in reuolutione ex figura residua, demptis à parallelogrãmo, βΩ, quatuor hyperbolis, 9F7, ΦIΛ, LEΓ, ΣO3, esse vt parallelepipedum sub, QV, & quadrato, VZ, vna cum parallelepipedo sub, QZ, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, QZ, ab his dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, OY, & $\frac{1}{3}$. cubi, OY, ad parallelepipedum sub, ΛΩ, & quadrato, Ω4, vna cum parallelepipedo sub, Λ4, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{3}$. quadrati, Λ4, dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, O6, cum $\frac{1}{3}$. cubi, O6: Sic etiam patet esse quodlibet solidum similare genitum ex figura, TBFHRVQIPX, demptis; solidis similarib. genitis ex oppositis hyperbolis, AEC, MON, ad sibi similare genitum ex figura, B9F72ΩΛIΦΛ, demptis solidis similaribus genitis ex oppositis hyperbolis, LEΓ, ΣO3, iuxta communem regulam, RV.

SECTIO POSTERIOR.

IN Coroll. colligitur eadem solida, genita nempè ex figuris, TBFHRVQIPX, β9F72ΩΛIΦΔ, iuxta communem regulam, RV, nihil ab eis dempto, esse vt dicta parallelepipeda, nihil pariter ab eisdem dempto.

SCHOLIVM.

SI verò intelligeremus, reuolutionem parallelogrammi, TV, non fieri circa, &Y, sed circa, XV, vel illi parallelam, seu circa, TX, aut illi parallelam, quoniam figura, TBFHRVQIPX, exẽpli gratia, talis est, qualem postulant Propos. 29 & 30. Lib. 3. vt facilè patet, ideò cylindrus, vel fascia cylindrica genita ex parallelogrammo, TV, ad solidum genitum in tali reuolutione ex dicta figura, TBFHRVQIPX, erit vt dictum parallelogrãmum, TV, ad dictam figuram, TBFHRVQIPX. Mitto autem hic pariter quamplurima, quæ adhuc circa hæc indaganda supersunt, vt Lectori in his laborandi locus relinquatur. Hæc verò circa hyperbolam, & oppositas sectiones pro nunc adinuenisse sit satis.

Finis Quinti Libri.

GEOMETRIÆ CAVALERII

LIBER SEPTIMVS.

In quo quæcumque in antecedenribus Libris methodo indiuisibilium demonstrata fuere, alia ratione, ab eadem independente, breuiter ostenduntur.

PRÆFATIO.



EOMETRIÆ, in sex prioribus Libris, per eam, quam indiuisibilium methodum non incongruè appellamus, hactenus promotæ, talis fuit, qualis hucusq; videri potuit, structura, necnon talia, qualia iacta sunt fundamenta. Illa quidem adeò firma, atq; inconcussa, esse decuit, vt velut adamantina summorum ingeniorum tamquam arietum ictibus pulsata ne minimum quidem nutantia agnoscerentur: Hoc enim Mathematicarum dignitati, ac summæ certitudini, quam præ omnibus alijs humanis

ſcientijs, nemine philoſophorũ reclamante, ipſæ ſibi vindicarunt, maximè conuenire manifeſtum eſt. An id ego ſufficienter præſtiterim aliorum iudicio relinquam; vnicuique enim hæc perlegenti ex animi ſui ſententia iudicare licebit. Haud quidem me latet circa continui cõpoſitionem, necnon circa infinitum, plurima à philoſophis diſputari, quæ meis principijs obeſſe non paucis fortaſſe videbuntur, propterea nempè hæſitantes, quod omnium linearum, ſeu omnium planorum, conceptus cimerijs veluti obſcurior tenebris inapprehenſibilis videatur: Vel quod in continui ex indiuiſibilibus compoſitionem mea ſententia prolabatur: Vel tandem quod vnum infinitum alio maius dari poſſe pro firmiſſimo Geometriæ ſternere auſerim fundamento, circa quę millibus, quæ paſſim in ſcholis circũferuntur argumentis, ne Achillea quidem arma reſiſtere poſſe exiſtimantur. His tamen ego per ea, quæ Lib. 2. Prop. 1. ac illius Scholio pręcipuè declarata, ac demonſtrata ſunt, ſatisfieri poſſe dijudicaui: quoad conceptum .n. omnium linearum, ſeu omnium planorum efformandum, facilè hoc per negationem nos conſequi poſſe exiſtimaui, ita nempè vt nulla linearum, ſeu planorum, excludi intelligatur. Quoad continui autẽ compoſitionem manifeſtum eſt ex præoſtenſis ad ipſum ex indiuiſibilibus componendum nos minimè cogi, ſolum enim continua ſequi indiuiſibilium proportionem, & è conuersò, probare intentũ fuit, quod quidem cum vtraq; poſitione ſtare poteſt. Tandem verò dicta indiuiſibilium aggregata nõ ita pertractauimus vt infinitatis rationem, propter infinitas lineas, ſeu plana, ſubire videntur, ſed qua-

tenus

tenus finitatis quandam conditionem, & naturam sortiuntur, vt propterea & augeri, & diminui possint, vt ibidem ostensum fuit, si ipsa prout diffinita sunt accipiantur. Sed his nihilominus fortè obstrepent Philosophi, reclamabũtq; Geometræ, qui purissimos veritatis latices ex clarissimis haurire fontibus cõsuescunt sic obijcientes. Hic dicendi modus adhuc videtur subobscurus, durior quam par est euadit hic omnium linearum, seu omnium planorum conceptus, quapropter hunc tuæ Geometriæ ceu Gordium nodum aut auferas, aut saltem frangas, nisi dissoluas. Fregissem quidem fateor, ò Geometræ, vel omninò à prioribus Libris sustulissem, nisi indignum facinus mihi visum fuisset noua hæc Geometriæ veluti mysteria sapientissimis abscondere viris; vt, his fundamentis, quibus tot conclusionum ab alijs quoq; ostensarum veritates adeò mirè concordant, alicuius industria melius fortè concinnatis, huiusce nodi exoptatam illis dissolutionem aliquando præstare possint. Interim qualiscumq; mea fuerit illius tentata dissolutio, ipsum tamen in præsenti Libro, nouis alijs denuò stratis fundamentis, quibus ea omnia, quæ indiuisibilium methodo in antecedentibus Libris iam ostensa sunt, alia ratione ab infinitatis exempta conceptu cõprobantur, omninò è medio tollendum esse censui. Hoc verò præcipuè à nobis factum est, tum vt apud eos, quibus nostra hæc indiuisibilium methodus minus probabitur, non indignè nostram hanc de Continuis doctrinam Geometriæ titulo insigniri clarius elucescat; tum etiam vt appareat, quod non leui ratione ducti, cum possemus cuncta per indiuisibilium

methodum præostensa, tantum per huius Libri fundamenta demonstrare, illam quoque methodum tanquam nouam, ac consideratione dignam, fuimus prosequuti. Nodum verò ipsum, cui negotium facesseret, non inaniter in præcedentibus Libris relictum esse, quinimmo nos ipsum alicui Alexandro aut frangendum, aut iuxta scrupolosissimi cuiusq; Geometræ vota dissoluendum, meritò reseruasse, non ineptè quispiam iudicabit.

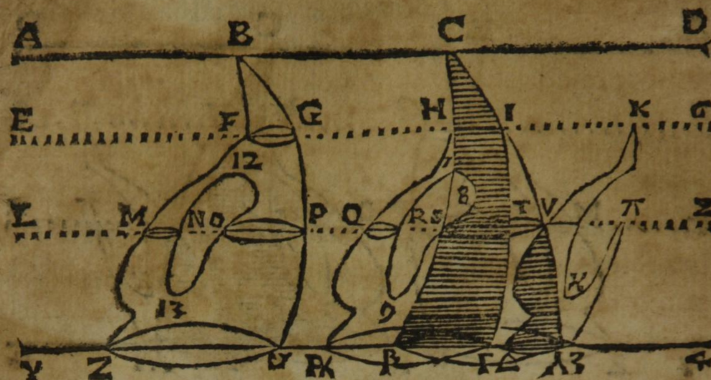
THEOREMA I. PROPOS. I.

Figuræ planæ quæcunq; in eisdem parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; eisdem parallelis æquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscumq; rectæ lineæ portiones sunt æquales, etiam inter se æquales erunt. Et figuræ solidæ quæcumq; in eisdem planis parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; planis eisdem planis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscunq; sic ducti plani in ipsis solidis figuræ planæ sunt æquales, pariter inter se æquales erunt. Dicantur autem figuræ æqualiter analogæ, tum planæ, tum ipsæ solidæ inter se comparatæ, ac etiam iuxta regulas lineas, seu plana parallela, in quibus esse supponuntur, cum hoc fuerit opus explicare.

Sint quæcunq; planæ figuræ, BZ&, CβA, in eisdem parallelis, AD, Y4, constitutæ, ductis autem ipsis, AD, Y4, quibuscunque parallelis, E6, LΣ, portiones ex. g. ipsius,



E6, in figuris cōceptæ, nempè, FG, HI, inter ſe ſint æquales, necnon ipſius, LΣ, portiones, MN, OP, ſimul ſumptæ (ſit enim figura, BZ&, ex.g. intus caua ſecundū ambitum, 12, N, 13, O,) ipſi, SV, ſint pariter æquales, & hoc contingat in quibuſcunq; alijs ipſi, AD, æquidiſtantibus. Dico figuras, BZ&, CβΛ, inter ſe æquales eſſe. Aſſumpta ergo alterutra figurarum, BZ&, CβΛ, vt ipſa, BZ&, cum parallelarū, AD, Y4, portionibus ipſi conterminantibus, nempè cum, AB, Y&, ſuperponatur reliquæ figuræ, CβΛ, ita tamen vt ipſæ, AB, Y&, cadant ſuper, BD, &4, vel ergo tota, BZ&, congruit toti, CβΛ, & ita cum ſibi congruant æquales erunt, vel non, aliqua tamen pars eſto, quod congruerit alicui parti, vt, CIΓβ587, pars figuræ, BZ&, ipſi, CIΓβ587, parti figuræ, CβΛ. Manifeſtum eſt autem ſuperpoſitione figurarum taliter effecta, vt portiones parallelarum, AD, Y4, ipſis figuris cōterminantes ſint inuicem ſuperpoſitæ, quod quæcumq; rectæ lineæ in figuris conceptæ erant ſibi in directum, manent etiam ſibi in directum, vt ex.g. cum, MN, OP, eſſent in directum ipſi, SV, dictæ ſuperpoſitione facta, manent etiam ſibi in directum, nempè, QR, ST, in directum ipſi, SV, eſt .n. diſtantia ipſarum, MN, OP, ab, AD, æqualis diſtantiæ, SV, ab eadem, AD, vnde



de quotiescunque, AB, extendatur super, BD, vbicunque hoc fiat, semper, MN, OP, manebunt in directum ipsi, SV, quod & de cæteris quibuscunq; ipsi, AD, parallelis in vtraque figura liquidò apparet. Quod verò pars vnius figuræ, vt, BZ&, congruat necessariò parti figuræ, CβΛ, & non toti, dum fit superpositio tali lege, quali dictum est, sic demonstrabitur. Cum .n. ductis quibuscunq; ipsi, AD, parallelis conceptæ in figuris ipsarum portiones, quæ erant sibi in directum, adhuc post superpositionem maneant sibi in directum, illæ verò ante superpositionem essent ex hypotesi æquales, ergo post superpositionem portiones parallelarum ipsi, AD, in figuris superpositis conceptæ erunt pariter æquales, vt ex.g. QR, ST, simul sumptæ æquabuntur ipsi, SV, ergo nisi vtræque, QR, ST, cōgruant toti, SV, congruente parte alicui parti, vt, ST, ipsi, ST, erit, QR, æqualis ipsi, TV, &, QR, quidem erit in residuo figuræ, BZ&, superpositæ, TV, verò in residuo figuræ, CβΛ, cui fit superpositio. Eodem modo ostendemus cuicunq; parallelæ ipsi, AD, conceptæ in residuo figuræ, BZ&, superpositæ, quod sit, HR597, respondere in directū æqualem rectam lineam, quæ erit in residuo figuræ, CβΛ, cui fit superpositio, ergo superpositione hac lege facta, cum superest aliquid de figura

gura superposita, quod non cadat super figuram, cui sit superpositio, necesse est reliquæ figuræ aliquid etiam superesse, super quod nihil sit superpositum. Cum autem vnicuiq; rectæ lineæ parallelæ, AD, conceptæ in residuo, vel residuis (quia possunt esse plures figuræ residuæ) figuræ, BZ&, siue, C℞Γ, superpositæ, respondeat in directum in residuo, vel residuis figuræ, CβΛ, alia recta linea, manifestũ est has residuas figuras, siue residuarum aggregata, esse in eisdem parallelis, cum ergo residua figura, H℞597, sit in parallelis, E6, Y4, etiam residua figura, vel residuarum aggregatum, ipsius, Cβλ, (quod sit ipsa frusta, IΓλ, 785,) erit in eisdem parallelis; E6, Y4, si .n. non pertingeret hinc inde ad parallelas, E6, Y4, vt ex. g. si pertingeret quidem vsq; ad, E6, non tamen vsq; ad, Y4, sed tantum vsque ad, LΣ, conceptis rectis lineis in frusto, Q℞β59R, ipsi, AD, parallelis non responderent in residuo figuræ, Cβλ, seu ex residuis aggregato, aliæ rectæ lineæ, vt superius necesse esse probatum est, sunt ergo hæc residua, vel residuorum aggregata in eisdem parallelis, & in illis conceptæ parallelarum ipsis, AD, Y4, portiones inter se sunt æquales, vt supra ostendimus, ergo residua, seu residuorum aggregata, sunt eius conditionis, cuius ipsas, BZ&, CβΛ, figuras iam esse suppositum fuit, idest æqualiter analoga. Fiat ergo denuo residuorum superpositio, ita tamen vt parallelæ, GH, &β, super parallelas, HK, β4, sint constitutæ, & congruat pars, VΔλ, frusti, H℞597, parti, VΔλ, frusti, IΓλ, ostendemus ergo vt supra, dum vnius habetur residuum haberi etiam alterius, & hæc residua, siue residuorum aggregata, esse in eisdem parallelis, sit autem ad figuram, BZ&, spectans residuũ, KVλ3ΠX, ad figurã autem, Cβλ, sint pertinentia residua, IΓΔV, 785, quorum aggregatum est in eisdem parallelis cum residuo, KVλ3ΠX, nempè in parallelis, E6, Y4, si ergo horum residuorum fiat denuò superpositio, ita tamen vt parallelæ, in quibus existunt, sint semper ad

inui-

inuicẽ superpositæ, & hoc semper fieri intelligatur, donec tota figura, BZ&, fuerit superposita, dico totam debere ipsi, Cβλ, congruere, alioquin si esset aliquod residuum vt figuræ, Cβλ, cui nihil esset superpositum, esset etiam aliquod residuum figuræ, BZ&, quod non esset superpositum, vt supra ostendimus necesse esse, ponitur autem totam, BZ&, esse superpositam ipsi, Cβλ, ergo ita sunt ad inuicem superpositæ, vt neutrius residua habeantur, ergo ita sunt superpositæ, vt sibi congruant, ergo figuræ, BZ&, Cβλ, inter se sunt æquales.

Sint nunc in eodem schemate duæ figuræ solidæ quæcunque, BZ&, Cβλ, in eisdem planis parallelis, AD, Y4, constitutæ, ductis autem quibuscunq; planis, Eσ, LΣ, prę-fatis æquidistantibus, sint conceptæ in solidis figuræ, quæ iacent in eodem plano, semper inter se æquales, vt, FG, æqualis, HI, &, MN, OP, simul sumptæ (sit .n. solida figura ex. g. BZ&, intus vtcunq; caua secundum superficiem, 12, N, 13, O,) æquales ipsi, SV. Dico easdem solidas figuras æquales esse. Si .n. solidum, BZ&, cum portionibus, AB, Y&, planorum, AD, Y4, ipsi conterminantibus, solido, Cβλ, ita superposuerimus, vt planum, AB, sit in plano, AD, &, Y&, in plano, Y4, ostendemus (vt fecimus superius circa parallelarum ipsi, AD, conceptas in figuris planis, BZ&, Cβλ, portiones) figuras in solidis, BZ&, Cβλ, conceptas, quæ erant in eodem plano, etiam post superpositionem manere in eodem plano, & ideò adhuc æquales esse figuras in superpositis solidis conceptas, & ipsis, AD, Y4, parallelas. Nisi ergo totum solidum toti congruat in prima superpositione, relinquentur residua solida, vel ex residuis composita in vtroq; solido, quæ non erunt ad inuicem superposita, cum .n. ex. g. figuræ, QR, ST, æquentur figuræ, SV, dempta communi figura, ST, reliqua, QR, æquabitur reliquæ, TV, hocq; continget in quouis alio plano ipsi, AD, parallelo occurrente solidis, CRΓ, Cβλ, ergo

go semper habentes residuum vnius solidi, habebimus etiam residuum alterius, & patebit, iuxta methodum adhibitã in priori parte huius Propositionis circa figuras planas, residua solida, vel residuorum aggregata semper esse in eisdem parallelis planis, vt residua, H℞597, IΓΛ, 785, esse in planis parallelis, E6, Y4, ac æqualiter analoga: si ergo hęc residua adhuc superponantur, ita vt planum, EH, locetur in plano, H6, &, Yβ, in, β4, & hoc semper fieri intelligatur, donec quod superponitur, vt, BZ&, totum fuerit assumptum, tandem ipsum totum, BZ&, congruet toti, CβΛ, nisi .n. toto solido, BZ&, ipsi, CβΛ, superposito, ipsa sibi congruerent, esset aliquod residuum vnius, vt solidi, CβΛ, ergo etiam esset aliquod residuum solidi, C℞Γ, seu, BZ&, illudq; non esset superpositum, quod est absurdum, ponitur .n. iam totum solidum, BZ&, esse ipsi, CβΛ, superpositum, non ergo erit aliquod residuum in ipsis solidis, ergo sibi congruent, ergo dictæ figuræ solidæ, BZ&, Cβλ, inter se æquales erunt, quæ fuerunt demonstranda. Præfatæ autem figuræ, vt supra innuimus, dicatur æqualiter analogæ, & si opus erit, iuxta regulas lineas parallelas, seu plana parallela, AD, Y4.

SCHOLIVM.

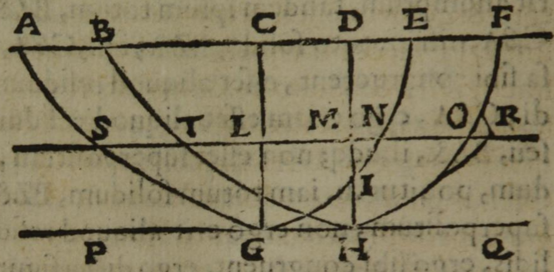
CVm antecedens Prop. maximi sit momenti, vt in sequentibus apparebit, aliusq; modus priorem partem demonstrandi, stylo Archimedeo haud absimilis, menti succurrerit, idipsum ne pereat in Lemmata distributum hic subiungere placuit.

LEMMA PRIMVM.

SI in eadem, vel æq[illegible]alibus basibus, & in eisdem parallelis figuræ [illegible]næ æqualiter analogæ iuxta easdem bases fuerint constitutæ, ita tamen

vt quæcunq; æquidiſtantium baſibus linearum portiones in eiſdem cõceptæ figuris integræ ſint, ac eidem baſi, vel baſibus æquales, ipſæ pariter figuræ inter ſe æquales erunt.

Sint in eadem baſi, GH, ſeu in æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis, AF, PQ, figuræ planæ, AGHB, EGHF, ęqualiter analogæ iuxta eandem baſem, GH, ſeu baſes ęquales iã dictas, extẽſa verò quacunq; ipſis, PQ, AF, parallela, SR, eiuſdem portiones captæ in pręfatis figuris, vt, ST, NO, integræ ſint, ac æquales baſi, GH, ſeu dictis æqualibus baſibus. Dico etiam præfatas figuras inter ſe æquales eſſe. In eadem .n. baſi, GH, ſeu in altera dictarum æqualium baſium ſit conſtitutum, & in eiſdem parallelis, AF, PQ, quodcunq; parallelogrammum, CH, in quo portio concepta ipſius, SR, ſit, LM, quæ erit æqualis ipſi, GH, & conſequenter ipſi, NO, vnde addita communi, MN, fiet, LN, æqualis, MO. Eodem modo autem oſtendemus, CE, eſſe æqualem, DF, & reliquas huiuſmodi ſimiliter adæquari. Nunc aſſumpto trilineo, ECG, & poſito, C, in, D, &, CG, in, DH, cadet, G, in, H, quia, CG, DH, ſunt æquales, cadente verò trilineo, ECG, ſuper, FDH, extendetur, CE, ſuper, DF, cum angulus, FDH, exterior ſit æqualis interiori, ECG, parallelarum, DH, CG, & punctum, E, erit in, F, ambituſque, ENG, cadet ſuper ambitum, FOH, ſi enim non, eſto quod aliquod punctum ambitus, ENG, non



cadat super, FOH, cadet ergo vel extra trilineum, FDH, vel intra, cadat extra, vt in, R, ita vt ambitus, ENGH, cadat vt, FRH, erit ergo, MR, maior, MO, sed, MR, est æqualis, LN, ergo, LN, erit maior, MO, sed est etiam æqualis eidem, MO, ex demonstratis, ergo esset æqualis, & maior eadem, MO, quod est absurdũ, non ergo aliquod punctum ambitus, ENG, cadit extra trilineum, FDH, eodem modo probabitur, nec cadere intra eundem trilineum, ergo ambitus, ENG, cadet super ambitum, FRH, congruens totus toti, & consequenter etiam trilineus, ECG, congruet trilineo, FDH, & illi æqualis erit, vnde ablato communi trilineo, DIE, & addito communi trilineo, GIH, fiet, EGHF, figura æqualis parallelogrammo, CH. Eodem modo ostendemus figuram, AGHB, æquari eidem, CH, ergo figuræ, AGHB, EGHF, inter se æquales erunt. Cum autem dictæ figuræ fuerint in æqualibus basibus, tunc cõstituentes super vnamquamq; parallelogrammum in eisdem parallelis cum ijsdem positum, concludemus etiam dictas figuras æquales esse, probantes eodem modo descriptis parallelogrammis adæquari, quæ quidem inter se erunt æqualia, quod demõstrare opus erat. Hæc autem vocentur parallelogramma curuilinea, cum, AG, BH, EG, FH, fuerint curuæ lineæ, cum verò fuerint rectæ lineæ, parallelogramma rectilinea ad illorum differentiam eadem appellabimus, sed vtraq; in genere, si libuerit, nomine parallelogrammi tantum etiam nuncupabimus.

LEMMA II.

SI in æqualibus rectis lineis, tamquam in basibus, & in eisdem parallelis, fuerint quæcunq; planæ figuræ, æqualiter analogæ iuxta dictas bases; portiones autem æquidistantium

quotcunq; ipsis basibus linearum in figuris conceptæ integræ fuerint, ac in altera dictarum figurarum sic se habentes, vt quælibet propinquior basi sit maior remotiori, dictæ figuræ inter se æquales erunt.

Sint in æqualibus rectis lineis, QP, TY, tamquam in basibus, & in eisdem parallelis, AL, QY, quæcunq; planæ figuræ, CQPD, HTYL, æqualiter analogæ iuxta dictas bases, QP, TY, ductis autem quotcunq; basibus parallelis, vt, ΔX, ΓV, βK, earum in figuris conceptæ portiones integræ sint, ac in altera figurarum propinquior basi maior remotiori, vt si conceptæ in, CQPD, sint, NR, I&, EZ, & in, HTYL, ipsæ, SX, RV, OK, istæ quidem integræ sint, necnon ex. g. in figura, CQPD, NR, maior, I&; I&, maior, EZ, & sic in cæteris (erit enim etiam, SX, maior, RV, &, RV, maior, OK, & sic in cæteris, cum sint æqualiter analogæ iuxta bases, QP, TY.) Dico figuras, CQPD, HTYL, inter se æquales esse. Si .n. non sint æquales, altera earum maior erit, sit maior, HTYL, ipsa, CQPD, spatio, ✣, tunc minoris figuræ basis, QP, moueatur versus, AD, semper ipsi, AD, æquidistanter, ac manente iugiter puncto, P, in linea, PD, donec congruat ipsi, AD, igitur punctum, Q, describet lineam, QΓA, &, QP, describet parallelogrammũ, AP, rectilineum, seu curuilineum, prout, AQ, DP, fuerint rectæ, vel curuæ, erit autem, QΓA, tota extra figuram, CQPD, cum parallelæ, QP, in figura, CQPD, ipsi, QP, propinquiores remotioribus sint semper maiores (quo pacto data basi, & curua linea, tota in eodem plano cũ ipsa basi, ac vni extremorũ eiusdem conterminante, parallelogrammum curuilineum, ab ijsdem apprehensum, describere docemur) similiter compleatur parallelogrammum, FY, ducaturque, ΓV, parallela, QY, bifariam diuidens altitudi-

Post. 1.

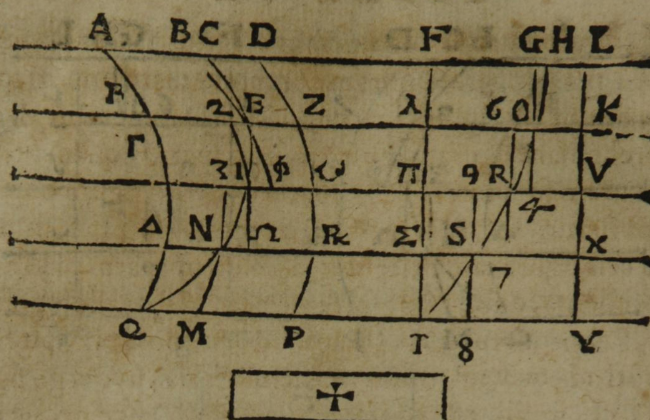
nem

nem figurarum, CQPD, HTYL, respectu, QY, assumptam, secansque, AQ, in, Γ, CQ, in, I, DP, in, &, FT, in, Π, HT, in, R, &, LY, in, V, per, ΓV, igitur diuidetur parallelogrã-mum, AP, in æqualia parallelogramma, A&, &Q: rursus autem per alias ipsi, QY, parallelas diuidantur dictæ altitudines portiones bifariam, & sic semper fiat (sectis insimul constitutis parallelogrammis, quæ idcircò etiam bifariam diuidentur) donec ad parallelogrammum, vt ad, ℞Q, deueniatur minus spatio, ✠, sit igitur sectum, AP, in parallelogramma æquè alta, AZ, β&, Γ℞, ΔP, per æquidistantes lineas, βK, ΓV, ΔX, quæ secent lineas, AQ, in punctis, β, Γ, Δ, CQ, in, E, I, N, DP, in, Z, &, ℞, FT, in, ΛΠΣ, HT, in, O, R, S, & tandem, LY, in, K, V, X, compleanturq; parallelogramma, BZ, 2&, 3℞, ΔP, iuxta descriptionem superius traditam; erunt .n. lineæ, BE, 21, 3N, ΔQ, extra figuram, CQPD, quod patebit, veluti, AQ, extra, CQPD, similiter cadere ostensa est, & consequenter figura ex parallelogrammis, BZ, 2&, 3℞, ΔP, composita comprehendet spatium, CQPD, sint autem etiam completa parallelogramma, E&, I℞, NP, quorum descriptæ lineæ, EΦ, IΩ, NM, intra figuram, CQPD, quidem cadere ostendemus ex eadem ratione, quod dictæ parallelæ ipsi, PQ, propinquiores

Elicit. ex ant. Lem.

1. Decimi Elem.

res



res remotioribus sint semper maiores, & subinde patebit figuram ex parallelogrammis, E&, I℞, NP, compositam comprehendi à figura, CQPD. Tandem compleantur parallelogramma quoque, GK, 6V, 9X, ΣY, ex quibus compositam figuram spatium, HTYL, eadem methodo cõprehendere demonstrabimus. Cum ergo figura comprehendens spatium, CQPD, superet ab eo comprehensam parallelogrammis, 6Z, 2Φ, 3Ω, ΔM, hoc est parallelogrammo, ΔP, quod est minus spatio, ✠, dicta comprehendens figura superabit, CQPD, multò minori spatio, quam sit, ✠, sed, HTYL, superat, CQPD, ex hypotesi spatio, ✠, ergo figura comprehendens, CQPD, minor est, HTYL, & multò minor figura ipsum, HTYL, comprehendente, quæ iam descripta fuit, hoc autem est absurdum, cum .n. parallelogrammum, BZ, æquetur ipsi, Gk, 2&, 6V, 3℞, 9X, &, ΔP, ΣY, tota toti adæquatur contra prædemonstrata, non ergo figura, HTYL, maior est, CQPD.

Ex antec. Lem.

Sit nunc eadem minor, si possibile est, eodem spatio, ✠, igitur descriptis circa, CQPD, eisdem figuris, ita vt comprehendens, CQPD, superet ab eo comprehensam minori spatio, quam sit, ✠, compleantur parallelogramma, OV, RX, SY, ex quibus compositam figuram, vt supra à spatio,

HTYL,

HTYL, comprehendi ostendemus. Igitur si comprehendens, CQPD, superat figuram comprehensam minori spatio, quam sit, ✠, ipsum spatium, CQPD, superabit ab eo comprehensam figuram multò minori spatio, quam sit, ✠, idem autem superat, HTYL, spatio, ✠, ergo figura cõprehensa à spatio, CQPD, maior erit spatio, HTYL, & multò maior erit figura iam descripta, ab eodem spatio, HTYL, comprehensa, quod est absurdum, cum .n. parallelogrammum, E&, æquetur, OV, I℞, ipsi, RX, necnon, NP, ipsi, SY, tota toti adæquatur contra prædemõstrata, nec ergo figura, HTYL, minor esse potest figura, CQPD, sed neque eadem maior, vt ostensum est, ergo eidem æqualis erit, quod demonstrare oportebat. Vnamquamque autem dictarum figurarum, CQPD, HTYL, præfatas conditiones habentium, figuram in alterã partem deficientem appellabimus, regula basi, seu quacunq; illi æquidistante. Ex antec. Lem.

LEMMA III.

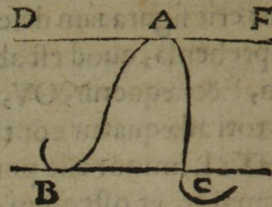
SI curua linea quęcunq; tota sit in eodem plano, cui occurrat recta in duobus punctis, aut rectis lineis, vel in recta, & puncto, poterimus aliam rectam lineam præfatæ æquidistantem ducere, quæ tangat portionem curuæ lineę inter duos prędictos occursus continuatam.

DEFINITIO. ✠

TAngere autem dico rectam lineam aliam quamcumque curuam totam in eodem plano cum ea existentem, cum ipsa recta linea siue in puncto, siue in recta linea, curua occurrente, eadem curua vel

tota est ad eandem partem, vel illius nihil est ad alteram partem illi occurrentis recta lineæ.

Sit curua linea, BAC, tota in eodem existens plano, cui recta, BC, occurrat in duobus punctis, seu rectis lineis, vel in recta, & puncto, B, C. Dico nos aliam rectã ipsi, BC, æquidistantem ducere posse, quæ tangat portionem curuæ lineæ inter duos occursus, B, C, continuatam. Quoniam ergo recta est, BC, & curua, BAC, ideò inter se spatium comprehẽdent, figuramque, vt, BAC, constituent, ergo possibile erit figuræ, BAC, respectu rectæ, BC, verticem inuenire, sit is punctum, A, per quod ducatur, DF, parallela, BC, igitur, BF, tanget figuram, BAC, ergo totus ambitus, BAC, est ad eandem partem rectæ, DF, vel nihil est saltem ad alteram partem, si enim aliqua illius portio esset ad alteram partem rectæ, DF, iam recta, DF, secaret figuram, BAC, quod est absurdum, ergo recta, DF, tangit curuam, BAC, igitur possibile est, &c.



1. lib 1.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est quomodo ducenda sit recta linea datam curuam totam in eodem plano cum ea existentem contingens, quæ quidem data recta linea sit æquidistans.

LEMMA IV.

SI proposita quęcumque figura plana vni regulę parallelis quotcumque lineis ita secari possit, vt cõceptę in figura rectę lineę integrę semper

existant: Ipsa ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, seu ex figuris in alteram partem deficientibus, regula eadem, componetur.

Sit quæcumque figura plana, SPFR, talis tamen, vt secta quotcumq; vni regulæ, vt, FE, parallelis, conceptæ in ipsa rectæ lineæ integræ sint. Dico ipsam vel ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram partem deficientibus, reg. eadē, FE, cōponi. Sint .n. ductę, SA, FE, oppositæ tāgentes figuræ, SPFR, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumq; recta linea, AE, moueatur autem, FE, versus, SA, semper æquidistanter eidem, SA, donec illi congruat, interim verò pūctū, E, ita in ipsa feratur, vt describat lineam, ENA, cum, AE, figuram, ANE, comprehendentē, quæ eidem, SPFR, sit æqualiter analoga iuxta regulam, FE; in eadem integris existētibus parallelis ipsi, FE, ad ambitum, ANE, terminantibus: rursus feratur recta linea, AE, versus ambitum, ANE, semper ipsi, AE, æquidistanter donec totam pertransierit figuram, ANE, adnotentur autem contactus lineæ sic decurrentis in ambitu, ANE, vel enim tanget in linea, aut lineis, vel in punctis, & lineis, vel tantum in punctis, esto quod fiat contactus in recta, LM, & in puncto, N, transeantq; per puncta, L, M, N, rectæ lineæ regulæ, FE, parallelæ, HD, QC, PB, secantes ambitū figuræ, SPFR, in punctis, P, Q, H, I, O, R, & rectam, AE, illi punctis, B, C, D, nullusque alius factus fuerit contactus in ambitu, ANMLE. Quoniam ergo à puncto, N, ad, A, nullus datur contactus, erit, ANB, figura in alteram

Ex hanc. Lem.

1. lib. 1.

partem, nempè versus, A, deficiens, hoc est quælibet in figura, ANB, parallela, NB, erit maior remotiori, si enim non, esto quod aliqua vt, YT, non sit maior remotiori, XV, ad ambitum terminata, vel ergo erit illi æqualis, vel eadem maior, sit illi æqualis, & iungatur, YX, hæc ergo erit parallela, AE, & occurrit ambitui in duobus punctis, Y, X, ergo possibile erit ducere rectam lineam ipsi, YX, seu, AE, parallelam, tangentem portionem curuæ lineę, hoc est ambitus, AN, inter duos occursus, Y, X, continuatam, quod est contra suppositũ: quod si dicatur, YT, esse minorẽ, XV, multò magis cõuincetur præfatum absurdum, ergo, YT, erit maior, XV, & quælibet, NB, propinquior remotiore maior, ergo figura, ANB, erit in alteram partem deficiens: eodem modo autem ostendemus etiam, NMCB, LED, esse figuras in alteram partem deficientes, LMCD, autem manifestum est esse parallelogrammum rectilineum, ergo in figura, SPFR, ipsa, SPR, quæ est æqualiter analoga ipsi, ANB, erit figura in alteram partem deficiens, sic etiam, PQOR, HFI, QHIO, verò erit parallelogrammum rectilineum, seu curuilineum, prout, QH, OI, rectæ, vel curuæ, esse possunt, ergo figura, SPFR, componitur ex figuris in alteram partem deficientibus, ac ex parallelogrammo rectilineo, seu curuilineo, regula, FE, quod ostendere opus erat.

Ex antec. Lem.

COROLLARIVM.

Hinc habetur figuram, SPFR, ipsi, ANE, æqualem esse, & vniuersaliter figuras planas æqualiter analogas, in quibus earum regulæ æquidistantium quotcunq; linearum concepta portiones integræ sunt, inter se æquales esse.

Proposit. antecedens, aliter, quoad priorem partem, ostensa.



Sint quæcumque figuræ planę æqualiter analogæ iuxta regulam, GM, ipsæ, BHIC, DQK, quarum oppositæ tangentes, AF, GM, regula pariter, GM, parallelarum autem ipsi, GM, quotcumque portiones in vnaquaque dictarum figurarum integræ sint, siue non. Dico easdem æquales esse. Incidat ergo parallelis, AF, GM, quomodocumque recta linea, EL, in eisdem terminata, moueatur autem, GM, versus, AF, semper eidem, AF, æquididistanter donec illi congruerit, interim autem vnum punctum moueatur in eadem, GM, sic mota, describens ambitum, LβE, figuræ æqualiter analogæ ipsi, DQK, & aliud punctum in eadem motum ad aliam partem, EL, describat ambitum figuræ, EYL, æqualiter analogæ ipsi, BHIC, in quibus quidem sic descriptis figuris conceptæ ipsi, GM, parallelarum portiones quæcumque integræ sint. Erit ergo figura, EβL, æqualis figuræ, EYL, esto autem quod in figura, DQK, conceptæ portiones parallelarum ipsi, GM, non omnes sint integræ, sed aliquæ fractæ per interiorem ambitum, nempè, quæ intercipiuntur parallelis, Q6, ΦΩ, in quibus habeantur duo figuræ frusta, 67RΩ, QΦR, in quorum tamen vnoquoque dictæ parallelarum portiones integræ habeantur, sit autem in motu, GM, à quodam puncto descripta linea, Ex antec. Lem.

 &Γ5,



&Γ5, nempè ambitus figuræ, 5&ΣT, eodem modo, quo descripti fuerunt ambitus, EβL, EYL, figuræ inquam, 5&ΣT, æqualiter analogæ frusto, 7RΩ6; erit ergo reliqua figura, 5Δ&, æqualiter analoga frusto, QΦR, cũ tota, TSΔΣ, sit toti composito ex frustis, QΦR, 7RΩ6, æqualiter analoga, & sunt portiones ipsi, GM, parallelarum in vnaquaq; figura, 5Δ&, 5&ΣT, integræ omnes, sicut contingere supposuimus in frustis, QΦR, 7RΩ6, ergo cum, QΦR, 5Δ&, sint figuræ etiã æqualiter analogæ, inter se æquales erunt: Eadẽ ratione patebit frustũ, 7RΩ6, æquari figuræ, S&ΣT, ergo frusta, QΦR, 7RΩ6, simul sumpta æquabuntur figuræ T5βΔΣ, sed & figuram, 76D, ipsi, EST, adæquari, necnon, ΦKΩ, ipsi, ΔLΣ, pariter adæquari manifestum est, cum sint figuræ æqualiter analogæ, & portiones parallelarum ipsi, GM, in eisdem conceptarum integræ sint, ergo tota figura, DQK, toti, EβL, æqualis erit. Consimili modo in figura, BHIC, ducentes rectas lineas ipsi, GM, parallelas, nempè O2, P3, quibus ipsa distinguatur in frusta, capientia dictas parallelarum portiones integras scilicet in frusta, BON, CN2, PH4, 4I3, OP32, PH4, 4I3, easdem, O2, P3, producentes vt secent ambitum figuræ, EYL, velut in, T, X, RY, descriptisq; lineis, EV, ZL, vt fuit descripta, 5Γ&, vt constituatur

Ex antec. Lem.

Ex antec. Lem.

tuatur

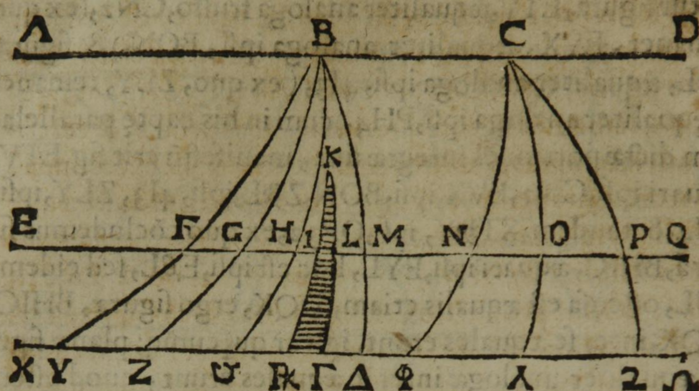
cuatur figura, ETV, æqualiter analoga frusto, CN2, (ex quo remanet, EVX, æqualiter analoga ipsi, BON,) & figura, Z℞L, æqualiter analoga ipsi, 4I3, (ex quo, ZLY, remanet et ęqualiter analoga ipsi, PH4,) cum in his captę parallelarum dictæ portiones integræ sint, manifestũ erit fig. ETV, æquari ipsi, CN2, EVX, ipsi, BON, Z℞L, ipsi, 4I3, ZLY, ipsi, PH4, & tandem, XT℞Y, ipsi, OP32, ex quo cõcludemus figurã, BHIC, æquari ipsi, EYL, hoc est ipsi, EβL, sed eidem, EβL, ostensa est æqualis etiam, DQK, ergo figuræ, BHIC, DQK, inter se æquales erunt, igitur quęcumq; planæ figuræ æqualiter analogæ inter se æquales erunt, quod ostendendum erat. Per hæc autem priori parti Propos. 1. huius iam satisfactum esse manifestum est. Ex antec. Lem.

THEOREMA II. PROPOS. II.

Figuræ planæ quæcumq; in eisdem parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscumq; eisdem parallelis æquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscumq; rectæ lineæ portiones sunt inter se, vt cuiuslibet alterius in eisdem figuris conceptæ portiones (homologis tamen in eadem figura semper existentibus) eandem inter se proportionem habebũt, quam dictæ portiones. Dicantur autem proportionaliter analogæ, ac etiam, si libuerit, iuxta regulas ipsas parallelas, in quibus existunt.

Sint duæ quælibet figuræ planæ, B&℞ΚΓΔ, CΦλ, inter parallelas, AD, XΩ, constitutę, ducta verò vtcũq; EQ, prædictis parallela, eiusdem portiones in figura, B&Δ, conceptæ, quæ sint, HI, LM, simul sumptæ sint ad eam, seu ad eas,

quæ



quæ concipiuntur in figura, CΦλ, vt aliæ quælibet similiter sumptæ, nempè ex. g. vt, &℞ΓΔ, ad, Φλ. Dico figuram, B&℞KΓΔ, ad figuram, CΦλ, esse vt, HI, LM, ad, NO, vel vt. &℞, ΓΔ, ad, Φλ, vel vt quælibet aliæ similiter sumptæ. Accipiantur in, Φλ, producta versus, λ, quotcumq; eidem, Φλ, æquales, vt, λ2, similiter quælibet linearum figuræ, CΦλ, producatur, & in ipsa intelligantur tot assumptæ æquales vnicuiq; productarum, quot assumptæ sunt æquales ipsi, Φλ, ex. g. vnica tantum, & per omnium terminos ex parte, 2, transeat linea, CP2, similiter in alia figura, B&Δ, sumantur quotcumq; in ipsa, Δ&, producta versus, &, æquales ipsis, &℞, ΓΔ, simul sumptis, & productis reliquis in fig. B&Δ, ipsi, &Δ, parallelis, aliæ tot æquales suis productis in directũ capiantur, per quorum omnium terminos trãseant lineæ, BGZ, BFY. Quoniam ergo figurę, BFYZG, BGZ&H, B&℞KΓΔ, sunt in eisdẽ parallelis, AD, XΩ; & ductis in eisdem quomodocũq; ipsis, AD, XΩ, parallelis, intereceptæ in figuris portiones sũt æquales, ideò ipsæ figuræ, BYZ, BZ&, B&℞KΓΔ, æqualiter analogæ, & subinde æquales, erunt: Quo pacto etiam ostendemus figuras, φCλ, λC2, ęquales esse: Quotuplex ergo est aggregatum ex, Y℞, ΓΔ, aggregati ex, &℞, ΓΔ, totuplex erit aggregatum ex figuris, BYZ, BZ&,

Per ant.

BZ&, B&℞KΓΔ, seu figura, BY℞KΓΔ, figuræ, B&℞KΓΔ; similiter quotuplex erit, φ2, ipsius, φλ, totuplex erit aggregatũ ex figuris, Cφλ, Cλ2, hoc est figura, Cφ2, ipsius figuræ, Cφλ, habemus ergo æquè multiplices primæ, & tertiæ vtcumq; assumptas, similiter & æquè multiplices secundæ, & quartæ. Quoniam verò ex.g. Y℞, ΓΔ; FI, LM, sunt æquè multiplices ipsarum, &℞, ΓΔ; HI, LM, similiter, 2φ, PN, sũt æquè multiplices ipsarum, φλ, NO, ipsæ verò, &℞, ΓΔ, HI, LM; φλ, NO, sũt proportionales, ideò si aggregatũ ex, Y℞, ΓΔ, adæquabitur ipsi, φ2, ẽt aggregatum ex, FI, LM, adæquabitur ipsi, NP, vt & reliquæ omnes similiter sumptæ, & consequenter etiam figura, BY℞KΓΔ, adæquabitur figuræ, Cφ2, si verò aggregatum ex, Y℞, ΓΔ; superet, φ2, eodem modo patebit figurã, BI℞KΓΔ, superare figuram, Cφ2, vel superari ab eadem, si, Y℞, ΓΔ; superetur à, φ2, ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam. f. figura, B&℞KΓΔ, ad figuram, Cφλ, erit, vt aggregatum ex, &℞, ΓΔ; ad, φλ, vel vt aggregatum ex, HI, LM, ad, NO, seu vt quælibet aliç duç similiter sumptæ, quod erat ostendendum. Dicantur autem dictæ figuræ proportionaliter analogæ iuxta regulam, AD, vel, XΩ. Ex ant.

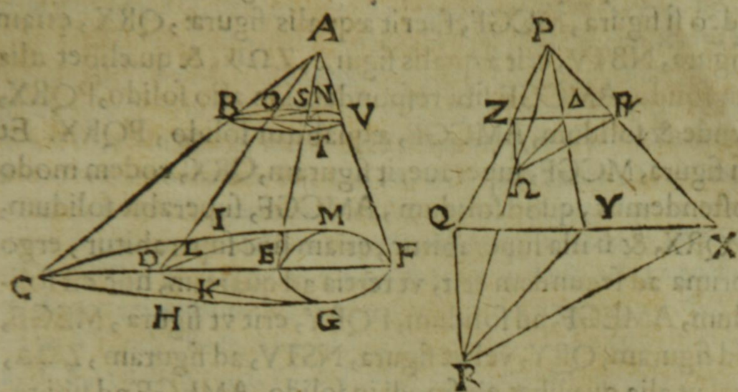
THEOREMA III. PROPOS. III.

FIguræ solidç quæcumq; in eisdem planis parallelis constitutæ, in quibus ductis quibuscumque planis dictis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscumq; sic ducti plani in ipsis solidis figurç planç sunt inter se, vt eiusmodi cuiuslibet alterius plani in eisdem solis conceptæ figuræ (homologis tamẽ in eodem solido semper existentibus) eandem inter se, quam dictæ iam conceptæ cuiuscũq; plani figuræ, rationem habebunt.

bunt. Dicantur autem figuræ proportionaliter analogæ, iuxta regulas ipsa plana parallela, in quibus existunt.

Sint duæ quælibet fig. solidæ, AMEGF, PQRY, in eisdem planis parallelis constitutæ; ductis verò quibuscumq; planis præfatis parallelis æquidistantibus, eorum conceptæ in solidis figuræ sint vnius plani ex. g. figuræ, NSTV, ZΩΔ, alterius autem, MEGF, QRY, vel contingat has esse solidorũ bases, ac in altero planorũ parallelorũ, solida, AMEGF, PQRY, contingentiũ, sit verò figura, MEGF, ad figuram, QRY, vt figura, NSTV, ad ad figuram, ZΩΔ, homologis nempè in eodẽ solido existentibus. Dico solidũ, AMEGF, ad solidum, PQRY, esse vt, NSTV, figura, ad figuram, ZΩΔ, vel vt figura, MEGF, ad figuram, QRY. Ducatur.n.in figura, MEGF, vtcumq; recta, EF, ad illius ambitum terminata, cui ducta parallela, SV, in figura, NSTV, producantur ambæ indefinitè versus puncta, S, E, in quibus sumantur vtcũq; æquè multiplices, BS, CE, similiter in eisdem figuris ductis alijs eisdem, SV, EF, æquidistantibus, sumantur earũ pariter æquè multiplices iuxta prædictarũ multiplicitatẽ, & omniũ termini sint in lineis, NBT, MICHG, sicut ipsarum partiũ termini sint in lineis, NST, NOT, NBT, MEG, MDG, MCG, traductis verò alijs quotcumq; planis præfatis parallelis, ac ipsa solida secantibus, hoc idem fiat circa ipsorum figuras in ipsis solidis conceptas, omnium verò ita resultantiũ figurarũ termini sint in superficiebus, AMCG, AMDG, AMEG; similiter in alio solido esto qđ plana, quę produxerunt in solido, AMEGF, figuras, MEGF, NSTV, genuerint figuras, QRY, ZΔΩ, ad quas illæ habent eandem rationem, ductis autem, vel assumptis rectis, QY, ZΔ, inter se parallelis, illæ producantur versus eandem partem, ΔY, in ijsq; productis accipiantur quæcumq; æquè multiplices, vel æquales, YX, Δ℞, & idem fiat in cęteris ipsis parallelis in

figu-



figuris, QRY, ZΩΔ, sic productis, & omnium termini sint in lineis, YXR, ΔRΩ, hæ verò lineæ, sicut & reliquarum figurarum eodem modo producibilium, sint in superficiebus PYR, PYXR. Manifestũ est autẽ figuras, MEGF, MDGE, MCGD, esse æqualiter analogas, & ideò inter se æquales, sicut etiam figuræ, NSTV, NOTS, NBTO, pariter inter se sunt æquales, & quæcũq; aliæ sunt in eodem plano, ex quo habemus etiam solida, AMEGF, AMDGE, AMCGD, esse æqualiter analoga, & ideò inter se æqualia. Eodem modo ostendemus solida, PQRY, PRXY, pariter inter se æqualia esse. Quotuplex est ergo solidum, AMCGF, ex tribus, AMCGD, AMDGE, AMEGF, compositum, totuplex est figura, MCGF, ex tribus, MCGD, MDGE, MEGF, cõposita, figuræ, MEGF. Similiter quotuplex est solidũ, PQRX, ex duobus, PQRY, PYRX, cõpositum ipsius, PQRY, totuplex est basis, QRX, ex duabus, QRY, YRX, cõposita, fig. QRY; ita vt habeamus æquè multiplices primæ, & tertiæ, nec-non secundæ, & quartæ magnitudinis. Cum aũt figuræ, FMCG, VNBT, sint æquè multiplices figurarum, MEGF, NSTV, & pariter figuræ, QRX, ZΩR, sint æquè multiplices figurarũ, QRY, ZΩΔ, ipsæ verò figuræ, MEGF, QRY, NSTV, Ex antec.

Conuerſ. Defin. 5. Qui. El.

ZΩΔ, ſint proportionales, & homologæ, MEGF, NSTV, ideò ſi figura, MCGF, fuerit æqualis figuræ, QRX, etiam figura, NBTV, erit æqualis figuræ, ZΩ℞, & quælibet alia in ſolido, AMCGF, ſibi reſpondenti in alio ſolido, PQRX, vnde & ſolidum, AMCGF, æquabitur ſolido, PQRX. Et ſi figura, MCGF, ſuperauerit figuram, QRX, eodem modo oſtendemus, quod ſolidum, AMCGF, ſuperabit ſolidum, PQRX, & ſi illa ſuperabitur, etiam hoc ſuperabitur, ergo prima ad ſecundam erit, vt tertia ad quartam, hoc eſt ſolidum, AMEGF, ad ſolidum, PQRY, erit vt figura, MEGF, ad figuram, QRY, vel vt figura, NSTV, ad figuram, ZΩΔ, vel vt alia quælibet eiuſmodi in ſolido, AMEGF, ad ſibi reſpondentem in alio ſolido, PQRY, hoc eſt ad exiſtentem in eodem cum ipſa plano, quod oſtendere opus erat. Dicantur autem figuræ proportionaliter analogæ, iuxta regulas, MEGF, QRY.

Ex 1. huius.

Defin. 5. Qui. El.

ANNOTATIO.

HÆc, & antecedẽs methodo Indiuiſibilium oſtenſæ quoq; fuerunt Lib. 2. Prop. 4. cũ verò prima, ſecunda, & tertia Prop. eiuſdem libri ſint illius methodi fundamenta, hinc opus erit in præſenti Lib. quaſcumq; illas ſubſequentes, & ex dicta Indiuiſibilium methodo Propoſitiones dependẽtes, aliter demõſtrare, vt vel ſcrupoloſo cuiq; Geometrę ſatisfiat. Igitur ab hac Lib. 2. Propoſ. 4. incipientes, curabimus, vt, quæ per illam methodum vera eſſe demonſtrata ſunt, etiam per noua hæc fundamenta confirmẽtur. Primi Lib. autem Prop. nullatenus à dicta methodo pendere manifeſtum eſt circa nonnullas tamen obiter prius hęc pauca maioris facilitatis gratia libuit declarare.

In Prop. 4. igitur Lib. primi ſciat Lector tacitè ſupponi omnes vertices datæ figuræ, reſpectu eiuſdem regulæ aſſumptos, eſſe in eadem recta linea regulæ parallela; ſeu, pro figuris ſolidis, in eodem plano regulæ æquidiſtante, diffinitionibus conformiter; quod ob ſui claritatem inter axiomata poterat recenſeri.

In prop. 26. prætermiſſa fuit demonſtratio præſentis caſus, cum nempe, AG, contingit eſſe perpendicularem, GV, & hoc cum facile, intellecto difficiliori caſu (qui ibidem explicatur) hoc probari poſſet; cõcludetur aũt hoc modo, quod prætendimus, nempe in tali caſu etiam, KY, eſſe perpendicularem ipſi, Y△,& ſecunda plana, AV, K△, ad plana, HV,&△, æquè ad eandem partem inclinari. Sit, AG, ad, GP, vt, KY,ad, YX, iũctis, AP,PE, KX, XT,& cæteris vt ibidem conſtructis,eodem modo prius oſtendemus vt ibi triangula, AFE, KZT, necnon, AFG, KZY, EFG,TZY,&, AGE,KYT,eſſe inter ſe ſimilia,& angulũ, PGE,æquari angulo, XYT. Hoc ſuppoſito, cum, PG, ad, GA, ſit vt, XY, ad,YK, &, AG, ad,GE, vt,KY,ad, YT, ex æquali,PG, ad,GE, erit vt,XY,ad, YT,& ſunt circa æquales angulos, PGE, XYT, ergo triangula, PGE, XYT, ſunt ſimilia, ergo, PE, ad, EG, eſt vt, XT, ad, TY, &, GE, ad, EA, vt, YT, ad, TK, ergo, PE, ad, EA, eſt vt, XT, ad, TH, & ſunt circa rectos, PEA, XTK, ergo triangula, PEA, XTK, ſunt ſimilia, ergo, AP, ad, PE, erit vt, KX, ad, XT, ſed,&, PE, ad, EG, eſt vt, XT, ad, XY, ergo, AP, ad, PG, erit vt, KX, ad, XY, &, PG, ad, GA, eſt vt, XY, ad, YK, ergo triangula, APG, KXY, ſunt ſimilia, rectus autem eſt angulus, AGP, cum rectus ponatur, AGV, ergo,KYX, &, KY△,rectus erit, vnde anguli,AGV, KY△,æquales erunt. Cum verò quadratum, PA, æquetur quadratis, PG, GA, ſeu quadratis, PG, GE, EA, & quadratum PA, æquetur etiam quadratis, PE, EA, duo quadrata, PE, EA, æquabuntur tribus quadratis, PG, GE, EA, & ablato communi quadrato, EA,erit quadratum,PE,æquale quadratis,PG,GE,vnde angulus, PGE, rectus erit, & conſequenter etiam rectus ipſe, XYT, vnde anguli, AGE,KYT, erunt inclinationes ſecundorum planorum,AV,K△,cum ſubiectis planis, HV, &△, & inter ſe æquales, per quæ ſuppoſito caſui ſatisfieri manifeſtum eſt.

[Margin notes: 6.Sex.Ele. — 6.Sex.Ele. — 5.Sex.Ele. — 47. Primi Elem. — 48. Primi Elem. — Defin. 6. Vnd. Ele.]

In Lemmate 5. poſt Prop. 28. prętermiſſa fuit demonſtratio præſentis caſus, cum eadẽ facilis exiſtimaretur, nempè quando, FE,FG, cum, AE, AG, &, LI, LM, cũ, HI,HM, concurrere minime poſſe contingat, vt cum angulos, EAF, GAF, IHL, MHL, rectos, vel recto maiores acciderit eſſe: Sic autem tum hic, tum ſuppoſitus ibi caſus poterit vniuerſaliter demõſtrari. Intelligantur ipſæ, AE, AF, AG,HI, HL, HM, inter ſe æquales,

& iungantur, EF, FG, EG, IL, LM, IM: Cum ergo anguli, FAG, LHM, supponantur æquales, & latera, FA, LH, &, AG, HM, æqualia, erunt pariter bases, FG, LM, æquales: Sic autem probabimus tum, EF, IL, tum, EG, IM, inter se æquales esse. Rursus suspensa pyramide, AEFG, ponatur, F, in, L, demittaturq; FG, super, LM, cui congruet, & triangulo, EFG, cadente super, ILM, punctum, E, pariter erit in, I; Sed & punctum, A, dico fore in, H, tres enim sphæricæ superficies super centris, I, L, M, radijs inuicem se secantibus descriptæ, nempè radijs, HI, HL, HM, seu, AE, AF, AG, in duobus tantum punctis sese decussare possunt, vt facile ostendi potest, duæ .n. quælibet sphæricæ superficies in circuli periphæria se secabũt, tertia verò hanc periphæriam diuidet in duobus punctis, quæ sunt ad ambas partes plani, ILM, nempè vnum supra alterum infra ipsum, quare non ad aliud punctum, quam ad, H, concurrent tres rectæ lineæ, AE, AF, AG, ad eandem partem plani, ILM, cum ipsis, HI, HL, HM, constitutæ, ergo, AF, cadet in, HL, AE, in, HI, &, AG, in, HM, quibus præostensis, reliquum demonstrationis, vt ibi, prosequemur.

4. Primi Elem.

7. Primi Elem.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

PArallelogramma in eadem altitudine existẽtia inter se sunt vt bases.

Sint in figura Prop. 5. lib. 2. parallelogramma, AM, MC, in eadem altitudine. Dico eadẽ esse inter se, vt bases, GM, MH. Hoc autem manifestum est, sunt .n. dicta parallelogramma figuræ proportionaliter analogæ, iuxta ipsas bases, cum sit, GM, ad, MH, vt, DE, ad, EI, &, DI, ducta sit vtcumque, vnde patet propositum etiam independenter à methodo Indiuisibilium.

Ex 2. huius.

ANNOTATIO.

PRopositionis 5. Lib. 2. prior pars pendet quidem ab Indiuisibilium methodo, verùm pars posterior, [illegible]

Prop.

Prop. 6.7.& 8.absq; illa methodo, vt intuēti apparebit, ostenduntur, quapropter, cum ab eadem exemptæ sint, nō indigent vt restaurentur, sed illas tamquam stylo veteri demonstratas, vt veras in hoc libro quoq; vsurpabimus, quod etiam de alijs Propositionibus fiet, quæ à methodo Indiuisibilium immediatè dependere non conspicientur, etiamsi mediatè ab eadem vtiq; dependere comperiantur, sufficiet.n. illas Prop. de nouo ostendere, quæ immediatè ab ipsa methodo Indiuisibilium fidem sumpsisse videbuntur. Cum verò subsequentes Propositiones, in quibus parallelogrammorum omnia quadrata, seu omnes figuræ similes, regulis basibus, examinātur, fiunt in gratiam cylindricorū, prima verò tantū pendeat ex methodo Indiuisibiliū, propterea illa erit denuò ostendēda, quam nunc subiūgo.

THEOREMA V. PROPOS. V.

CYlindrici in eadem altitudine existentes inter se sunt vt bases.

Manifesta est similiter hæc Prop. cum .n. secto quolibet cylindrico plano æquidistanter basi, producatur in eo figura æqualis ipsi basi, propterea vt basis ad basim, sic erit figura ad figuram ab eodem plano basibus æquidistante vtcumq; productam, ergo hi cylindrici erunt figuræ proportionaliter analogæ, iuxta ipsas bases, ergo cylindrici æquè alti erunt inter se vt bases. Corol. 12. lib. 1. 3. huius.

ANNOTATIO.

HOc demonstrato haud difficile erit stylo veteri ostendere cylindricas existentes in eadem basi esse inter se vt altitudines, vel vt latera æqualiter basibus inclinata.

Similiter eosdem habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum æqualiter basibus inclinatorū. Et eos qui habēt bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basib. inclinatis, reciprocas æquales esse; Vel æqua-

l.s, bases haberet altitudinibus, seu lateribus ęqualiter basibus inclinatis, reciprocas atq; similes cylindricos esse in tripla ratione laterum homologorum. Sufficiet namq; nos methodum imitari, qua demonstrata Prop. 9. lib. 2. postmodum reliquæ vsq; ad Prop. 14. ostensæ fuerunt, probando circa cylindricos, quod ibi circa omnia quadrata datorũ parallelogram. ostendebatur. Hæc autem pro cylindricis postea collecta sunt in eodem lib. 2. Prop. 34. Cor. 4. generali à sec. B. vsq; ad sec. G. quæ quidem animaduertere opuserat.

In Prop. 15. eiusdem lib. 2. hæc supplenda videntur. In Sec. A. probatur figuram, KQM, ipsi, ABD, &, ΠΤΩ, ipsi, ϱΣΛ, æqualem esse ex Prop. 3. eiusdem, nempè ex methodo Indiuisibilium, hoc autẽ patebit etiam ex prop. prima huius, sunt n. dictæ figuræ æqualiter analogæ. In sec. B. figuram, MZP, adæquari ipsi, KQM, &, Ω℞&, ipsi, ΠΤΩ, eodem modo deducetur ex prima huius. In sec. C. probabitur vt, MP, ad, PO, ita esse figuram, MZP, ad, OZP, ex prop. 2. huius. In sec. D. similiter ostendemus figuram, OZP, ad figuram, Ω℞&, esse vt, ZP, ad, ℞&, similiter ex prop. 2. huius. Cętera verò absq; methodo indiuisibilium subsistunt; vt & Corollaria, & prop. 16.

In Prop. 17. eiusdem lib. 2. hæc pariter supplenda sunt. In sec. A elicitur ex 3. pariter lib. 2. solidum, HZ∞, æquari solido, ABPC, &, ΣΓ2, solido, VΠ&Ω, cum verò hæc solida sit figuræ æqualiter analogæ vt eorum conditiones expendenti patebit, ideò quod ibi ex 3. lib. 2. hic ex prima huius deducemus. In sec. B. solidum, LDGF, æquari ipsi, HZ∞, &, 3687, solido, ΣΓ2, pariter ex prima huius colligemus. In sec. D. quod figura, LED, ad, OED, sit vt, LE, ad, EO, seu quod figura, QAMY, ad, TIMY, sit vt, QY, ad, YT, idest vt, LE, ad, EO, vel quod figura, LFE, ad, OFE, sit vt, LE, ad, EO, patet, ex prop. 2. huius: Quod verò solidum, LDFE, ad solidum, ODFE, sit vt figura, LEF, ad figuram, OEF, idest vt, LE, ad, EO, manifestum est pariter ex 3. huius. In sec. F. solidum, ODFE, ad solidum, 3674, esse vt figura, EDF, ad figuram, 467, patebit ex 3. huius, sunt .n. dicta solida figurę proportionaliter analogæ vt consideranti manifestum erit. Cætera huius prop. cum Cor. & prop. 18. absq; methodo Indiuisibilium subsistunt, vt examinanti facilè apparebit.

THEO.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

QVæcunq; de parallelogrammis oſtenduntur in Prop. 5. 6. 7. & 8. Lib. 2. eadem etiam de triangulis, conditiones ibi ſuppoſitas circa ſuas baſes, & altitudines, ſeu latera æqualiter baſibus inclinata, habentibus, verificantur.

Hæc Propoſitio manifeſta eſt, cum.n.expoſito quocũq; triangulo, & aſſumptis duobus quibuſuis lateribus angulum quemlibet continentibus parallelogrammũ compleri poſſit in illo angulo, cuius triangulum erit dimidium, ideò quæcunq; triangula erunt, vt eorum completa parallelogramma, habentibus autem triangulis circa baſes, & altitudines, ſeu latera æqualiter baſibus inclinata, præfatas conditiones, eam pariter habent completa parallelogramma, & de illis verificantur ea, quæ in dictis propoſitionibus fuerunt propoſita, ergo eadem de eorum medietatibus, hoc eſt de dictis triangulis verificabuntur. Triangula ergo, quę ſunt in eadem altitudine inter ſe ſunt vt baſes; Et quæ ſunt in eadem, vel æqualibus baſibus, vt altitudines, vel vt latera, quæ æqualiter baſi, ſeu baſibus, inclinantur. Habent inter ſe rationem compoſitam ex ratione baſium, & altitudinum, vel laterum æqualiter baſibus inclinatorum. Habentia baſes altitudinibus, vel lateribus baſibus æqualiter inclinatis, reciprocas, ſunt æqualia; Et quæ ſunt æqualia baſes habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis, reciprocas. Et tandem ſimilia triãgula ſunt in dupla ratione laterum homologorum; Quæ omnia etiam Lib. 2. Prop. 19. Coroll. 1. ex methodo Indiuiſibilium colligebantur. Corol. 2. autem ſpectat ad dictam methodum pertractandam, propterea non opus

34. Primi Elem.

4. huius, cũ Annot.

eſt,

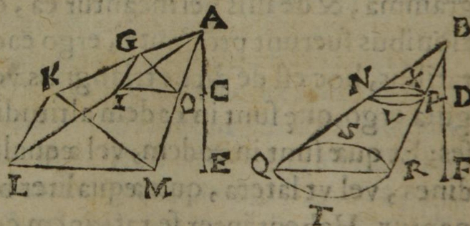
eſt, quod aliter oſtendatur: Lemma verò antecedens Proposſ. 20. ſtylo veteri demonſtratur, ſicut & ipſa Prop. 20. & 21. quorum Corollaria haud nobis opus eſt aliter demonſtrare, cum eorum vſus non ſit, niſi pro methodo Indiuiſibilium.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Conici in eadem, vel ęqualibus altitudinibus, exiſtentes inter ſe ſunt baſes.

Sint quicunq; conici in eadem, vel æqualibus altitudinibus, AE, BF, exiſtentes, AKLM, BSQTR. Dico hos eſſe inter ſe, vt ipſorum baſes, KLM, SQTR. Abſciſſis enim ab altitudinibus, AE, BF, vtcunq; partibus æqualibus verſus, A, B, ipſis, AC, BD, per, C, ducatur planũ baſi, KLM, æquidiſtans, & per, D, ſimiliter planum baſi, SQTR, æquidiſtans, quibus in conicis producantur figuræ, GIO, XNVP, erit ergo, GIO, ſimilis ipſi, KLM, quarum latera homologa, IO, LM, ſimiliter, XNVP, erit ſimilis baſi, SQTR, ducto autem plano tranſeunte per altitudinem, BF, ſecetur baſis in recta, QR, vtcunque, & figura, XNVP, in recta, NP, ſuperficies verò conicularis in rectis, BQ, BR, erunt ergo hæc ſimiliter ſecta in punctis, N, P, ac, BF, in, D, ſicut etiam, AK, AL, AM, erunt ſimiliter ſecta in punctis, G, I, O, ac, AE, in, C, &, QR, NP, latera homologa ſimilium figurarum, SQTR, XNVP, ſunt autem etiam, AE, BF, altitudines æquales ſimiliter ſectæ in punctis, C, D.

19. lib. 1.
21. lib. 1.



17. Vndec. Elem.
21. lib. 1.

Cum

Cum ergo figura, KLM, similis sit ipsi, GIO, habebit, KLM, ad, GIO, duplam proportionem eius, quam, LM, ad, IO, vel, MA, ad, AO, vel, EA, ad, AC, seu, FB, ad, BD, vel, RB, ad, BP, vel tandem eius, quam habet, QR, ad, NP, sed etiam figura, SQTR, ad, XNVP, habet duplam rationem eius, quam habet, QR, ad, NP, ergo figura, KLM, ad, GIO, est vt, SQTR, ad, XNVP, & permutando figura, KLM, ad, SQTR, erit vt figura, GIO, ad figuram, XNVP, & puncta, C, D, sumpta sunt vtcunque, ac conici, AKLM, BSQTR, sunt in æqualibus altitudinibus, AE, BF, respectu basium, KLM, SQTR, assumptis, ergo sunt figuræ proportionaliter analogæ, ergo dicti cylindrici erunt inter se, vt bases, KLM, SQTR, quod erat demonstrandum.

15. lib. 2.

9. huius.

COROLLARIVM.

CVm verò etiam cylindrici in eisdem basibus, & altitudinibus prædictis æqualibus, sint inter se vt ipsæ bases, propterea erunt etiam inter se vt ipsi conici, vnde si in vna specie cylindricorum, & conicorum ostensum fuerit, cylindricum triplum esse conici in eadem basi, & altitudine cum eo existentis, illicò hoc etiam de reliquis speciebus cylindricorum, & conicorum facilè colligemus.

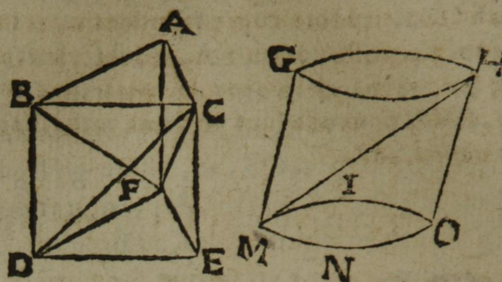
5. huius.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

QVilibet Cylindricus triplus est Conici in eadem basi, & altitudine, cum eo existẽtis.

Sit quicunq; cylindricus, GO, & conicus in eadem basi, IMNO, & eadem altitudine cum ipso. Dico cylindricum, GO, triplum esse conici, HIMNO. Exponatur .n. prisma, AFDE, triangulares habens bases, ABC, FDE; altitudinis æqualis altitudini cylindrici, GO, in basi verò, FDE, sit py-

ramis, CDFE; erit ergo prisma, ADEF, triplum pyramidis, CDEF, cũ resoluatur in tres pyramides æquales, FDBC, FDEC, FBAC, vt ostẽdit Euclides Vnd. Element. Prop. 7. vt autem se habet prisma, ADEF, ad pyramidem, CDEF, ita se habet cylindricus, GO, ad conicum, HIMNO, ergo, GO, triplus est conici, HMO, vnde omnis cylindricus triplus est conici in eadem basi, & altitudine cum eo constituti, illi enim conici, qui sunt in eadem basi, & altitudine ex ant. omnes inter se sunt æquales, quod ostendendum erat.



Ex ant.

ANNOTATIO.

PEr ant. prop. satisfit prop. 22. lib. 2. ex ea enim pariter habetur omnes cylindricos eandem rationem habere ad conicos in eadem basi, & altitudine cum ipsis existentes, cum eorum esse triplos fuerit demonstratum, & eadem, quæ ex ipsa deducebantur, hic pariter colliguntur, proprietates inquam illæ, quas cylindricis competere dictum est in Annot. prop. 5. huius. Sic ergò ratum, ac firmum est, Conicos in eadem, vel æqualibus basibus existentes, esse inter se vt altitudines. Habereq; rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum. Eos verò, quorum bases altitudinibus reciprocantur, æquales esse, & æqualium bases altitudinibus reciprocari. Ac tandem similes conicos esse in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum eorũdem basium, seu similium triangulorum per verticẽ trãseũtium, quæ in ipsius prop. 22. Cor. Sectionibus, in gratiam Conicorum pariter colligebãtur. Per hanc etiam satisfit prop. 24. eiusdem lib. 2. cum per eam ibi demonstrari intenda-

tendatur cylindricum quécumq; triplum esse conici in eadem basi, & altitudine cum eo existentis, vt in Sec. I. Cor. 4. gen. prop. 34. postea declaratur. Aduerte autem, quod pag. 79. lin. 15. hæc verba, *& cum omnibus quadratis duorum triangulorum, CBM, EMF,* ponenda sunt post hæc verba, *dupla erunt omnium quadratorum, AF.*

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

Conicorum frusta æquè alta, & in basibus æquè altorum conicorũ, à quibus absci nduntur, constituta; inter se sunt vt bases.

Videatur schema prop. 7. huius, in quo sint conicorum æquè altorum, AKLM, BSQTR, frusta, GIOLKM, XVTS, in eisdem cum illis basibus, KLM, SQTR, & in æqualibus altitudinibus, CE, DF, existentia, igitur abscissis versus puncta, C, D, altitudinum partibus æqualibus, & per earum terminos ductis planis basibus parallelis, ostendemus ab ijsdem productas in frustis figuras esse inter se vt ipsæ bases, eodem modo, quo ibi factum est, vnde patebit dicta frusta esse figuras proportionaliter analogas, quapropter ipsa esse inter se vt bases pariter concludemus, quod erat demonstrandum. 3. huius.

COROLLARIVM.

Cum verò etiam cylindrici in basibus dictorum frustorum, & in æqualibus cum eisdem altitudinibus constituti, sint inter se vt bases, erunt etiam inter se vt dicta frusta, & permutando habebunt candẽ rationem ad dicta frusta, vnde proposito quocunq; frusto conico, & cylindrico in eadem basi, & altitudine, cum eo existente, vt rationem cylindrici ad frustum conicũ inueniamus, sufficiet alicuius cylindrici præfatæ altitudinis rationem ad frustum conicum in eadem basi, & altitudine, cum eo existens inuenire, 5. huius.

nire, ex ea .n. propositi cylindrici, & frusti conici ratio illicò apparebit. Per hanc autem Propos. satisfit etiam Prop. 27. Lib. 2. & Sect. K. Cor. 4. gen. 34. eiusdem Lib. 2. vbi contenditur probare, conicorum frusta in eadem basi, & altitudine existentia, esse inuicem aequalia, hoc .n. per hanc Prop. manifestum est.

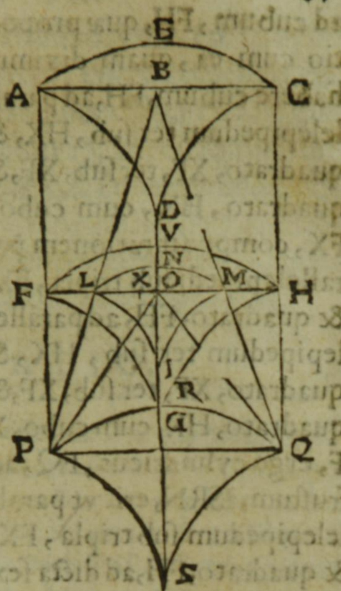
THEOREMA X. PROPOS. X.

CYlindricus ad frustum conicum quodcũq; in eadem basi, & altitudine cum eo constitutum (sumptis duabus homologis in oppositis basibus frusti conici) eam habet rationem, quam quadratum maioris homologarum ad rectangulum sub ambabus homologis, vna cum tertia parte quadrati differentiæ earũdem. Idem verò frustum ad conicum in eadem basi, & altitudine, cum eo existentem, erit vt rectangulum sub maiori, & tripla minoris, vna cum quadrato differentiæ earundem homologarum, ad maioris quadratum.

Sint in quacunque basi, PRQS, & eadem altitudine cylindricus, FQ, frustũ conici, BPRQS, nempè, LNMISR, in basi minori quoque, LNMI, & conicus, OPRQS, secto autem quomodocunq; conico plano per verticem acto, producatur triangulum, BPQ, secans oppositas bases frusti conici in rectis, LM, PQ, quæ erunt homologæ similium figurarum, LNMI, PRQS, similiter, eodem extenso plano, (Corol. 21. l. 1.) ac completo cylindrico in eadem altitudine cum conico, BRS, secentur eius opposita bases, necnon figura, FVHG, ab eodem plano in rectis, AC, FH, PQ. Dico ergo cylindricum, FQ, ad frustum conici, NISR, eandem rationem

habe-

habere, quam quadratum, PQ, ad rectangulum, sub, PQ, LM, vna cum $\frac{1}{3}$. quadra- differentiæ earũdem. Idem verò frustum ad conicum, OPQ, esse vt rectangulum sub, PQ, & tripla, LM, vna cũ quadrato differentiæ earundem, ad idem quadratũ, PQ. Etenim cylindricus, FQ, ad frustum conici, NISR, habet rationem cõpositam ex ratione cylindrici, FQ, ad cylindricum, AQ, idest ex ratione, FP, ad, PA, vel, LP, ad, BP, vel excessus, PQ, super, LM, (qui sit, FX,) ad, PQ, & ex ratione cylindrici, AQ, ad conicum, BSR, idest ex ea, quam habet, PQ, ad $\frac{1}{3}$. PQ, & tandem ex ratione conici, BSR, ad frustum, ISRN, quæ est eadem ei, quam habet cubus, PQ, vel, FH, ad parallelepipedum ter sub, HX, & quadrato, XF, ter sub, FX, & quadrato XH, cum cubo, FX, est.n. conicus, BSR, similis conico, BIN, & ideò, BSR, ad, BIN, est vt cubus, PQ, vel, FH, ad cubum, LM, seu ad cubum, XH, vnde cum cubus, FH, æquetur cubis, FX, XH, cum parallelepipedis ter sub, FX, & quadrato XH, & ter sub, HX, & quadrato, XF, ideò per conuersionem rationis conicus, BSR, ad frustum, ISRN, erit vt cubus, FH, ad parallelepipedum ter sub, HX, & quadrato, XF, ter sub, XF, & quadrato, HX, cum cubo, HX. Duæ rationes autem nempè, quam habet, FX, ad, PQ, &, PQ, ad sui $\frac{1}{3}$. componunt rationem, FX, ad $\frac{1}{3}$. PQ, vel triplæ, FX, ad, PQ, seu, FH, vel, sumpto pro communi basi quadrato, FH, componunt rationem parallelepipedi sub tripla, FX, & sub quadrato, FH, ad



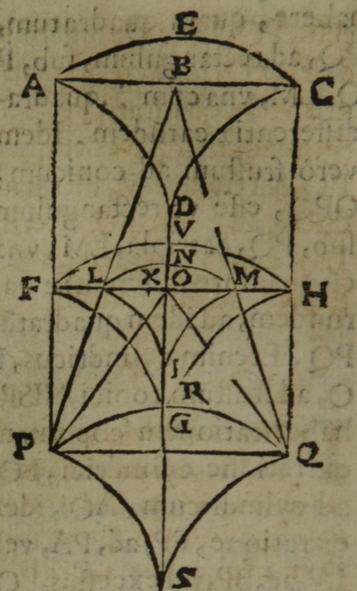
Annot. p. 5. huius.

8. huius.

Ex diff. 7. l. 1.

Annot. p. 8. huius.

38. lib. 2.



ad cubum, FH, quæ proportio cum ea, quam diximus habere cubum, FH, ad parallelepipedum ter ſub, HX, & quadrato, XF, ter ſub, XF, & quadrato, HX, cum cubo, FX, componit rationem parallelepipedi ſub tripla, FX, & quadrato, FH, ad parallelepipedum ter ſub, HX, & quadrato, XF, ter ſub, XF, & quadrato, HX, cum cubo, XF, ergo cylindricus, FQ, ad fruſtum, ISRN, erit vt parallelepipedum ſub tripla, FX, & quadrato, FH, ad dicta ſex parallelepipeda cum cubo, FX, vel vt eorum ſub tripla, ideſt vt parallelepipedum ſub, FX, & quadrato, FH, ad parallelepipedum ſub, FX, & quadrato, XH, ſub, HX, & quadrato, XF, cũ $\frac{1}{3}$. cubi, XF, hæc tria verò æquantur parallelepipedo ſub, FX, & rectangulo, FHX, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, nam parallelepipedũ ſub, HX, & quadrato, XF, idem eſt cum parallelepipedo ſub, FX, & rectangulo, FXH, quod ſi ipſum iunxeris parallelepipedo ſub, FX, & quadrato, XH, ſimul cum $\frac{1}{3}$.cubi, FX, ideſt vna cum parallelepipedo ſub, FX, & $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, (cum ſit communis altitudo) fiet parallelepipedum ſub, FX, & rectangulo, FXH, cũ quadrato, XH, ideſt ſub, FX, & rectangulo, FHX, & ſub $\frac{1}{3}$.quadrati, FX, igitur cylindricus, FQ, ad fruſtum, ISRN, erit vt parallelepipedum ſub, XF, & quadrato, FH, ad parallelepipedum ſub, XF, & rectangulo, FHX, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, ideſt vt quadratum, FH, vel quadratum, PQ, ad rectangulum ſub, FH, HX, vel ſub, PQ, LM, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, differentiæ ipſarum homologarum,

rum, PQ, LM. Quoniam verò conicus, OSR, eſt $\frac{1}{3}$. cylindrici, FQ, idcircò ad idem fruſtum, ISRN, conicus, OSR, erit vt $\frac{1}{3}$. quadrati, PQ, ad rectangulum ſub, PQ, LM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, vel vt quadratum, PQ, ad rectãgulum ſub, PQ, & tripla, LM, cũ quadrato, FX, & conuertendo fruſtũ, ISRN, ad conicũ, OSR, erit vt rectangulũ ſub, PQ, & tripla, LM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, differentiæ earundem homologarum, ad quadratum, PQ, quæ oſtendere opus erat. 8. huius.

ANNOTATIO.

PEr ſuperiorem autem demonſtrationem ſuppletur prop. 28. l. 2. necnon ei, quod colligitur in ſec. L. & M. Cor. 4. gen. 34. eiuſdem l. 2. Cor. autem prop. 28. eſt in gratiam methodi indiuiſibilium. Quoad prop. 29. eiuſdem l. 2. ſi intelligamus in eius figura latera, CD, DB, deſcribere ſimiles figuras planas, in quibus tanquam in baſibus cylindrici conſiſtant, quorum latera ſint, CD, pro figura, DB, & DB, pro figura, CD, oſtendemus conſimili ibi traditæ demonſtrationi cylindricum ſub latere, DB, baſi figura, DC, ad cylindricum ſub latere, DC, baſi figura, BD, prædictæ ſimili eſſe vt, DC, ad, DB, & ſic etiam eſſe conicum ſub lateribus, CB, BD, baſi figura, CD, ad conicum ſub lateribus, BC, CD, baſi figura ipſius, DB, habent .n. cylindrici inter ſe, necnon & conici, rationem compoſitam ex ratione baſium, & altitudinum, ſeu laterum æqualiter baſibus inclinatorum, vt ſuperius denuò animaduerſum eſt: Per hæc autem ſatisfit etiam Sec. N. Cor. 4. gen. 34. eiuſdem lib. 2. Circa verò prop. 25. & 26. cum Corollarijs nihil dictum fuit, cũ ſint lemmaticæ pro methodo indiuiſibilium, quapropter reſtauratione minimè indigere viſæ fuerunt; Prop. 33. autem recoletur in examine lib. 3. cũ Cor. Prop. 34. conſiſtit independenter à methodo indiuiſibilium, vt illius etiam Corollaria, vnde nec ipſa reſtauranda viſa ſunt. Veruntamen circa Cor. 4. generale eiuſdem prop. 34. ſuperius ſuis locis adnotata fuerunt, quæ animaduertenda erant. Reliquæ tandem propoſitiones à 35. vſq; ad finem lib. 2. non pendent ab indiuiſibilium methodo, & propterea circa illas nihil nobis dicendum occurrit. Relicta Annot. p. 5. & 8. huius.

deniq;

deniq; fuit vltimo loco prop. 23. cum Corollarij sectionibus, ac prop. 30. 31. & 32. à 23. præcipuè dependentibus cum paulò diligentiorem animaduersionem poposcere videretur, præsertim verò cum propositione 23. restaurata, aliæ quædã propositiones lemmaticæ, ad rem nostram pertinentes, forent superexstruendæ, vt in sequentibus manifestum erit.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

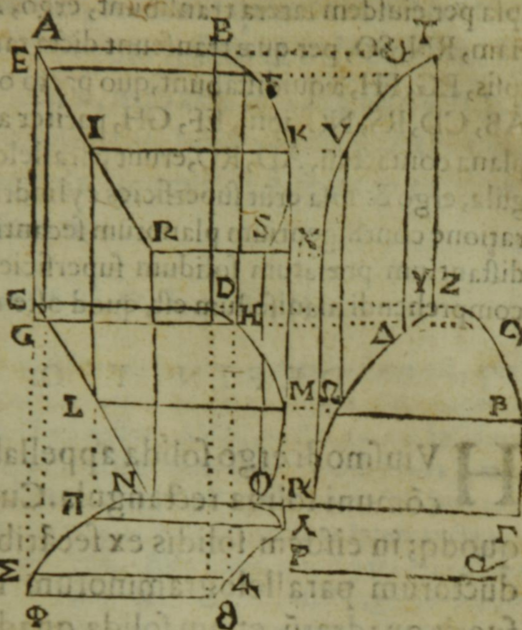
SI propositum quodcumq; solidum parallelis quotcumq; planis ita secari possit, vt conceptæ ex secantibus planis in eo figuræ sint semper parallelogramma rectangula, latera verò eadem describentia sint omnia vni cuidam lateri vt regulæ æquidistantia: Illud superficiebus cylindraceis comprehensum erit.

Sit propositum quodcũq; solidũ, ASOC, quod quidem parallelis quotcũq; planis sectum esse supponatur, efficiẽtibus in eo parallelogramma rectangula, EH, IM, latera verò hæc describentia, GH, LM, vt & reliqua omnia præfata parallelogramma pariter describentia, sint vni cuidam regulæ, PQ, æquidistantia. Dico solidum, ASOC, superficiebus cylindraceis cõprehendi. Quod enim superficies, in qua iacent omnia prædicta latera, quæ rectãgula describunt (quæ sit, CNOD,) sit cylindracea, manifestum est ex eo, quod omnia vni regulæ, PQ, sint parallela, & eadem ratione superficies, in qua iacent latera rectangulorũ prædictis opposita (quæ sit, ARSB,) erit cylindracea. Similiter cum planum, EH, æquidistet plano, IM, &, GH, ipsi, LM, etiam, EG, ipsi, LI, æquidistabit, eodem modo autem etiam ostendemus reliqua latera, quæ præfatis rectangula describentibus lateribus perpendiculariter insistunt, eidem, LI,

Defin. 3. lib. 1.

æqui-

æquidiſtare, ex quo concludem⁹ hæc omnia pariter in ſuperficie cylindracea coextendi, quæ ſit, ACNR, quā methodo patebit etiā ſuperficiem, BSOD, eſſe cylindraceā, in qua quidem iacent latera rectangulorū prædictis oppoſita. Nunc



ſi ducta intelligantur oppoſita plana ſolidum, AO, tangentia, ac præfatis ſecantibus planis æquidiſtantia, contingere poteſt vt ipſorum planorum contactus ſit ex vtraq; parte vel in puncto, vel in linea, vel in plano, vel ex vna parte contactus in vno iſtorum, ex altera verò in alio promiſcuè, vt conſideranti facilè innoteſcet, attamen quomodocunq; res ſe habeat etiam ratione iſtorū cōtactuum fiet, vt dictum ſolidum cylindraceis ſuperficiebus cōprehendatur, ſi .n. contactus ex neutra parte fiat in plano, dictum ſolidum non alijs ſuperficiebus cylindraceis, quam ijs, quæ dictæ ſunt comprehendetur, vt manifeſtum eſt, ſi vero contactus ſit in plano, illud erit parallelogrammum rectangulum, vt, AD, RO, cum .n. hæc tangentia plana æquidiſtent planis ſecantibus, quæ tranſeunt per latera cylindrici, cuius, ACNR, BDOS, ſunt ſuperficies, etiam 9. l. 1.

ipſa

ipſa per eiuſdem latera tranſibunt, ergo, AC, BD, ſicut etiam, RN, SO, per quæ tranſeunt dicta tangentia plana, ipſis, EG, FH, æquidiſtabunt, quo pacto oſtẽdemus etiam, AB, CD, RS, NO, ipſi,, EF, GH, pariter æquidiſtare, ergo plana contactuũ, AD, RO, erunt parallelogramma rectangula, ergo & ipſa erũt ſuperficies cylindraceæ, ergo etiam ratione contingentium planorum ſecantibus planis æquidiſtantium præfatum ſolidum ſuperficiebus cylindraceis comprehendi manifeſtum eſt, quod oſtendere opus erat.

DEFINITIO. A.

HVIuſmodi ergo ſolida appellabimus nomine cõmuni ſolida rectangula. Cum verò vnumquodq; in eiſdem ſolidis ex ſecãtibus planis productorum parallelogrammorum rectangulorum fuerit quadratũ, etiam ſolida quadrata vocabuntur. Et ipſorum regulæ, quibus latera plana rectangula continentia, æquidiſtant.

DEFINITIO. B.

INſuper ſolidum quodcunque rectangulum ſub duabus quibuſcunque ſuperficiebus dicetur contineri (regulis iiſdem ſupradictis) in quibus vnumquodq; æquidiſtantium planorum, ipſum ſolidum rectangulum ita ſecantium, vt dictũ fuit, ęqualia latera per ſectionem iiſdem deſignauerit, ſub quibus parallelogrammum rectangulum, ab eodem plano ſecante in ſolido productum, continetur. Et cum fuerit ſolidum quadratum pote-

rit etiam appellari, ſolidum quadratũ alterutrius dictarum ſuperficierum ipſum continentium. Ipſas verò ſuperficies, æqualia rectangulorum planorum latera capientes, homologas pariter nuncupabimus, regula quocunq; dictorum eaſdem ſecantium planorum.

ANNOTATIO.

IVxta ergo ſuprapoſitas definitiones manifeſtum eſt, quaſnam conditiones habere debeant ea ſolida, quæ vocantur ſolida rectangula: Erit igitur, ASOC, rectangulum ſolidum: quod ſi, AD, EH, IM, RO, & cætera huiuſmodi plana fuerint quadrata, poterit etiam dici, ASOC, quadratum ſolidum: Ipſius autem regulæ erunt ex. g. NO, OS, quibus latera rectangula continentia æquidiſtant. Eſto nunc, quod parallela plana, quæ in ſolido, AO, rectangula, AD, EH, IM, RO, genuerunt, indefinitè producta occurrerint ex. gratia tribus ſuperficiebus, TX℞Y, DOΓZ, φNOΛ8, in quibus per ſectionem deſignauerint, TY, æqualem ipſi, BD, &, φ8, æqualem, CD, ſimiliter, & Δ, VΩ, X℞, deinceps æquales ipſis, FH, KM, SO, ſicut etiam, Σ4, ΠΛ, NO, deinceps æquales ipſis, GH, LM, NO, & in ſuperficie, DZΓO, ipſas, DZ, H9, Mβ, OΓ, deinceps æquales eiſdem, BD, FH, KM, SO, & cætera plana parallela ſimiliter ſe habuerint (ipſæ autem ſuperficies, BO, DΓ, T℞, inter ſe, vti etiam, CO, φO, inter ſe, erunt homologæ, regula quocunq; dictorum eaſdem ſecantium planorum inter ſe æquidiſtantium.) Dicimus ergo ſolidum rectangulum, AO, nedum contineri ex. g. ſub ſuperficiebus, BDOS, CDON, in quibus iacent latera præfata rectangula continentia, ſed ēt ſub ſuperficiebus T℞, CO, vel, T℞, φO, vel ſub ſuperficieb. ΓZDO, ODCN, vel ſub, ΓZDO, φNOΛ8, in his.n. plana parallela produxerũt latera ijs æqualia, ſub quibus parallelogrãma rectangula, AD, EH, IM, RO, & cætera huiuſmodi continentur, vt dictam fuit, in quo nonnihil à modo loquendi in planis diſcedere videmur, dicitur .n. ex. g. rectangulũ planum, AD, cõtineri ſub, BD, DC, quæ rectum angulum

Pri. Def. Sec. Elem. constituunt, & non sub, TY, ϕ8, quæ ipsius rectum angulum non constituunt, hoc tamen loquendi modo vsus sum, potius soliditatis determinationem respiciens, quam continentiam, quæ fit à superficiebus in ambitu contentorum solidorum existentibus, cum.n. cernerem non omnes superficies solidum rectangulum vt sic continentes posse in ipsius contenti solidi ambitu reperiri (vt ex. g. cum contineretur duabus superficiebus planis in illius ambitu existentibus, aliæ autem illis homologæ essent curuæ) & tamen latera in his concepta viderem adæquari lateribus rectangula plana continentibus, & cōsequenter eorundem areæ quantitatem præscribere, vnde & istæ prædictis homologæ superficies viderentur ipsius contenti soliditatem determinare (quæcumq;.n. solida sub ipsis contineantur inter se erunt æqualia, vt infra ostēdemus) ideò volui præfata solida rectangula dici sub omnibus his superficiebus homologis secundum eandem regulam cōtineri. Quemadmodum, si quis aliter ab Euclide diceret parallelogrammum rectangulum nedum sub lateribus ipsius angulum rectum constituentibus, sed etiam sub quibuscumq; alijs lateribus prædictis æqualibus contineri, subintelligendo non hoc parallelogrammum in ipsius ambitu necessariò ipsa latera continentia habere, sed per ea siue sint in ambitu, siue nō, ipsius areæ quantitatem determinari, parallelogrammum.n. rectangulum contentum sub duobus lateribus, iuxta modum loquendi Euclidianum, æquatur cuicumq; parallelogrammo rectangulo sub alijs duobus prædictis æqualibus contento. Quod si quis attendat demonstrationes sec. Elem. à prima illius def. dependentes, animaduertet suam sortiri veritatem siue secundum hanc, siue secundū adductam definitionem intelligantur; consimilem autem demonstrationum seriem ex superioribus definitionibus emanantem, inferius & ipse subiungam.

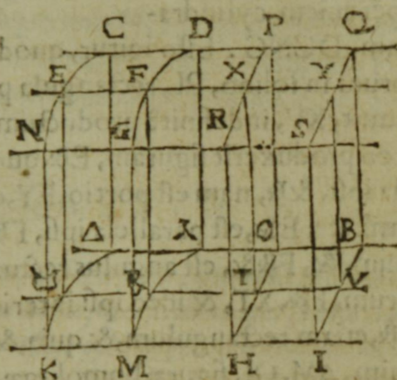
THEOREMA XII. PROPOS. XII.

PRoposito quocunq; solido rectangulo iuxta datas regulas, ac sub duabus quibusdam su-

per-

perficiebus contento; indefinita numero solida rectangula pariter dari possunt, iuxta easdem regulas, quorum vnumquodq; proposito solido æquale erit, ac sub eisdẽ superficiebus cõtinebitur.

Sit propositum quodcunq; solidum rectangulũ, POIS, sub duabus superficiebus, QSIB, OBIH, contentũ, cuius regulæ sint, HI, IS. Dico indefinita numero solida rectangula regulis eisdem pariter dari posse, quorum vnũquodq; ipsi, POIS, æquale erit, ac sub eisdem superficiebus, QSIB, OBIH, continebitur. Igitur rectangulum solidũ, POIS, superficiebus cylindraceis comprehendetur, illæ ergo superficies indefinitè hinc inde produci intelligantur, in quibus latera signata per plana parallela, in

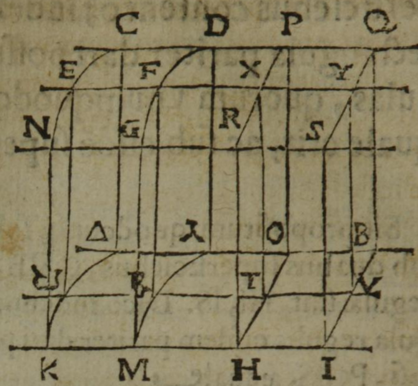


11. huius.

solido parallelogramma rectangula gignentia, vni regulæ, vt ipsi, HI, æquidistant, tales autem sunt superficies, PS, SH, HB, BP, sicut ẽt, PH, HS, SB, BP, quarum est pariter regula, SI, cũ .n. RI, PB, fuerint parallelogramma rectangula, tam iuxta regulam, HI, quam iuxta, SI, possunt in ipsis rectæ lineæ vni cuidam parallelæ designari: Producãtur autem ipsæ, PS, SH, HB, BP, hinc inde indefinitè, intelligaturq; similiter in quacunq; productarũ superficierũ, vt in, OI, producta, existere figura quæcunque, ΔKMλ, homologa, iuxta regulam, RI, ipsi, OHIB, in eadem superficie existenti, deinde per illius ambitum, ΔKMλ, feratur

quæ-

quædam recta linea, indefinitè hinc inde producta, semper ipsi, SI, æquidistanter, donec omnem illius percurrerit ambitum, gignens superficies cylindraceas, CΔKN, NM,GMλD,DΔ, abscindésq; à superficie,QR, indefinitè producta, superficiem cylindraceam, DCNG. Esto igitur, quod vnum parallelorum planorum in solido, PI, rectangula plana gignentiũ, vt, quod genuit, XV, indefinitè productum, ita vt secet solidũ, CM, in eo produxerit figuram, E℞, quoniam ergo, EF, est parallela ipsi, &℞, nam est portio, EY, quæ est parallela ipsi, &V, similiter, E&, est parallela ipsi, F℞, erit, E℞, parallelogrãmum, &, F℞&, est angulus rectus, est .n. exterior parallelarum, F℞, XT, & ideò ipsi interiori, XT&, æqualis, erit, E℞, etiam rectangulum, & quia, &℞, æquatur ipsi, TV, sunt enim, ΔM, OI, figuræ homologæ, sicut etiam, F℞, æquatur ipsi, YV, ideò rectangulũ, E℞, erit æquale rectangulo, XV. Eadem ratione ostendemus, quæcunq; alia duo rectangula ab eodem dictorum æquidistantium plano in ipsis solidis producta æqualia esse, ergo cum solida, CM, PI, sint in eadem altitudine sumpta regulis eisdem ęqualibus rectangulis, concluduntur .n. inter extrema plana parallela, quorum contactus est in planis, NM, RI; Cλ, PB, ideò dicta solida erunt æqualiter analoga iuxta dictas regulas, ergo
1. huius. inter se æqualia erunt; & cum superficies, ΔM, sit homologa ipsi, OI, &, DM, ipsi, QI, regula plano, RI, propterea & erit, CM, solidum rectangulum æquale ipsi, PI, & sub eisdem superficiebus, QI, IO, continebitur, & eius regulæ erunt



runt pariter ipsæ, HI, IS. Cum verò in superficie, OI, indefinitè producta, indefinitæ numero figuræ ipsi, OI, homologæ, regula plano, RI, supponi possint, vt facillimè apparet, ideò supradicta methodo tot solida rectangula iisdem superexstrui poterunt, regulis eisdem, quot erũt figuræ ipsi, HF, homologæ, iuxta dictas regulas, idest numero indefinita, quorum vnumquodq; ipsi, PI, adæquari, ac sub eisdem superficiebus, QI, IO, contineri, vt supra ostendemus. Quemadmodũ si etiam indefinitè superficies, PH, HS, SB, BP, supra, vel infra producerentur, alia indefinita numero solida rectangula inueniri eodem modo possent, quorum vnumquodque ipsi, PI, adæquari, ac sub eisdem superficiebus, QI, IO, contineri, regulis eisdem, HI, IS, pari ratione probaremus. Hæc autem ostendenda proponebantur.

COROLLARIVM I.

Ex supra demonstratis manifestum est, quomodo solidum rectangulum sub duabus datis superficiebus contentum, iuxta datas regulas, in data superficie cylindracea, quæ continentium alteri sit homologa, describi possit, superficies .n. CG, describetur & ipsa latera, NG, moto per lineam, NEC, semper ipsi, HI, æquidistanter.

COROLLARIVM II.

INsuper innotescit solidum rectangulum quodcunq; esse semper portionem solidam duobus cylindricis se se inuicem per suas superficies cylindraceas decussantibus communem, quorum laterum regulæ si simul ad vnum punctum componantur, sibi inuicem perpendiculares erunt, vt regula, HI, cui æquidistant latera superficiei cylindraceæ, PSHBP, est ad angulum rectum cum regula, IS, cui æquidistant latera superficiei cylindraceæ, PHSBP,

quod

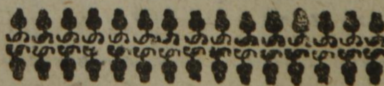
quod quidem solidum, PI, patet gigni ex cõcursu dictarum superficierum, sicut, CM, ex concursu earumdem, PSHBP, indefinitè productarum, necnon ipsarum, CKGAC, hoc est vnumquodq; ipsorum, CM, PI, esse portionem solidam communem duobus cylindricis, quorum laterum regulæ sunt ipsæ, HI, IS, ad inuicem perpendiculares.

COROLLARIVM III.

VLterius patet, quod solida rectangula sub superficiebus homologis iuxta easdem regulas contenta, inter se sunt æqualia: Etenim si proposita ex. g. essent superficies, QI, IO, homologæ ipsis, DM, MΔ, regula plano, RI, & completa fuissent solida rectangula, PI, CM, eodem modo ostensum fuisset ipsa inter se æqualia esse.

COROLLARIVM IV.

EX hac Prop. & Cor. ant. deniq; apparet, quam congruenter dictum fuerit solidum rectangulum nedum sub duabus superficiebus in eiusdem ambitu existentibus contineri, sed etiam sub duabus alijs quibuscumq; prædictis homologis, iuxta easdem regulas, licet .n. diuersis superficiebus ipsa solida comprehẽdantur, tamen eadem semper soliditatis quãtitas conseruatur, retentis eisdem regulis, cuius determinatio cum ex lateribus habeatur, vel rectangula plana dictorum solidorum continentibus, vel æqualia ijs, quæ eadem continent, iaceant verò hæc in dictis superficiebus, propterea non incongruè, puto, dictum fuit præfata solida sub talibus quibuscumque homologis superficiebus, regulis eisdem, contineri.

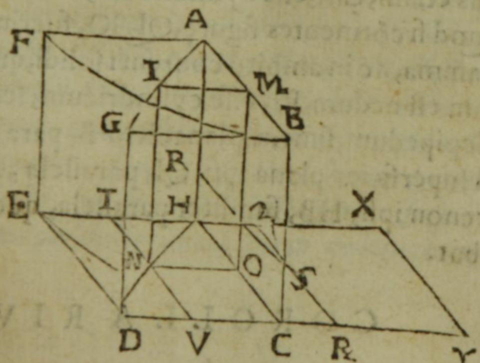


THEO-

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI, expositis duabus quibuscumq; solidorum rectangulorum descriptibilium regulis, ad vnum punctum compositis, iuxta easdem solidum rectangulum contineatur sub parallelogrammo, & alia quacumq; figura plana in ambitu contenti solidi existente, ipsum solidũ rectangulum erit cylindricus, & figura plana superius dicta erit illius basis. Quod si etiam prædicta figura fuerit parallelogrammum, & ambo in illius ambitu, contentum iisdem solidum rectangulum erit parallelepipedum.

Exponantur duæ inuicem perpendiculares regulæ, BC, CD, solidorum descriptibilium sub parallelogrãmo, AC, & figura plana quacumque, HDC, sit autem descriptũ solidum rectãgulum sub eisdem contentũ, AGCH, iuxta regulas, BC, CD, ita tamen vt figura plana, HDC, sit in ambitu ipsius contenti solidi. Dico, AGCH, esse cylindricũ. Quod.n. AC, CG, GH, sint superficies cylindraceæ, quarũ regula, BC, manifestum est, quod verò latera per secantia parallela plana in ipsis designata sint æqualia ipsi, BC, lateri parallelogrammi, AC, ex dictis etiam constare potest,



ſed maioris dilucidationis gratia ſit ab aliquo dictorum ſecantium planorum in ſolido, AGHC, productum rectangulum, IMON, eſt ergo, IN, æqualis, MO, hoc eſt ipſi, BC, quo pacto idem de cæteris oſtendemus, in parallelogrãmo autem, GC, eadem verificantur, & in illi oppoſito, ſi contactus plani ipſi, GC, oppoſiti eſſent in plano, vt manifeſtũ eſt, ergo perinde eſt ac ſi latus æquale, BC, ambitum figuræ, HDC, extremo ſui puncto ſemper ipſi, BC, æquidiſtanter percurriſſet ipſam ſuperficiem, ADBH, deſcribendo, erit ergo, AGCH, cylindricus, cuius baſis eſt, HDC, figura. Præfatum quidem ſolidum habet in ambitu figuras ipſum continentes, ſed ſi velimus etiam caſum intelligere cum tantum figura plana eſt in illius ambitu; hoc in ſchemate ant. prop. facilè percipiemus, in qua ſint regulę, SI, IH, continentes verò figuræ, QI, ΔM, quarum, QI, ſupponatur eſſe parallelogrammũ, ſed non in ambitu contenti eiſdem ſolidi, quod ſit, CM, ΔM, verò ſit figura plana, quæ debet in ambitu ſolidi reperiri, igitur conſimili methodo oſtendemus etiam, CM, eſſe cylindricum, in baſi, ΔM, cõſtitutum. Quod ſi cõtinentes figurę, QI, IO, fuerint ambo parallelogramma, ac in ambitu contenti ſolidi, quod ſit, PI, manifeſtum eſt nedum, PI, eſſe cylindricum, ſed etiam eſſe parallelepipedum, ſunt.n. plana, RI, PB, parallella, necnon, PH, eſt ſuperficies plana ipſi, QI, parallela, AC, PS, eſt plana, necnon ipſi, HB, ſimiliter parallela, quod oſtendere oportebat.

Def. 3. l. 1.

COROLLARIVM I.

EX hoc colligitur, ſi, ducta, EH, per, H, parallela, DC, in parallelis, EH, DC, indefinitè productis, reperiatur alia quæcũq; plana figura, vt, EHC, ſolidum rectangulum ſub parallelogrãmo propoſito, AC, ſeu illi analoga ſuperficie ſecundum regulam planum, GC, & ſub figura, EHC, in ambitu contenti ſolidi exiſtente,

quod

quod sit, AFCH, ad contentum sub eodem parallelogrãmo, AC, seu illi analoga superficie secundum dictam regulam, & sub figura, HDC, dummodo ea sit in ambitu pariter contenti solidi, esse vt figura, EHC, ad figuram, HDC, sunt.n. hæc solida, ABFHC, ABGHC, cylindrici in eadem altitudine sumpta respectu basium, EHC, DHC, & ideò sunt inter se vt ipsæ bases, vnde cum ipsæ fuerint æquales etiam dicta solida rectangula æqualia erunt. 5. huius.

COROLLARIVM II.

Habetur insuper si in eodem schemate ducatur in parallelogrãmo, AC, quæcumq; parallela, RC, constituens parallelogrãmum, RC, rectangulum solidum sub, AC, & figura plana ex. g. HDC, contentum, dummodo hæc sit in ipsius ambitu, ad rectangulum solidũ sub, RC, & eadem figura, HDC, in huius etiam ambitu existente, seu sub quacumq; alia plana figura in eisdem parallelis cum, HDC, existente, dummodo sit in ipsius ambitu, regulis ijsdem, BC, CD, esse vt parallelogrãmum, AC, ad parallelogrãmum, CR, seu vt, BC, ad, CS; Et si sint etiam parallelogrãma, HV, HD, habetur etiam rectangulum solidum sub, AC, CE, ad rectangulum solidum sub, RC, CT, esse vt rectangulum, BCD, ad rectangulum, SCV, sunt.n. hæc plana rectangula bases dictorum rectangulorum solidorum, quæ ex dictis sunt parallelepipeda, seu cylindrici eiusdem altitudinis sumpta respectu dictarum basium, & ideò sunt vt ipsæ bases, hoc est vt dicta rectangula, supposito tamen quod continentia parallelogramma sint in ambitu contentorum solidorum.

ANNOTATIO.

Poterant quidem exhiberi parallelogramma, AC, RC, in eodem plano cũ figuris, EHC, CHD, & in eisdẽ cum ipsis parallelis, vt, HY, pro ipso, AC, &, HR, pro ipso, RC, & intelligi mentaliter descripta solida rectang. iã dicta sub istis in eodem plano iacentibus fig. prout dictũ est, quo pacto eadem intelligi

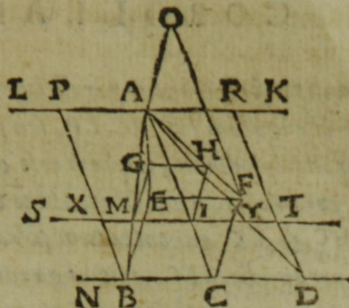
potuissent, sed cum nonnihil difficile captu initio huius nouæ doctrinæ hoc mihi fore videretur, eadem vt supra exhibere malui, verumtamen valde expediet pro sequentibus assuefieri dictorũ solidorũ mentali descriptioni, exhibitis continẽtibus eadem fig. (quæ, puto, semper planæ erunt) in eisdem parallelis constitutis, quemadmodum duabus quibuscumq; rectis lineis exhibitis, illico rectangulum sub ipsis mentaliter describere solemus, sicuti & quadratum datæ rectæ lineæ cuiuscumq; absque eo, quod semper in schematibus ipsa descripta exhibeantur, sic ergo & solida rectangula, & solida quadrata, sub duabus planis figuris in eisdem parallelis existentibus iuxta datas regulas cõtenta, ad figurarum confusionem euitandam & nos quoq; mentaliter vt plurimum describemus.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duo triangula fuerint in eisdem parallelis constituta. Solidum rectãgulum sub eisdem contentum, regula altera dictarum parallelarum, ac alia quadam illi in sublimi perpendiculari, erit pyramis, habens in basi parallelogrammum rectangulum, sub dictorum triangulorum basibus contentum, dummodo alterum dictorum triangulorum sit in ambitu contenti solidi.

Sint duo triangula in eisdem parallelis constituta, LK, ND, nempè, ABC, ACD, in basibus, BC, CD, in parallela, ND, dispositis, eleuetur autem à puncto, C, quædam, CF, perpendicularis ipsi, CB. Dico solidum rectangulum sub duobus triangulis, ABC, ACD, contentum, regulis, BC, CF, esse pyramidem, cuius basis erit parallelogrammum rectangulum sub prædictis basibus, BC, CD, pariter contentum, dummodo alterum dictorum triangulorum sit in ambitu ipsius contenti solidi. Sit .n. descriptum ipsum solidum rectangulum sub triangulis, ABC, ACD, contentum,

cum, nempè, AEBCF, sit tamē alterum ipsorum, vt, ABC, in ambitu ipsius contenti solidi, &, AFC, superficies homologa ipsi, ACD, iuxta regulā planum, BCF, erit ergo, ACF, triangulum, esto enim,



quod vnum parallelorum ipsi, BF, planorum, solidum, AEC, secantium, in eo effecerint parallelogrammum rectangulum, GMIH, & in triangulo, ACD, rectam, IY, iam scimus, quod, HI, est in eodem plano cum, FC, cui est parallela, & ambo sunt in eodem plano cum, AC, quod ēt de reliquis in superficie, ACF, ipsi, FC, parallelis existentibus eodem modo ostendetur, ergo iacent omnes in plano ipsarum, AC, CF, ergo, ACF, est superficies plana, cum vero vt, CD, ad, IY, ita sit, CA, ad, AI, & ita etiam, CF, ad, IH, erit, CF, ad, IH, vt, CA, ad, AI, ergo tria puncta, FHA, erunt in recta linea, in eadē autem esse ostendemus etiam reliquarum ipsi, CF, parallelarum extrema puncta ex hac parte, ergo, ACF, erit triangulum: Consimili autem modo pariter demonstrabimus, ABE, AEF, esse triangula, & est, BF, parallelogrammum rectangulum, ergo solidum, ABF, est pyramis, & eius basis parallelogrammum, BF, quod ostendere opus erat. Lemma 1. 22. l. 1.

COROLLARIVM I.

Ex hoc pariter intelligi potest, quod solidum rectang. contētum sub trapezijs ex g. MBCI, ICDT, in eisdem parallelis, ST, ND, existentibus, regulis ijsdem, BC, CF, est frustum pyramidis abscissæ per planū basi, BF, æquidistans, vt, GECI, dummodo alterum dictorum trapeziorum in ambitu contenti solidi consistat.

CO-

COROLLARIVM II.

Similiter si cõpleantur parallelogramma, PC, CR, CO, solidum rectangulum sub, RC, CP, seu sub, OC, CP, contentum, quod est parallelepipedum, triplum erit contenti sub triangulis prædictis i. pyramidis, ABC. Contentum verò sub parallelogrãmis, TC, vel, HC, &, CX, ad contentum sub dictis trapezijs hoc est ad frustum pyramidis, GECI, erit vt quadratum, BC, rectangulum sub, 19. huius. *XI, IM, vna cum* $\frac{1}{3}$ *.quad. XM, retentis semper ijsdem reg. BC, CF. Hęc autem vera sunt siue latus, AC, sit commune præfatis triangulis, seu parallelogrammis, siue non, ac siue latus, IC, sit commune prædictis trapezijs, seu parallelogrammis, siue non, vt facilè intuenti innotescet.*

COROLLARIVM III.

Patet vltimo solida rectangula sub dictis triangulis, regulis iam dictis, contenta, se habere inter se vt ipsæ pyramides, nempè æquè alta esse in proportione basium, & in eadem, vel æqualibus basibus existentia esse in proportione altitudinem respectu basium assumptarũ, quod est simile illi, quod animaduersum est in Cor. 2. & 2. prop. ant. circa parallelogrãma solida rectangula continentia.

ANNOTATIO.

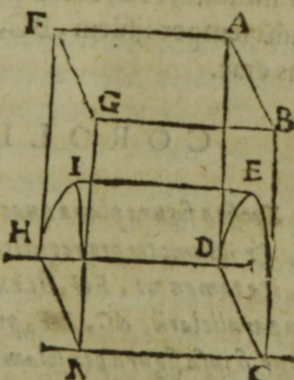
Aduerte autem cum solidum rectangulum fuerit quadratum, tunc vnam sufficere exponi figuram, vt ex. g. triangulum, ABC, quod tunc æquipollet duobus expositis, ABC, ACD; & contentum solidum sub, ABC, ACD, tunc etiam dicimus quadratum solidum ipsius, ABC, regulis, BC, CF, hæc autem planarum figurarum quadrata solida mentaliter quoque vt plurimũ descripta esse intelligemus, vt etiam superius animaduersum fuit. His autem præpositis, nunc illa subiungemus, quæ assimilantur Prop. Sec. Elem. ac iuxta methodum indiuisibilium lib. 2. prop. 23. ostensa fuere.

THEO-

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI duæ expoſitæ fuerint ſuperficies ſolidum rectangulum iuxta datas regulas continentes, altera autem earum fuerit in quotcũq; partes diuiſa per lineas ſecantes quaſcumque ſuę regulæ intra dictam ſuperficiem parallelas, altera autem fuerit indiuiſa: Solidum rectangulum ſub indiuiſa, & ſub diuiſa contentum, æquabitur ſolidis rectãgulis ſub eadem indiuiſa, & ſub partibus diuiſæ, regulis ijſdem, contentis.

Sint duæ expoſitæ ſuperficies, AC, CH, ſolidum rectangulum, FC, iuxta regulas, KC, CB, continentes, earum autem altera, vt, AC, ſit diuiſa in quotcumq; partes, vt per lineam, DEC, ſecantem quaſcumq; intra ſuperficiem, AC, ipſi regulæ, BC, parallelas, in duas partes, DEC, ADECB, ipſa verò, HC, ſit indiuiſa. Dico ſolidum contentum ſub indiuiſa, HC, & ſub diuiſa, AC, ideſt, FC, æquari ſolidis contentis ſub, DEC, CH, & ſub, DECBA, & ſub eadem, CH. Intelligatur ergo quandam rectam lineam ferri per ipſam, CED, indefinitè productam, donec totam percurrerit, ac ſemper moueri ipſi regulæ, KC, æquidiſtanter, deſcribet ergo ſuperficiem cylindraceam, quæ ſit, KEH, & abſcindet à ſuperficiebus, FK, AC, ſuperficies cylindraceas, HIK, DEC, &, HC, eſt cylindracea, & hoc ſiue ſit in ambi-



tu contenti solidi, siue non, alioquin non possent latera, quæ per solidum, FC, secantia plana, ipsi, GC, æquidistantia, signantur in ipsa superficie, HC, omnia vni regulæ, KC, æquidistare, ergo solidum, HIKCED, superficiebus cylindraceis comprehẽditur, quarum regulę sunt, KC, CB, inuicem perpendiculares ergo si solidum, HIKCED, secetur planis ipsi, KB, parallelis fient in solido parallelogramma ipsi, KB, æquiangula, hoc est rectangula, & ideò dictum solidum erit solidum rectangulum contentum sub, HC, CED, superficiebus: Eodem modo ostendemus, HIKC EDAG, esse solidum rectangulum contentum sub superficie, DIC, hoc est, DK, illi homologa iuxta planum, BK, ac sub, DECBA, est autem solidum, FC, æquale duobus solidis, HIC, CIHFB, simul sumptis, ergo solidum rectangulum contentum sub indiuisa superficie, HI, & sub diuisa, AC, æquale est solidis rectangulis contentis sub eadem indiuisa, HC, & sub partibus diuisæ, DEC, DECBA, regulis semper ijsdem, BC, CK, retentis, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM I.

Exposita figura plana quæcumq; BGEO, in parallelis, AC, DF, & aßumptis pro regulis, DF, FH, inuicem perpendicularibus, ita tamen vt, FH, sit extra planum parallelarũ, AC, DF, primò colligitur, si ipsa figura per solam lineam, BE, (secantem quascumq; intra eandem figuram, ipsi regulæ, DF, parallelas describibiles) diuidatur vtcũq; quadratum solidum sub indiuisa, BGEO, & sub eadem, BGEO, quatenus diuisa, æquari rectangulis solidis sub eadem indiuisa, BGEO, & sub partibus, BGE, BOE.



CO-

COROLLARIVM II.

Colligitur secundò rectangulum solidum sub indiuisa, BEO, & sub diuisa, BGEO, aquari rectangulis solidis sub eadem indiuisa, BEO, & sub parte, BEO, hoc est quadrato solido, BEO, & rectangulo solido sub, BEO, BEG.

COROLLARIVM III.

Colligitur tertiò quadratum solidum ipsius, BGEO, aquari rectangulis solidis sub, BGEO, ac, vtrisq; partibus, BEG, BEO, per Cor. PM, & subinde aquari quadratis partium, BEG, BEO, vna cum rectangulo bis sub eisdem partibus, BEG, BEO, per Cor. ant.

COROLLARIVM IV.

Colligitur quartò, si linea, BIE, bifariam, BNE, verò non bifariam secent dictas ipsi, DF, parallelas: Rectangulum solidum sub indiuisa, BNEO, & sub diuisa, BGEN, per ipsam, BIE, aquari rectangulo solido sub eadem indiuisa, BNEO, & sub partibus, BIEN, BGEI, diuisa, hoc est aquari rectangulo sub eadem, BNEO, & sub, BIEO, cum solido rectangulo sub, BOEN, BNEI, cui si addatur quad. solidū, BIEN, (ex quibus integratur rectang. solidum sub, BIEO, BIEN, per Cor. primum) fiet quadratum solidum, BEO, cui aquabitur rectangulum solidum sub, BGEN, BNEO, cum quadrato solido figura, BIEN, intermedia secantibus lineis, BIE, BNE, liceat autem, cum dicimus rectangulū solidum sub duabus figuris, subintelligere semper contentum, breuitatis gratia, etiam si non exprimatur, vt in planis fieri consueuit.



COROLLARIVM V.

Colligitur quintò, si supponamus, BIE, bifariam secare dictas ipsi, DF, parallelas in figura, BGEN, & deinde illis adiungi, BNEO, figuram in eisdem parallelis cum, BGEN, constitutam; rectangulum solidum sub, BGEO, & sub, BNEO, hoc est vnum sub, BGEI, seu, BIEN, & sub, BNEO, indiuisa, aliud sub, BIEO, & sub, BNEO, cum quadrato solido, BIEN, (quod iunctum rectangulo solido sub, BIEN, BNEO, facit rectangulum solidum sub, BIEN, BIEO, per Cor. 2.) æquari quadrato solido, BIEO, per Cor. 1. hoc est rectangulum solidum sub figura composita ex proposita, BGEN, & adiecta, BNEO, & sub adiecta, BNEO, cum quadrato solido, BIEN, dimidia ipsius proposita, æquari quadrato solido, BIEO, composita ex dimidia, BIEN, & adiecta, BNEO.

COROLLARIVM VI.

Colligitur sextò in eadē fig. BGEO, posito, quod per lineā tantum, BNE, secentur dicta parallela ipsi, DF, quad. solidum figuræ, BGEO, cum quadrato solido figuræ, BNEO, æquari rectangulo solido sub, BGEO, &, BNEO, figuris cōtento, cum quadrato solido reliqua figuræ, BGEN. Nam quadratum solidum, BGEO, æquatur quadratis solidis, BGEN, BNEO, cum duobus rectāgulis solidis sub eisdem figuris, addito ergo quadrato solido communi, BNEO, fient quadrata solida figurarum, BGEO, BNEO, æqualia duobus rectangulis solidis sub figuris, BGEN, BNEO, cum duobus quadratis solidis, BNEO, hoc est duobus rectangulis solidis sub, BGEO, BNEO, cum quadrato solido, BGEN.





COROLLARIVM VII.

Colligitur septimò, si proposita figura, BGEN, diuidatur per lineam, BIE, dictas quoq; parallelas ipsi. DF, secantē, rectangulum solidum quater sub, BGEN, BIEN, cum quadrato solido, BGEI, æquari quadrato solido figuræ compositæ ex, BGEN, & figura, BIEN, seu illi homologa, quæ sit, BNEO. Duo.n. rectangula solida sub, BGEN, BIEN, cum quadrato solido, BGEI, æquantur duobus quadratis solidis, BGEN, BIEN, ex Cor. ant. hoc est quadratis solidis, BGEN, BNEO, additis communibus duobus adhuc rectangulis sub, BGEN, BIEN, seu, BNEO, quæ supersunt, fient quatuor rectangula solida sub, BGEN, BIEN, cum quadrato solido, BGEI, æqualia duobus quadratis solidis, BGEN, BNEO, cum duobus rectangulis solidis sub, BGEN, BNEO, hoc est quadrato solido, BGEO, per Cor. Tertium.

COROLLARIVM VIII.

Colligitur octauò, si figura, BGEO, secetur vt in Cor. 4. quadrata solida figurarum, BGEN, BNEO, dupla esse quadratorum solidorum, BGEI, BIEN. Nam quad. solidū, BGEN, æquatur quadratis solidis, BGEI, BIEN, cum duobus rectangulis solidis sub, BGEI, BIEN, per Cor. Tertium, idest cum duobus rectangulis solidis sub, BIEO, (homologa ipsi, BGEI,) &, BIEN, quibus si addatur residuum quadratum solidum, BNEO, fiunt duo rectangula solida sub, BIEO, BIEN, cum quadrato solido, BNEO, æqualia quadrato solido, BIEO, seu, BGEI, cum quadrato solido, BIEN, igitur quadrata solida, BGEN, BNEO, dupla sunt quadratorum solidorum, BGEI, BIEN.

COROLLARIVM IX.

Colligitur nonò, suppositis in figura sectionibus ipsius Cor. 5. quadrata solida, BGEO, BNEO, dupla esse quadratorum so-

lidorum, BGEI, BIEO. Etenim quadratum ſolidum, BGEO, æquatur per Cor. 3. quadratis ſolidis, BGEI, BIEO, cum duobus rectangulis ſolidis ſub, BGEI, ſeu, BIEN, illi homologa, & BIEO, quæ duo rectangula ſolida faciunt cum quadrato ſolido, BNEO, reſiduo, quadrata ſolida, BIEO, BIEN, ſeu, BGEI, BIEO, ergo quadrata ſolida, BGEO, BNEO, dupla ſunt quadratorum ſolidorum, BGEI, BIEO,

COROLLARIVM X.

COlligitur decimò, & vltimò, ſi tandem ex. g. linea, BNE, ſecet quaſcumq; intra figurã, BNE, ipſi, DF, æquidiſtantes, ſecundum extremam, ac mediam rationem, ita vt maior portio cuiuſcumq; ſectæ lineæ ſit ex g. in figura, BGEN, rectangulum ſolidum ſub, BGEO, BNEO, æquari quadrato ſolido, BGEN, hæc. n. ſolida erunt æqualiter analoga iuxta regulam planum, DFH, ex eo quod in vnoquoque eidem parallelorum planorum ipſa ſolida ſecantium, ac capientium vnum rectãgulum, & vnum quadratum, ſemper rectangulũ eſt æquale quadrato in eodem plano exiſtenti.

ANNOTATIO.

ADuertatur autem me in omnibus ſupra poſitis Corollarijs ſupponere ſecantes lineas, parallelas ipſi, DF, in dictis figuris, non niſi ſemel occurrere eidem rectæ lineæ, vt, BIE, ſemel, ac, BNE, ſeorſim ſemel tantum; ipſas verò parallelas ad ambitũ figuræ terminari, ac ſingulas integras eſſe, quod etiam ſuppono in prop. 23. lib. 2. integras autẽ eſſe ſubintelligo; cum in plures rectas lineas, aliquo interuallo ſeparatas, per ambitũ figuræ, quæ ab eadem regulæ parallela efficiuntur, diſiungi minimè comperientur, in quo ſenſu ſciat lector (ne quis circa hoc hæſitaret) me ſemper in his libris hunc terminum vſurpare, ſciat inſuper eaſdẽ regulas, DF, FH, pro omnibus ſemper retineri. Hæc autem ... , quæ fortè par erat, à me nunc explicata ſunt, ſed cum Propoſitiones Lib. Sec. Elem. hæc imitarentur, & inſuper conſimilis doctrina, adhibita tamen indiuiſibilium

lium methodo, tradita iam fuiſſet Lib.2. prop. 23. ideò ne rerum ſimilitudo faſtidium pareret, currenti, vt ita dicam, calamo adnotata ſunt. Ex ſupradictis autem facile eſt intelligere nomen quadrati ſolidi alicuius figuræ planæ æquipollere nomini omnium quadratorum eiuſdem figuræ, & nomen rectanguli ſolidi ſub duabus figuris æquipollere nomini rectangulorum ſub eiſdem figuris, quibus quidem in methodo indiuiſibiliũ vtebamur, ex quo patet, vt ſic nos indefinitum planorum numerum euitare, cui ipſorum, quæ rectangula ſolida appellauimus, ſoliditatẽ ſatis concinne puto ſubſtituimus. His aũt paratis, ſequentium propoſitionum demonſtrationes tum quæ ſuperſunt lib.2. tum lib.3.4. ac 5. paucis mutatis compendioſiſſimè per hanc nouam methodum, abſq; ſolidarum figurarum circumſcriptione, & inſcriptione, vt alij conſueuerunt, necnon facile, oſtendemus, per hæc verò Prop. 23. Lib. 2. iam ſatisfactum eſſe manifeſtò apparet.

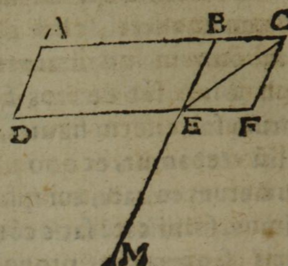
THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

Conſpecta denuò figura Prop. 30. Lib. 2. & aſſumpta regula, FD, & alia, quæ à puncto, F, quomodocunq; intelligatur eleuata ſuper planum, AF, perpendiculariter ipſi, FD. Rectangulum ſolidum ſub, AE, EC, ad rectãgulum ſolidum ſub, ADEC, trapezio, & triangulo, CEF, regulis iam dictis, contentum, erit vt, DE, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{6}$. EF.

Hoc oſtendetur eodem modo, ac in ſupradicta prop. 30. lib. 3. mutatis tantum ſupradictis nominibus, nempe ſi vbi dicimus rectangula ſub duabus quibuſdam figuris, hic dicamus rectãgulum ſolidũ ſub eiſdem figuris, ſicuti etiam cum dicuntur omnia quadrata cuiuſdam figuræ, nos illius vice nunc ſubſtituemus nomen quadrati ſolidi eiuſdem figuræ,

guræ,

gurę,vt ſupra dicebatur. Igitur cum rectangulum ſolidum ſub trapezio, ADEC, diuiſo per lineam, BE, & ſub triangulo, CEF, indiuiſo, æquetur rectangulo ſolido ſub, AE, & triangulo, CEF, vel triangulo, BEC, & rectangulo ſolido ſub triangulo, BEC, & triangulo, CEF, primò patet rectangulum ſolidum ſub, AE, EC, ad rectãg. ſolidũ ſub, AE, & triãgulo, BEC, eſſe vt, BF, ad, BEC, ideſt vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. DE, eſt enim, BF, duplum trianguli, BEC. Similiter rectangulum ſolidum ſub, AE, EC, ad quadratum ſolidum, BF, eſt vt rectangulum, DEF, ad quadratum, EF, ideſt vt, DE, ad EF, quadratum verò ſolidum, BF, cum ſit triplum quadrati ſolidi, CEF, & quadrati ſolidi, BEC, erit etiam triplum duorum rectangulorum ſolidorum ſub, BEC, CEF, (quadratum ſolidum .n. BF, oſtenſum eſt æquari quadratis ſolidis, BEC, CEF, cum duobus rectang. ſolidis ſub, BEC, CEF,) & ideò erit ſexcuplum rectanguli ſolidi, ſub, BEC, CEF, ideſt erit ad illud vt, EF, ad ſui $\frac{1}{6}$. ergo ex æquali rectangulũ ſolidum ſub, AE, EC, ad rectangulum ſolidum ſub, BEC, CEF, erit vt, DE, ad $\frac{1}{6}$, EF, & ad rectangulum ſolidum ſub, AE, & triangulo, BEC, ſeu, CEF, oſtenſum eſt eſſe vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. DE, ergo colligendo rectangulum ſolidum ſub, AE, EC, ad rectangulum ſolidum ſub, AE, CEF, & ſub, CBE, CEF, ideſt ſub trapezio, CADE, & triangulo, CEF, erit vt, DE, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{6}$. EF, quod oſtendere opus erat.



Margin notes: 51. huius. — Cor. 1. 13. huius. — Cor. 2. 13. huius. — Cor. 2. 14. huius. — Cor. 15. huius.

ANNOTATIO.

PRæſentem propoſitionem denuò ſecundum hanc nouam methodum oſtẽdere volui, vt ad huius imitationem, reliquæ ſuppleri poſſint, in quibus, non alia, quam ſupradictorum nominum mutatione facta, demonſtratio ſimillima fit, cum

ea pariter fuerint stabilita principia, vt in antecedentibus potuit studiosus animaduertere, quæ principijs methodi indiuisibilium similia apparebãt, sufficiet ergo tales propositiones, tantum innuere, cum illæ non aliam mutationem, quam prædictam in suis demonstrationibus, poposcere videbuntur. Quoad regulas autem, iuxta quas dicimus solida rectangula contineri, poterimus etiam vice duarum vnam tantum retinere, pro vt in methodo indiuisibilium effectum est, vt ex. g. in fig. huius prop. poterat sufficere ipsa, DF, altera .n. regula non alio fungitur officio, quã determinandi cũ priori regula vnum planum, cui plana solida rectangula secantia, ac in illis rectangula plana producentia, æquidistant, & hoc in antecedentibus effectum est, vt clarior solidorum rectangulorum descriptio haberetur, in posterum tamen vnam tantum regulam innuemus, alteram tacitè subintelligentes, dum præfata vni cuidam esse parallela semper supponere debeamus, erunt autem eædem regulæ, quæ in propositionibus infra citandis adhibitæ fuerũt, nisi alias regulas innuendi quãdoq; necessitatem habuerimus.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

IN eodem Prop. 30. Lib. 2. schemate, regula eadem ibi assumpta, rectangulum solidum sub, AF, FB, ad rectangulum solidũ sub trapezio, ADEC, & triangulo, BEC, erit vt, DF, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{3}$. EF.

Hæc ostendetur vt ibi, prædicta tantum nominum mutatione facta, vt meditanti innotescet.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

IN schemate Prop. 31. eiusdem Lib. 2. regula eadem, rectangulum solidum sub, AO, OB, ad rectangulũ solidũ sub trapezijs, HACN, MBCN, est vt rectangulum, HQM, ad rectangu-

lum ſub, HO, MN, cum rectangulo ſub compoſito ex $\frac{1}{2}$. HM, & $\frac{1}{3}$. NO, & ſub, NO.

Hæc ſimiliter vt antecedens expedietur.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

IN ſchemate Prop. 32. Lib. 2. ſimiliter, regula eadem retenta, rectangulum ſolidum ſub, AE, ER, ad rectangulum ſolidum ſub trapezijs, ADEC, CESR, erit vt rectangulum, DES, ad rectangulum ſub, DE, & compoſita ex, SF, & $\frac{1}{2}$, FE, vna cum rectangulo ſub, EF, & compoſita ex $\frac{1}{6}$, EF, & $\frac{1}{2}$, FS,

Hæc etiam vt antecedentes abſoluetur.

ANNOTATIO.

HVcuſq; Propoſitionibus Lib. 2. quę reſtauratione indigere videbantur ſatisfactum eſſe manifeſto apparet. Reliquum eſt, vt & ſequentium Librorum Propoſitiones denuò perpendẽtes, per hanc nouam methodum à nobis quoq; & ipſę reſtaurentur, quod maiori, qua fieri poterit, breuitate, ac facilitate, nunc præſtare conabimur.

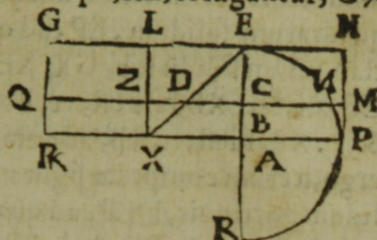
THEOREMA XX. PROPOS. XX.

ASſumpto ex Schemate Prop. 1. Lib. 3. ſemicirculo, vel ſemiellipſi, EPR, circa diametrum, ER, ſimul cum applicata, BP, quæ etiam ſit regula, & parallelogrammo, HB, iuxta quemlibet trium ibi allatorũ caſuum hunc oſtendemus, conſpecta etiam illa figura, quadratum ſo-

lidum

lidum portionis, DEP, ad quadratum ſolidum parallelogrammi, FP, eſſe vt compoſita ex $\frac{7}{6}$. EB, & $\frac{1}{2}$. BR, ad ipſam, BR.

Producantur enim indefinitè verſus, B, E, ipſæ, PB, HE, & fiant, B℞, EG, ſingulæ æquales ipſi, RE, & iũgantur, G℞, capiaturq; BX, æqualis ipſi, BE, & per, X, agatur, XL, parallela, ER, & iungatur, XE, ac ſit quæcumque, CN, applicata in ſemiportione, EPB, quæ producatur indefinitè hinc inde vt ſecet,



HP, vt in, M, EX, vt in, D, LX, vt in, Z, & G℞, vt in, Q; ſunt ergo, GB, LB, GX, parallelogramma, &, ℞X, eſt æqualis, RB, XB, autem ipſi, BE, vnde rectangulum, ℞XB, eſt æquale rectangulo, RBE, hoc eſt, in circulo, quadrato, BP: eadem ratione oſtendemus, tum rectangulum, QZC, æquari quadrato, CM, tum rectangulum, QDC, æquari quadrato, CN, & hoc idem probabimus circa alias quaſcumque applicatas. In ellipſi verò oſtendemus rectangula, ℞XB, QDC, eſſe vt quadrata, BP, CN, ſicut rectãgula, ℞XB, QZC, vt quadrata, BP, CM. Ergo ſi intelligamus ſolidum rectangulum fieri ſub parallelogrammis, GX, XE, & quadratum ſolidum, EP, communi regula, BP, erunt hæc ſolida inter ſe æqualiter, vel proportionaliter, analoga, cum ſint in eiſdẽ planis parallelis, nempè traſeuntibus per lineas, ℞P, GH, & quæcũq; plana his parallela prefata ſolida ſecantia, producant in ipſis æquales figuras planas, vel ſaltem proportionales, ſicut patuit de rectangulo, QZC, æquali quadrato, CM, vel ad idem exiſtente, vt rectangulum, ℞XB, ad quadratum, BP. Eadem ratione, quia probauimus rectangulum, QDC, æquari quadrato, CN, vel ad idem eſſe vt rectangulum, ℞XB, ad quadratum, BP, concludemus ſolidum

rectangulum sub trapezio, EG℞X, & triangulo, EXB, esse æqualiter, vel proportionaliter, analogum quadr. solido, EBP, iuxta communem regulam, BP, igitur rectangulum solidum sub, GX, XE, æquabitur quadrato solido, EP, & rectangulum solidum sub, EG℞X, EXB, æquabitur quadrato solido, EBP, vel saltem erunt proportionalia in ellipsi, ergo

1. huius 3. huius. quadratum solidum, EP, ad quad. solidũ, EBP, erit vt rectangulum solidũ sub, GX, XE, ad rectãgulum solidũ sub, EG℞X, &, EXB, hoc est, vt, ℞X, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. ℞X,

16. huius. & $\frac{1}{6}$. XB, idest, vt, RB, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. RB, & $\frac{1}{6}$. BE, ergo, iterum conspecta figura prop. 1. lib. 3. quadratum solidum portionis, DEP, ad quadratum solidum, FP, erit vt composita ex $\frac{1}{6}$. BE, & $\frac{1}{2}$. BR, ad ipsam, BR, cum .n. semiportiones, DEB, BEP, sint homologę secundũ regulam planũ transiens per regulam, BP, cui æquidistant plana solida secantia, sicut etiam, FB, BH, & cum quadratum solidum figuræ, FP, diuisæ per lineam, EB, æquetur quadratis soli-

Cor. 3. 15. huius. dis, FB, BH, & duobus rectangulis solidis sub, FB, BH, idest quatuor quadratis solidis, BH, ideò quadratum solidum, FP, quadruplum erit quadrati solidi, BH, sicut etiam patebit quadratum solidum portionis, DEP, quadruplum esse quadrati solidi semiportionis, EBP, ergo, vt quadratum solidum, EBP, ad quadratum solidum, BH, ita est quadratum solidum portionis, DEP, ad quadratum solidum, DH, idest vt composita ex $\frac{1}{6}$. BE, & $\frac{1}{2}$. BR, ad ipsam, BR, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX proximè dictis manifestum esse potest quadratum solidum cuiuscumq; figuræ circa diametrum, regula basi, quadruplum esse quadrati solidi cuiusuis eiusdem portionum, quæ ab ipsa diametro separantur.

ANNO-

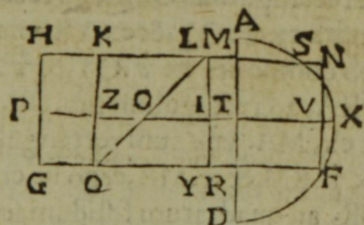
ANNOTATIO.

POsterior pars prop. 1. lib. 3. ostendetur vt ibi dicta nominum tantum mutatione facta cum Cor. sicut etiã prop. 2.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

ASsumpto ex schemate prop. 3. semicirculo, vel semiellipsi, ASFD, circa diametrum, AD, simul cũ applicatis, RF, MS, quarum altera sit regula, & parallelogrammo, NR, ostendemus in illius figura, quadratum solidum, BF, ad quadratum solidum portionis, ICFS, esse vt rectangulum, DRA, ad rectangulum sub, DR, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. RM, & ex, MA, vna cum rectangulo sub, RM, & sub cõposita ex $\frac{1}{6}$. RM, & $\frac{1}{2}$. MA.

Producantur .n. indefinitè ipsæ applicatæ, SM, FR, versus, MR, à qbus abscindãtur, GR, HM, singillatim ipsi, DA, æquales, vt etiam, GQ, HK, singillatim pariter æquales ipsi, DR, &, YR, LM, æquales ipsi, MA, & iungantur, HG, KQ, LY, QL, & sit, TX, quęcumq; inter, RF, MS, diametro,



AD, similiter applicata, quæ indefinitè hincinde extendatur secans, NF, in, V, AD, in, T, LY, in, I, LQ, in, O, KQ, in, Z, &, HG, in, P. Erunt ergo, HQ, KY, LR, parallelogramma, & rectangulum, GQR, æquabitur rectangulo, DRA, cum autem, GQ, sit æqualis, DR, &, YR, ipsi, MA, erit, QY, æqualis, RM, hoc est ipsi, YL, est autem, QY, ad, YL, vt, OI, ad, IL, ergo, OI, æquatur, IL, .i. TM, &, ZI, ipsi, RM, ergo, ZO, æquatur

RT, ergo rectangulum, POT, æquatur quoq; rectangulo, DTA, ergo vt rectangulum, GQR, ad rectangulum, POT, ita rectangulum, DRA, erit ad rectangulum, DTA, hoc est ita quadratum, RF, ad quadratum, TX, ergo permutando rectangulum, GQR, ad quadratum, RF, erit vt rectangulum, POT, ad quadratum, TX, quod & in reliquis huiusmodi ostendetur spatijs, ergo rectangulum solidum sub trapezijs, LHGQ, LMRQ, & quadratum solidum, MSXFR, erunt vel æqualiter in circulo, vel proportionaliter analoga in ellipsi, ergo erunt inter se vt rectangulum, GQR, &
3. huius. quadratum, RF, sunt quoq; inter se, sed vt rectangulum, GQR, ad quadratum, RF, sic etiam esse ostendemus rectan-
Cor. 2.13. huius. gulum solidum sub, HQ, QM, ad quadratum solidum, NR, ergo rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad quadratum solidum, NR, erit vt rectang. solidum sub, LHGQ, LMRQ, ad quadratum solidum, MSXFR, & permutando rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad rectangulum solidum sub, LHGQ, LMRQ, erit vt quadratum solidum, NR, ad quadratum solidum, MSXFR, est autem rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad rectãgulum solidum sub, HGQL, LQRM,
19. huius. vt rectangulum, GQR, ad rectangulũ sub, GQ, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. QY, & ex, YR, vna cum rectangulo sub, QY, & sub composita ex $\frac{1}{6}$. QY, & $\frac{1}{2}$. YR, hoc est vt rectangulum, DRA, ad rectãgulum sub, DR, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. RM, & ex, MA, vna cum rectangulo sub, RM, & sub composita ex $\frac{1}{6}$. RM, & $\frac{1}{2}$. MA, ergo sic etiam erit quadratum solidum NR, ad quadratum solidum semiportionis, MSXFR, & ita etiam quadratum solidum, BF, ad quadratum solidum ipsius, ICFS, conspecta figura dictæ prop. 3. quod ostendere opus erat.

ANNOTATIO.

Posterior pars dictæ Prop. 3. ostendetur vt ibi, solita nominum mutatione facta, sicut etiam Prop. 4. Prop. 5. re-

stau-

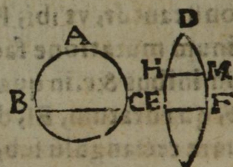
ſtautatione non indiget; Cor. autem deducetur eodem modo, vt ibi mutatis tantum dictis nominibus, fiūt.n. quadrata ſolida figurarum iiſdem parallelis in eiuſdem ſchemate intercepta-rum, figuræ ſolidæ æqualiter analogæ, vnde etiā ſunt æquales, 3. huius. ex quo concluditur deinde Corollarium eodem modo, quo ibi factum eſt. Prop. 6. cum Cor. Prop. 7. 8. 9. cum Cor. pariter vt ibi oſtendentur, mutatis nominibus, vt ſupra Prop. 10. ſic patebit probabūtur.n. figuræ, AFH, AGH, eſſe proportionaliter analogæ, & ideò eſſe inter ſe, vt, FH, HG, eodem modo, quo ibi factū eſt, ex quo ſimiliter cōcludetur, AFVT, ad, AGVS, eſſe vt, FT, ad, GS; & non diſsimiliter in Cor. colligemus quadratum ſolidum, AFVT, ad quad. ſolidū, AGVS, eſſe vt quadratum, FT, ad quadratum, GS, ſubaudi tamen in illius ſchemate ſecūdas diametros, FT, GS, eſſe in eadem recta linea. Prop. 11. cum Cor. demonſtrantur, vt ibi, Prop. verò 12. ſimiliter, ſolita tantum nominum mutatione facta. Prop. 13. oſtendetur quoque mutatis nominibus &c. in qua aduerte pag. 27. lin. 22. ſuperfluè dici in, EF, quadratum, EI, detractum à rectangulo ſub, IE, EF, relinquere rectangulū ſub, EI, IF, vt concludatur detractis omnibus quadratis ſemiportionis, OCD, à rectangulis ſub parallelogrammo, OV, & ſemiportione, OCD, relinqui rectangula ſub, OCD, DCV, hoc.n. conſtat ex C. 23. l. 2. vt citatur in margine, illud tamen ad maiorem declarationem appoſitum erat. Corollariū eiuſdē pariter declarabitur mutatis, &c. Prop. 14. ſimiliter probabitur, cum Cor. mutatis nominibus &c. Sic etiam Prop. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. cum Cor. in qua patebit rectangula ſub, ASB, AHTFB, æquari rectangulis ſub triangulis, ABD, AVD, cum ſint ſolida æqualiter analoga, & hoc in figura circuli, in figura autem ellipſis dicta ſolida oſtendentur eſſe proportionaliter analoga, ac inter ſe vt coniugatarum diametrorum quadrata. Sic etiam Prop. 22. 23. 24. 25. 26. in qua ſchema antecedentis reponendum eſt. Propoſ. 27. 28. 29. 30. 31. cum Cor. Prop. 32. cum Cor. ac tandem Prop. 33. pariter cum Cor.



THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

Expoſitis duabus quibuſcumq; figuris planis, & in earum vnaquaq; ſumpta vtcumq; regula, vt quadrata ſolida earundem figurarum iuxta dictas regulas, ita erũt ſolida quęcumq; ad inuicem ſimiliaria ex eiſdem genita figuris, iuxta eaſdem regulas.

Sint duæ quæcumq; figuræ planæ, ABC, DEF, in quibus duæ vtcumq; ſint ſumptæ, BC, EF, rectæ lineæ. Dico igitur vt quadratum ſolidum figurę, ABC, ad quadratum ſolidum figurę, DEF, regulis iam dictis ita eſſe quodcũq; ſolidum ſimilare genitum ex, ABC, ad ſibi ſimilare genitum ex, DEF, iuxta eaſdem regulas. Ducatur in altera figurarum, vt in, DEF, vtcumq; regulæ, EF, parallela, HM. Igitur quadratum, EF, ad quadratum, HM, habet duplicatam rationẽ eius, quam habet, EF, ad, HN, ſed etiam



15. l. 2. alia quælibet figura plana deſcripta ab, EF, ad ſibi ſimilem
15. l. 2. deſcriptam ab, HM, prædictæ homologa, habet duplicatam rationẽ eius, quam, EF, habet ad, HM, ergo vt quadratum, EF, ad quadratum, HM, ita eſt figura, EF, ad ſibi ſimilem figuram deſcriptam ab, HM, & permutando vt quadratum, EF, ad figuram quamcumq; aliam deſcriptam ab, EF, ita erit quadtatum, HM, ad figuram prædictæ ſimilem deſcriptam ab, HM, prædictæ homologa, ergo quadratum ſolidum figuræ, DEF, & ſolidum ſimilare quodcumq; genitum ex figura, DEF, iuxta communem regulam, EF, ſunt ſolida proportionaliter analoga ſecũdum communem regulam,
3. huius. EF, ergo erunt inter ſe vt figuræ planæ ab eodem latere, vt ab, EF, deſcriptę. Eodem modo oſtendemus quadratum ſo-

lidum,

lidum, ABC, & solidum aliud quodcumq; similare genitum ex figura, ABC, iuxta commuuem regulam, BC, esse inter se, vt figuræ à, BC, descriptæ, sunt autem duo quadrata, BC, EF, & duæ aliæ quæcumq; similes figuræ planæ descriptæ ab homologis, BC, EF, proportionales, ergo & dicta solida proportionalia erunt, nempè vt quadratum, BC, ad figuram, BC, sic erat quadratum solidum, ABC, ad solidum similare genitum ex, ABC, sed vt quadratum, BC, ad figuram, BC, ita est quadratum, EF, ad figuram, EF, prædictæ similem, & ita etiam quadratum solidum, DEF, ad solidũ prædicto similare genitum ex, DEF, ergo quadratum solidum, ABC, ad solidum similare, ABC, est vt quadratum solidum, DEF, ad solidum prædicto similare genitum ex, DEF, & permutando quadratum solidum, ABC, ad quadratum solidum, DEF, erit vt solidum quodcumq; similare genitum ex, ABC, ad sibi similare genitum ex, DEF, iuxta dictas regulas, quod ostendere opus erat.

ANNOTATIO.

HVius demonstratio similis est demonstrationi Prop. 33. l. 2. cui per hanc suppletur, Corollaria autem iuxta methodum ibi adhibitam facilè quoq; deducentur, illam verò huc reseruaui, vt promptiorem pro colligendis sequentibus Corollarijs lib. 3. ex hac pēdentibus eam haberemus. Adhibui quidem nomen solidi similaris, quod per indefinitum numerum parallelorum planorum fuit pariter explicatum lib. 2. ad B. Defin. 8. attamen si vice omnium planorum, seu descriptarum figurarum, substituamus quotcumq; plana, seu descriptas figuras, ita vt perimetri descriptarum figurarum iacere intelligantur in superficie ipsum solidum ambiente, intelligemus nihilominus, licet nonnihil diuerso modo, esse idē solidum, quod dicitur similare, ac à propria genitrice descriptum, iuxta datam regulam, siue secundam illam definitionem absolutè, siue per eandem sic modificatā, vt hæc similaria solida ab infinitatis conceptu, seu ab indiuisibilium methodo, eximerentur; Non

est

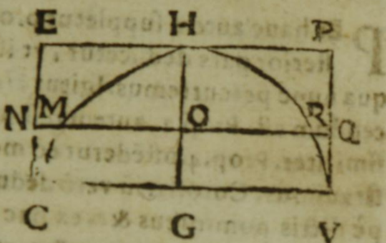
eſt autem difficile inſuper intelligere quadrata ſolida quarumcumque planarum figurarum, in ambitu eorundem exiſtentium, eſſe etiam ſolida ſimilaria, genita ex eiſdem figuris, quarum dicuntur quadrata ſolida, iuxta eaſdem regulas, iuxta quas quadrata ſolida dicebantur: & è conuerſo ſolida ſimilaria, genita ex quibuſcumq; figuris iuxta quaſuis regulas, quarum figuræ, à genitricium lineis homologis deſcriptæ tamquam à lateribus, ſint quadrata, eſſe pariter quadrata ſolida earundem figurarũ iuxta eaſdem regulas. Igitur ad rem noſtram manifeſtum eſt, quod quæcumq; ſolida ad inuicem ſimilaria, genita ex figuris lib. 3. hic denuò conſideratis, iuxta aſſumptas regulas (quarum patefacta eſt ratio quadratorum ſolidorum) habebunt rationem notam, per quod ſuppletur Propoſit. 34. lib. 3. colligentur autem vt ibi factum eſt ſequentia Corollaria vſq; ad finem eiuſdem lib. 3. mutatis tantum ſæpè dictis nominibus, vbi neceſſe fuerit, quod .n. ibi per omnia quadrata hic per quadrata ſolida conſideratarũ figurarum colligetur. Doctrina autem ſcholij ſubſequẽtis etiam pro hac noua methodo ſubſiſtit, ſi tamen vice omnium figurarum, ſeu omnium planorum, ſubſtitutas intelligamus quotcumque figuras, ſeu quotcumque plana, cætera .n. à methodo indiuiſibilium exempta ſunt, & hæc ſufficiant circa examen lib. 3. nunc autem Prop. lib. 4. ſimiliter perluſtrabimus.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

ASſumpta ex ſchemate Prop. 1. Lib. 4. ſemiparabola, CHG, cum parallelogrammo, EG, viſa tamen etiam illa figura, oſtendemus parallelogrammum, EF, ſexquialterum eſſe parabolæ, HCF.

Producta .n. diametro, CG, vtcumq; in, V, deſcribatur quadrans circuli, vel ellipſis, HGV, iuxta duas ſemidiametros coniugatas, HG, GV, & per, H, ducta, EP, parallela, CV, & indefinitè extenſa, agantur ſimiliter à punctis, C, V, pa-

parallelæ, HG, ipsæ, EC, PV, erunt ergo parallelogramma, EG, GP, EG, quidem circumscriptũ semiparabolæ, HCG, &, PG, quadranti, HGV, sit insuper quæcumq; MO, ordinatim ad, HG, applicata, regula, CG, q̃ pro alijs in hac propositione sit pariter regula, extẽdaturq; hinc inde, vt secet, EC, vt in, N, HV, vt in, R, & PV, vt in, Q, ergo, CG, ad, MO, erit vt quadratum, GH, ad rectangulum sub composita ex, HG, GO, & sub, OH, (hoc enim deducitur ex prop. 3. lib. 4. quæ non dependet à prop. 1. neq; indiget, quod denuò demonstretur) idest vt quadratum, GV, ad quadratum, OR, sed vt, CG, ad, MO, ita est quadratum, CG, ad rectangulum sub, CG, seu, NO, &, OM, ergo quadratum, CG, ad rectangulum, NOM, erit vt quadratum, GV, ad quadratum, OR, & permutãdo quadratũ, CG, ad quadratum, GV, erit vt rectangulum, NOM, ad quadratum, OR, sic ductis alijs parallelis euenire ostẽdemus; ergo solidum rectangulum sub, EG, parallelogrammo, & semiparabola, CHG, erit proportionaliter analogum quadrato solido quadrantis, HVG, secundum regulam, CV, secundum eandem autem ostendemus etiam quadratum solidum, EG, esse proportionaliter analogũ quadrato solido, HV, etenim quadratum, CG, ad quadratum, GV, est vt quadratum, NO, ad quadratũ, OQ, vnde vt quadratum, CG, ad quadratum, GV, sic erit quadratũ solidum, EG, ad quadratum solidum, GP, & sic etiam rectangulum solidum sub, EG, HCG, ad quadratum solidum, HGV, ergo quadratum solidum, EG, ad quadratum solidum, HV, erit vt rectangulum solidum sub, EG, HCG, ad quadratum solidum, HGV, ergo permutando quadratum solidũ, EG, ad rectangulum solidum sub, EG, HCG, erit vt quadratum solidum, HV, ad quadratum



solidum,HGV, sed quadratum solidum,HV, sequialterum
Eliciturex 20 huius est quadrati solidi, HGV, cum, VG, transeat per centrum,
G, ergo quadratum solidum, EG, sexquialterum erit re-
ctanguli solidi sub, EG, HCG, sed vt quadratum solidum,
Cor.1.13. huius. EG, ad rectangulum solidum sub,EG,HCG,ita basis,EG,
ad basim,HCG, ergo,EG,erit sexquialtera,HCG, & con-
sequẽter, visa figura prop. 1. lib.4. erit parallelogrãmum,
AH, sequialterũ parabolæ,FCH, quod ostendendum erat.

ANNOTATIO.

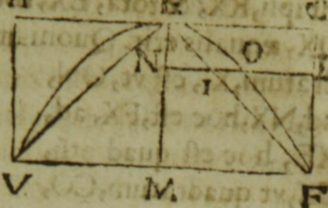
PEr hanc autem supplètur prop. 1. lib. 4. etenim illius posterior pars deducetur, vt ibi, hac verò demonstrata reliqua nunc percurremus. Igitur circa Corollarium p.1.nihil dicendum est. Prop.2. autem restauratione non indiget. Prop.3. similiter. Prop.4.ostẽdetur eo modo, quo nos primam demonstrauimus, Corollariũ verò deducetur vt ibi, mutatis tamen sepè dictis nominibus &c. ex hac autem ostẽsa facilè deducetur prop.5. cum Cor.mutatis &c. vt etiam prop. 6. cum Cor. p.7. 8.cum dictis in Scholio. Similiter Prop.9.10.cum Cor.mutatis &c. Prop.11.cum Cor.p.12.13.14.15.16.17.cum Cor.18.19. cum Cor.20.cum Cor.restaurationem minimè postulant, cum à methodo indiuisibilium non dependeant.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

EXposito denuò Schemate prop.21. eiusdem lib.4. regula eadem, VF, retenta, ostendemus quadratum solidum, AF, duplum esse quadrati solidi parabolæ, VEF, & hoc esse sexquialterum quadrati solidi trianguli, VEF.

Estò quod,ND,secet,EF,in,I, igitur rectangulum,DNI,
18. l. 4. est æquale quadrato,NO,quod & circa quascumq; applicatas contingere concludemus, ergo rectangulum solidum
sub

sub parallelogrammo, CM, & triangulo, EMF, erit æqualiter analogũ quadrato solido semiparabolæ, EMF, quadratum solidum autem, CM, ad rectangulum solidum sub eodem parallelogrammo, CM, & sub triangulo, EMF, est vt, CM, ad, EMF, idest duplũ, ergo quadratum solidum, CM, duplum erit quadrati solidi, EMF, & consequenter quadratum solidum, AF, duplum etiam erit quadrati solidi parabolæ, VEF, vnde & quadratum solidum, VEF, sexquialterum erit quadrati solidi, EVF, quod &c.



Cor. 1.13. huius.

ANNOTATIO.

PEr suprapositam prop. suppletur prop. 21. prop. 22. verò deducetur eodem modo mutatis nominibus &c.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

ASsumpta ex Schemate prop. 23. semiparabola, NOH, cum frusto, MROH, & parallelogrammo, VO, ac recta, TX, secante curuam, MH, in, I, regula, OH, ostẽdemus quadratum solidum, PH, visa dicta figura, ad quadratum solidum, ABHM, esse vt, ON, ad compositam ex, NR, & ½. RO.

Extẽdantur. n. HO, VR, versus, OR, & fiant, OC, RA, singulæ æquales ipsi, ON, &, DO, BR, capiantur singulæ æquales ipsi, RN, & iũgantur, AC, BD, CB, quas extensa indefinitè, TX, secet in, F, P, E. Erunt ergo, AO, BO, AD, parallelogramma. Cum verò, CO, æquetur, ON, &, DO, ipsi, RN, erit, CD, æqualis, OR. i. ipsi, DB, vnde etiã, EP, ipsi, PB, hoc

eſt ipſi, RX, & tota, EX, toti, NX, & reliqua, FE, reliquæ, OX, æqualis erit. Quoniam verò quadratum, OH, ad quadratum, XI, eſt vt, ON, ad, NX, hoc eſt, FX, ad, XE, hoc eſt quadratũ, FX, vt quadratum, CO, ad rectangulum, FXE, ideò permutando quadratum, HO, ad quadratum, OC, erit vt quadratum, IX, ad rectangulum, FXE, ex quo concludemus, vt in ſuperioribus rectangulum ſolidum ſub, AO, & trapezio, BCOR, eſſe proportionaliter analogum quadrato ſolido, RMHO. Similiter oſtendemus quadrata ſolida, AO, OV, eſſe proportionaliter analoga, & conſequenter prædictis duobus ſolidis eſſe proporionalia colligemus, vnde permutando quadratum ſolidum, VO, ad quadratum ſolidum, MORH, ſeu (conſpecta figura prop. 23. lib. 4.) quadratum ſolidum, PH, ad quadratum ſolidum fruſti, ABHM, erit vt quadratum ſolidum, AO, ad rectangulum ſolidum ſub, AO, & trapezio, BCOR .i. vt, AO, ad, BCOR .i. vt, CO, ad compoſitam ex, OD, & $\frac{1}{2}$. DC, .i. vt, ON, ad compoſitam ex, NR, & $\frac{1}{2}$. RO, quod &c.

Cor. 1. 13. huius. 2c. & 2.

ANNOTATIO.

PEr hanc ſimiliter ſuppletur prop. 23. poſterior .n. pars, cum Cor. deducetur vt ibi, mutatis nominibus &c. Prop. 24. reſtauratione non indiget, ſicut etiã p. 25. cum Cor. Prop. 26. oſtendetur etiam vt ibi, mutatis &c. ſicut & p. 27. cum Cor. ſimiliter p. 28. cum Cor. p. 29. cum Corollarijs, p. 30. cum Corollarijs, p. 31. 32. cum Cor. p. 33. 34. cum Cor. 35. cum Cor. p. 36. 37. 38. 39. 40. cum Cor. 41. 42. 43. 44. 45. p. 46. autem eſt nobis reſtauranda.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

IN figura prop. 46. ostendemus, regula eadem retenta, rectangulum solidum sub, HP, PE, duplũ esse rectãguli solidi sub, BZPD, DPG.



Sumatur .n. de illius schemate parallelogrãmum, HG, cum frusto parabolæ, BZGD, & rectis, RF, DP, fiat autem insuper, AP, æqualis, PD, & ducta, AM, parallela, DP, iungatur, AD, secans, CT, in, N. Cũ ergo in dicta prop. independenter ab indiuisibilium methodo, cõcludatur rectangulum, RTF, ad, STI, esse vt, PD, ad, DT, idipsum & hic tanquam demonstratum recipiemus, sed, PD, ad, DT, hoc est, CT, ad, TN, est vt quadratum, CT, ad rectangulum, CTN, ergo rectangulum, RTF, ad, STI, erit vt quadratum, CT, ad rectangulum, CTN, est autem, RF, vtcumq; ducta parallela, ZG, ergo modo consueto ostendemus solidum rectangulum sub, HP, PE, esse proportionaliter analogum quadrato solido, MP, sicut rectangulum solidum sub, BZPD, DPG, esse proportionaliter analogum rectangulo solido sub, MP, PAD, & tandem cõcludemus hæc solida esse proportionalia, idest rectangulum solidum sub, HP, PE, ad rectang. solidum sub, BZPD, DPG, esse vt quadratũ solidum MP, ad rectangulum solidum sub, MP, PDA, idest vt, MP, ad, PDA, idest concludemus rectangulum solidum sub, HP, PE, duplum esse rectanguli solidi sub, BZPD, PDG, quod ostendendum erat. Cor. 1 13. huius.

ANNOTATIO.

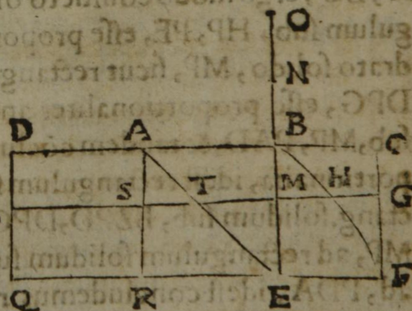
PRop. 46. igitur restaurata, stylo nostro sequentium propositionũ demonstrationes prosequemur ab hac vsq; ad 51.

inclu-

inclusiuè, quæ quidem veritatem habere comperitur ex prop. 22. huius. Scholium autem sequens retineatur vt ibi, substituendo tamen nomini omnium similium figurarũ, hoc aliud, nempè quotcumq; similes figuras &c. vt in examine lib. 3. animaduersum est. His verò prædemonstratis subsequentia Corollaria vsq; ad finem lib. 4. solita nominum mutatione facta, cuncta facillimè deducẽtur per iam ostensa circa quadrata, seu rectangula solida sub talibus, & talibus figuris, in antecedentibus prop. consideratis. Appendix autem Cor. 6. restauratione minimè indigere manifestum est. Et hæc circa prop. lib. 4 adnotasse sufficiat, reliquum est, vt ad lib. 5. examinandum nos conferamus.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

IN Schemate prop. 1. lib. 5. regula eadem retenta, ostendemus quadratum solidum parallelogrammi, AF, ad quadratum solidum hyperbolæ, DBF, esse vt, OE, ad compositam ex, NB, & ⅔. BE.



Assumatur .n. ex eo parallelogrãmũ, CE, cũ semihyperbola, BEF, & recta, OE, necnon, MG, quæcunq; ex ordinatim applicatis ad diametrũ, BE, extendantur autem, CB, FE, & fiant BD, EQ, singulæ æquales ipsi, EO, necnon, RE, AB, singulæ equales ipsi, EB, & iungantur, DQ, AR, AE, quas, GM, indefinitè quoq; producta secet in punctis, P, S, T. Erunt ergo, DR, DE, AE, parallelogramma. Quoniam verò quad. EF, ad quad. MH, est vt rectang. OEB, ad, OMB, hoc est vt rectan-

39. & scho. 40. l. 1.

rectangulum, QER, ad rectangulum, PTS, permutando quadratum, FE, ad rectangulum, QER, erit vt quadratum, HM, ad rectangulum, PTS, quod & in cæteris ostendemus, ergo quadratum solidum, BEF, & rectãgulum solidum sub, trapezio, DQEA, & triangulo, AER, erunt proportionaliter analoga, ac in proportione quadrati, FE, & rectanguli, QER. Consimili modo probabimus quadratum solidum, CE, esse æqualiter analogũ rectangulo solido sub, QB, BR, & ad ipsum pariter esse in proportione quadrati, EF, ad rectangulum, QER, ergo dicta solida proportionalia erunt, & permutando quadratum solidum, CE, ad quadratum solidum, BEF, erit vt rectangulum solidum sub, QB, BR, ad rectangulum solidum sub, DQEA, ARE, hoc est vt, QE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. QR, & $\frac{1}{3}$. RE, hoc est vt, OE, ad compositam ex, NB, (quæ est dimidia, BO,) & $\frac{1}{3}$. BE, igitur, viso schemate dictę prop. 1. quadratum solidum, AF, ad quadratum solidum, DBF, erit vt, OE, ad compositam ex, NB, & $\frac{1}{3}$. BE, quod demonstrare oportebat. 17. huius.

ANNOTATIO.

PEr hanc suppletur priori parti prop. 1. posterior verò ostẽdetur vt ibi, mutatis consuetis nominibus &c. sicut etiam prop. 2. Consimili autem methodo adhibita in præsenti prop. ostendemus quad. solidũ, GE, ad quadratum solidum, HMEF, in superiori fig. (hoc est in figura p. 3. lib. 5. quadratũ solidum, SF, ad quadratum solidum, HDFG,) esse vt rectãgulum solidum sub, QM, MR, ad rectangulum solidum sub trapezijs, PQET, SRET, hoc est vt rectangulum, QER, ad rectangulum sub, QE, ST, vna cum rectãgulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. PS, & $\frac{1}{3}$. TM, & sub, TM, idest viso schemate p. 3. vt rectãgulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. NO, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME; posterior pars autem eiusdem prop. 3. deducetur vt ibidem, mutatis nominibus &c. Sicut & omnes prop. à 4. vsque ad 20. inclusiuè, cum earum Corollarijs. In prop. 21. verò patebit quadratum solidum, OP, visa illius figura 18. huius.

gura æquari rectangulo solido sub, OLS, OVCS, figuris, regula, DC, etenim ex ibi demonstratis liquidò apparet hęc esse solida ęqualiter analoga iuxta dictam regulam, ex quo deinde reliqua concludentur mutatis nominibus &c. ficuti & Cor. In prop. 22. figura sic est corrigenda, debet enim, EC, hinc inde produci, vt incidat asymptotis, OY, OP, versus eam productis, in, S, I, quæ litteræ desunt, cæterum prop. ostendetur vt ibidem mutatis &c. simul cum Corollarijs, necnon prop. 23. 24. 25. 26. 27. 28. cum Cor. & 29. cum Cor. Prop. 30. autem patet ex dictis.

22. huius. Annot. 22 & 26. huius. His deniq; restauratis, ac sequenti scholio modificato, iuxta quod dictum fuit in examine lib. 3. & 4. sequentia Corollaria vsq; ad finem eiusdem lib. 5. per quadratorum solidorum prædemonstrata, similiter, vt in præfatis libris, colligentur, hæc autem pro restauratione lib. 5. dicta sint satis.

Quoad lib. 6. verò patet in eo traditas demonstrationes, quæ ex methodo indiuisibiliũ dependebãt, ibidem fuisse restauratas. Illæ autem propositiones, in quibus adhibentur aliquando nomina omnium quadratorum talium, vel talium figurarum, adhuc subsistent, si illis nomina quadratorum solidorum earundem figurarum substituamus, hac .n. sola mutatione facta, cætera omnia manent in suo robore, vt in eo libro innuitur in scholio prop. 20. ac superius sæpè sæpius repetitum fuit.

Finis Septimi Libri.

GEOMETRIÆ CAVALERII LIBER SEXTVS.

In quo de Spatijs Helicis, & Solidis inde genitis, ac alijs quibusdam ex superioribus deductis, speculatio instituitur.

DEFINITIONES.

I.



SI, dato quocumque circulo, super eiusdem centro, ad distantiam omnium punctorum recti transitus ipsius semidiametri, circulorum circumferentiæ describi intelligantur; prædictæ circumferētiæ simul sumptæ dicantur. Omnes circumferentiæ dati circuli. Diffin. 3. l. 2.

II.

ET si à præfato circulo quæcumq; figura abscissa intelligatur; portiones omnium circumferentiarum dicti circuli, conceptæ in

abſciſſa figura, dicentur. Omnes circumferentiæ eiuſdem abſciſſæ figuræ.

III.

SPatium Helicum voco, quod comprehenditur ſub ſpirali, vel eius quacumq; portione, & rectis, quæ à terminis eiuſdem ſpiralis, ſeu illius portionis, ad initium reuolutionis ducuntur.

IV.

SPiralem verò intelligo iuxta diffinitionem Archimedis lib. de Spiralibus, nempè, ſi cuiuſcumque circuli radius æquali celeritate moueatur circa ipſius centrum (cuius aliud extremum punctum periphæriam deſcribet) initio autem circulationis diſcedat à centro punctũ æqueuelociter motum ſuper radio, taliter vt eodem tempore prædictum punctum percurrat circumferentiam, & hoc ipſum radium, quod ex compoſitione duorum motuum deſcripta à puncto, quod radium percurrit, ipſa linea, ſit ea, quam voco ſpiralem, cuius initium dicitur ipſum centrum, terminus verò aliud extremum punctum ipſius radij; & initiũ circulationis, ſiue voluta ipſe radius: Appellatur autem hæc, ſpiralis in prima reuolutione genita, ſicuti aliæ etiam ſunt in alijs reuolutionibus deſcriptibiles, producto radio, & continuato motu, vt in ſecunda, in tertia, in quarta reuolutione, & ſic deinceps, vnde & deſcripti circuli dicuntur primi, ſecundi, tertij, &c. quæ Archimedem lib. de Spiralibus recolenti melius innote-

te-

tescent, eiusdem enim terminos in hoc Libro passim vsurpabimus.

SCHOLIVM.

Aspice Schema Prop. 9. huius, in quo est circuli radius, AE, qui aqueuelociter motus circa, A, describit circulum, SME, ipsum verò, E, circumferentiam, MSE, initio autem reuolutionis discedat ab, A. punctum motum aqueuelociter super, AE, quam percurrat eo tempore, quo punctum, E, pertransit circumferentiam, MSE, designans curuam, AIE, hac igitur dicitur spiralis in prima reuolutione orta, cuius initium, A, terminus, E, &, AE, vocatur circulationis initiũ: Exempla autem spiraliũ in alijs reuolutionibus genitarum habes in Schemate Cor. Prop. 20. huius, etenim, LSO, in secunda, OTP, in tertia, PVG, autem in quarta reuolutione genitæ dicuntur.

THEOREMA I. PROPOS. I.

Circulorum æqualium, necnon sectorum æqualium, & ab eodem, vel æqualibus circulis abscissorum, omnes circumferentiæ sunt æquales.

Hæc Propositio facilè per superpositionem ostendetur. Si enim circuli æquales ad inuicem superponantur, ita vt centrũ centro congruat, etiam ipsi circuli congruent, cum supponantur æquales, vnde & eorũ radij sint æquales, congruentibus autem circulis, etiam omnes vnius circumferentię congruent omnibus alterius circumferentijs, & ideò inter se æquales erunt. Eadem pariter superpositionis adhibita via, ostendemus sectorum æqualium, ab eodem, vel æqualibus circulis abscissorum omnes circumferentias inter se æquales esse, quod erat demonstrandum.

THEOREMA II. PROPOS. II.

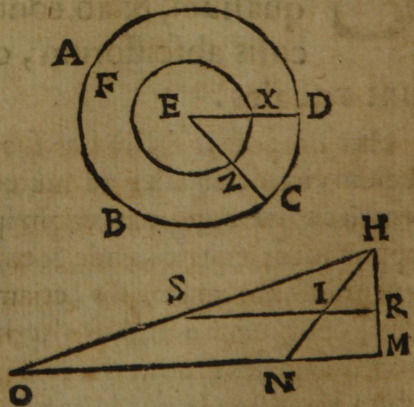
OMnis circulus ęqualis eſt triangulo rectangulo, cuius radius eſt par vni eorum, quæ ſunt circa rectum angulum, circumferentia verò baſi.

Hæc oſtenditur ab Archimede lib. de Dimenſione Circuli, Prop. 1. propterea ibi recolatur.

THEOREMA III. PROPOS. III.

OMnis ſector circuli æqualis eſt triãgulo rectangulo, cuius circuli radius eſt par vni eorum, quæ ſunt circa rectum, circumferentia verò baſi illius ſectoris.

Sit circulus, ABCD, cuius radius, ED, & ſector, EDC, expoſito verò triangulo, HOM, cuius angulus, HMO, ſit rectus, & latus, HM, æquale ipſi, ED, &, MO, circumferentiæ, ABCD, ſit, MN, æqualis circumferẽtiæ, CD; & iungatur, HN. Dico ergo ſectorem, ECD, æquari triangulo, HNM. Nam circulus, A



33. Sexti Elem. Ex antec. BCD, ad ſectorẽ, CED, eſt vt circũferentia, ABCD, ad circũferentiam, CD, eſt aũt circulus, ABCD, æqualis triang. HOM, ergo triangulus, HOM, ad ſectorem, ECD, eſt vt circum-

cumferentia, ABCD, ad circumferentiam, CD, idest vt, OM, ad, MN, idest vt triãgulus, HOM, ad, HNM, igitur idem triangulus, HOM, ad sectorem, ECD, & ad triangulum, HNM, eandem habet rationem, ergo sector, ECD, est æqualis triangulo, HNM, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM I.

Hinc patet, si sumpto vtcumq; puncto in, ED, vt, X, centro, E, ad distantiã, X, circũferentia, FZX, descripta fuerit, insuper abscissa, HR, æquali ipsi, EX, per, R, ducta fuerit, SR, parallela ipsi, OM, secans, HN, in, I, trapezium, OSRM, æquari residuo circuli, ABCD, ab eo dempto circulo, FZX, quod residuum dicatur fascia circulorum, BD, FX, nam circulus, BD, ad circulum, FX, est vt quadratum, DE, ad quadratum, EX, idest vt quadratum, MH, ad quadratum, HR, idest vt triangulus, HOM, ad triangulum, HSR, vnde quia circulus, BD, æquatur triangulo, HOM, etiam circulus, FZX, æquatur triangulo, HSR, vnde fascia, BF, æquatur trapezio, OSRM; eodem modo colligemus residuum sectoris, DEC, ab eo dempto sectore, XEZ, quod dicatur eorũdem sectorum fascia. s. ipsũ, ZXDC, æquari trapezio, IRMN. Coroll. 1. 11. l. 3. Coroll. 1. 19. l. 2.

COROLLARIVM II.

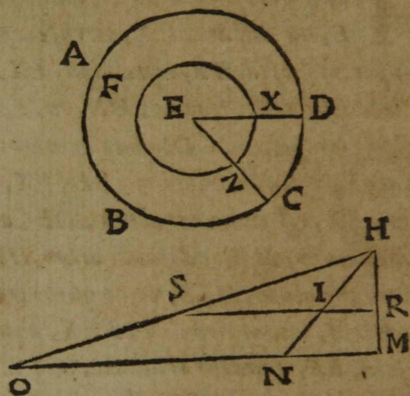
Patet insuper, quia circulus, CDB, æquatur triangulo, HOM, & circulus, FZX, triang. HSR, item circũferentia, ABCD, ipsi, OM, &, FZX, ipsi, SR, (nã, DE, æquatur ipsi, MH, &, EX, ipsi, RH,) quod veluti, OM, ad, SR, est vt, MH, ad, HR, ita circumferentia, ABCD, ad, FZX, erit vt, DE, ad, EX. Sic etiam ostendemus similium sectorũ, CED, ZEX, circumferentias, CD, ZX, esse vt semidiametri, DE, EX, & ipsos similes sectores esse vt quadrata semidiametrorum, DE, EX, quoniam sunt circulorum, à quibus abscinduntur partes proportionales, ipsi autem circuli sunt, vt diametrorum quadrata.

THEO-

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

DAti circuli, necnon ſimiles ſectores inter ſe ſunt, vt omnes eorundem circumferentiæ.

Sint in eadem antecedentis figura circuli quicunque, BADC, FXZ, deſcripti ſuper eodem centro, E, & ab iiſdem intelligantur abſciſſi ſimiles ſectores, DED, XEZ. Dico circulos, DABC, FZX, necnon ſectores, DEC, XEZ, inter ſe eſſe, vt omnes ipſorum circumferentiæ. Sit denuò expoſitum triangulum, HOM, cuius ſit angulus rectus, HMO, latus, HM, æquale radio, ED, &, MO, circumferentiæ, DCBA, abſciſſa autem, HR, æquali ipſi, EX, & per, R, ducta parallela ipſi, OM, quæ ſit, SR, intercepta lateribus, HO, HM, patet, vt dicebatur in Corol. 2. ant. Propoſ. quod circumferentia, FZX, æquatur ipſi, SR, eodem modo abſcindentes ab ipſis, HM, ED, verſus, H, E, puncta æquales quaſcunque rectas lineas, & per earum terminos ducentes parallelam quidem ipſi, OM, in triangulo, & circumferentiam ſuper centro, E, in circulo, ABCD, manifeſtũ erit prædictam circumferentiam æquari prædictæ parallelæ, lateribus, HO, HM, interceptæ, & vnicuiq; circumferentiæ in circulo, ABCD, ſic deſcriptæ reſpondere ſuam parallelam in triangulo, HOM, cum ſint rectæ, HM, ED, æquales, igitur concludemus omnes circumferentias circuli, DABC, æquari omnibus lineis trian-



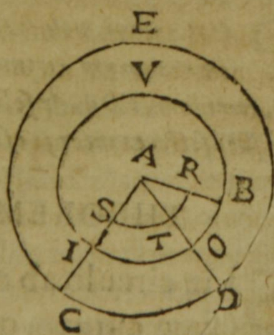
guli,

guli, HOM, regula, OM, ſicut etiam omnes circumferentias circuli, FZX, æquari omnibus lineis trianguli, HSR, regula eadem, OM, quapropter, vt omnes lineæ trianguli, HOM, ad omnes lineas trianguli, HSR, ideſt vt triangulum, HOM, ad, HSR, ideſt vt circulus, DABC, ad circulũ, FZX, ita omnes circumferentiæ circuli, ABCD, erunt ad omnes circumferentias circuli eiuſdem, FZX; quod & ſimili methodo de ſectoribus ex. g. DEC, XEZ, ducta, HN, quæ abſcindat, NM, æqualem circumferentiæ, CD, facilè oſtendemus, hæc autem erant demonſtranda. 3 I. 2.

THEOREMA V. PROPOS. V.

QVicumque ſectores inter ſe comparati, ſeu quæcumq; figuræ ex ſectoribus compoſitæ ad ſectores, vel ad figuras ex ſectoribus compoſitas cõparatæ, habent eandem rationem, quam omnes ipſarum circumferentiæ ad omnes illarum circumferentias.

Sint quicunque circuli ſuper centro, A, nempè, ECD, maior, &, VIO, minor, & in, ECD, ſit ſector quicunque, CAD, & ſimiliter in, VIO, quilibet ſector, OAB. Dico ſectorem, CAD, ad ſectorem, OAB, eſſe vt omnes circumferentias, CAD, ad omnes circumferentias, OAB. Secent radij, CA, AD, circumferentiam, VIO, in punctis, I, O; Eſt ergo ſector, CAD, ſimilis ſectori, IAO, & ideò eſt ad illum, vt omnes circumferentiæ ad omnes circumferentias, ſed & vt ſector, IAO, ad ſectorem, OAB, ita Ex antec.



om-

omnes circumferentiæ ad omnes circumferentias, nam ſector, IAO, ad, OAB, eſt vt circumferentia, IO, ad, OB, vt verò, IO, ad, OB, ſic, deſcripta circũferentia, STR, vtcumque, ipſa, ST, ad, TR, eſt enim, IO, ad, ST, vt, OA, ad, AT, ideſt vt, OB, ad, TR, vnde, permutando, vt, IO, ad, OB, ſic, ST, ad, SR, & vt vnnm ad vnum, ita omnia ad omnia, ideſt vt, IO, ad, OB, ita omnes circumferentiæ, IAO, ſectoris ad omnes circumferentias ſectoris, OAB, ſed vt, IO, ad, OB, ſic, vt dictum eſt, ſe habet ſector, IAO, ad, OAB, ergo, IAO, ad, OAB, eſt vt omnes circumferẽtiæ, IAO, ad omnes circumferentias, OAB, ſed & ſectorem, CAD, ad, IAO, eſſe oſtenſum eſt, vt omnes circumferentiæ, CAD, ad omnes circumferentias, IAO, ergo ex æquali ſector, CAD, ad ſectorem, OAB, eſt vt omnes circumferentiæ, CAD, ad omnes circumferentias, OAB. Et componendo figura compoſita ex ſectoribus, CAD, OAB, ad ſectorem, OAB, erit vt omnes circũferentiæ figuræ eiuſdem, ad omnes circumferentias ſectoris, OAB, veluti etiam ſi prædicta figura non ad ſectorem, ſed ad aliam quamcumq; figuram ex ſectoribus compoſitam compararetur, oſtenderemus, eaſdem figuras eſſe inter ſe, vt omnes earundem circumferentiæ, quod demonſtrare opus erat.

Coroll. 2. 9. huius.

COROLLARIVM.

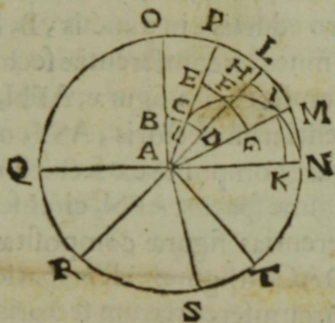
Patet autem, veluti oſtenſum eſt ſectores, AIO, AOB, eſse vt omnes eorum circumferentiæ eodem modo demonſtrari poſſe, circulum, VOB, & ſectorem, AOB, & in vniuerſum circulos, & ſuos ſectores inter ſe eſse, vt omnes eorum circumferentiæ.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI in circulo ab eiuſdem cẽtro ad circumferentiam curuam quędam linea illius conditionis

producatur, vt quæcunq; rectæ lineæ à centro ad ipsam pertingẽtes (præter illius extrema iungentem) intra illud spatiũ cadant, quod comprehenditur ducta curua, & illius extrema jungẽte: Erit dictum spatium ad propositum circulum, vel quemcunq; sectorem, vt omnes eiusdem circumferentiæ ad omnes illius circumferentias.

Sit quicunque circulus, NOQT, & centrum, A, curua, AFN, ducta à centro, A, ad peripheriam, cui incidat in, N, & sit eius conditionis, qualis suppositum est, sitq; iuncta, AN. Dico igitur spatium, seu figuram, AFN, ad circulum, NOQT, vel ad quemcumque sectorem, esse vt omnes eiusdem circumferẽtiæ ad omnes illius circumferentias. Fiat vt circulus, NOQT, ad figuram, NFA, ita circumferentia, NOQT, ad circumferentiam, QR, ita enim erit & circulus, NOQT, ad sectorem, QAR, iunctis, QA, AR, vnde sector, QAR, erit æqualis figuræ, AFN, vel ergo omnes circumferentiæ, QAR, æquantur etiam omnibus circumferẽtijs figuræ, AFN, & sic quia sector, QAR, ad circulum, NOQT, est vt omnes eisdem circumferentiæ ad omnes illius circumfer. etiam figura, AFN, ad circulum, NOQT, & consequenter etiam ad quemcũq; illius sectorem per ant. Prop. & Cor. erit vt omnes circũfer. ad oẽs circũferentias: Vel, nisi omnes circumferentiæ, QAR, æquantur omnibus circũferentijs figuræ, AFN, erunt eisdem maiores, vel minores, sint primò maiores, quantitate omnium circumfe-

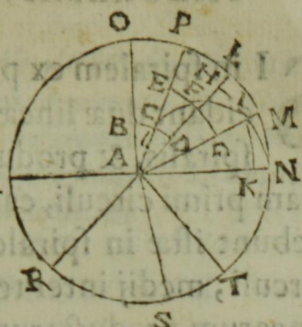


rentiarum ſectoris, AST, intellecta autem à centro, A, ducta ipſa, AO, tangente curuam, AFN, in puncto, A, quæ circumferentiæ incidat in, O, ſecetur circumferentia, ON, bifariam in, L, & rurſus partes, OL, LN, bifariam in punctis, P, M, & hoc ſemper fiat donec ad circumferentias deuentum ſit, quarum vnaquęque ſit minor, ST, ſcilicet ipſæ, OP, PL, LM, MN, & à centro, A, ad puncta, P, L, M, extendantur rectæ, AP, AL, AM, quæ ſecabunt curuam, AFN, earum .n. portiones inter centrum, & curuam interceptæ, ex hypoteſi cadunt intra ſpatium, ANFA, ſecent in, C, F, I, & centro, A, interuallis, AC, AF, AI, arcus deſcribantur, BCD, EFG, HIK, incidentes proximis rectis lineis, à centro eductis, in punctis, B, D; E, G; H, K. Quoniam ergo omnes circumferentiæ ſectoris, QAR, ſuperant omnes circumferentias figuræ, AFN, quantitate omnium circumferentiarum ſectoris, AST, omnes autem circumferentiæ figurę compoſitę ex ſectoribus, NAM, IAH, FAE, CAB, ideſt figuræ ſpatio, AFN, circũſcriptæ, ſuperant omnes circumferentias figuræ compoſitæ ex ſectoribus, KAI, GAF, DAC, .i. figuræ eidem ſpatio inſcriptæ, quantitate omnium circumferentiarum ſectoris, BAC, & quadrilineorum, ECDF, HFGI, MIKN, quæ ſimul adæquantur omnibus circumferentijs ſectoris, MAN, vt facilè oſtendi poteſt, propterea omnes circumferentię figuræ circumſcriptę ſuperant omnes circumferentias inſcriptæ quantitate omnium circumferentiarum ſectoris, MAN, quæ cum ſint minores omnibus circumferentijs ſectoris, TAS, ideò omnes circumferentiæ figuræ circumſcriptæ ſuperabant omnes circumferentias inſcriptæ minori quantitate, & eædem multò minori quantitate ſuperabunt omnes circumferentias ſpatij, AFN, quam omnes circumferentiæ ſectoris, AQR, ſuperent omnes circumferentias ſpatij, AFN, ergo omnes circumferentię figuræ circumſcriptæ minores erunt omnibus circumferentijs ſectoris, QAR, cum verò figura ex ſecto-

1. Decimi Elem.

ctoribus cõpoſita ad ſecto-rem, ſit vt omnes circum ferentiæ ad omnes circumfe-rentias, ideò etiam figura circũſcripta minor erit ſe-ctore, QAR, & multò mi-nor erit figura, AFN, ſector, QAR, ſed & æqualis illi o-ſtenſa fuit, quod eſt abſur-dum, igitur abſurdũ etiam eſt dicere omnes circumfe-rentias ſectoris, QAR, maiores eſſe omnibus circumferen-tijs ſpatij, AFN. Dico nunc neque eſſe minores, ſi hoc ve-rum eſt, ſint minores omnibus circumferentijs ſectoris, SAT, & repetita eadem conſtructione, ſit ſpatio, AFN, cir-cumſcripta figura ex ſectoribus cõpoſita, & alia inſcripta, ita vt circũſcriptæ figuræ omnes circumferentiæ ſuperent omnes circumferentias inſcriptę minori quantitate, quam ſint omnes circumferentiæ ſectoris, SAT, ergo omnes cir-cumferentiæ figurę, AFN, ſuperabunt omnes circumferen-tias figuræ inſcriptæ multò minori quantitate, quam eæ-dem ſuperent omnes circumferentias, QAR, ergo omnes circũferentiæ inſcriptæ figurę maiores erunt omnibus cir-cumferentijs ſectoris, QAR, ergo figura inſcripta maior e-tiam erit ſectore, QAR, & eodem multò maior erit figura, AFN, contra hypoteſim, eſt .n. illi æqualis, quod eſt abſur-dum, igitur abſurdum etiam eſt omnes circumferentias ſe-ctoris, QAR, minores eſſe omnibus circumferentijs figurę, AFN, ſed neq; ſunt illis maiores, vt oſtenſum eſt, ergo ſunt eiſdem æquales, ſed omnes circumferentiæ ſectoris, AQR, ad circulum, OQSN, vel quemcunq; ſectorem comparatæ ſunt, vt ſpatium ad ſpatium, ergo ſpatium quoque, AFN, ad circulum, OQSN, vel ad quemcunque ſectorem, erit vt o ẽs illius circumfer. ad o ẽs iſtius circũferentias, quod, &c. Ex antec.

Ex antec.

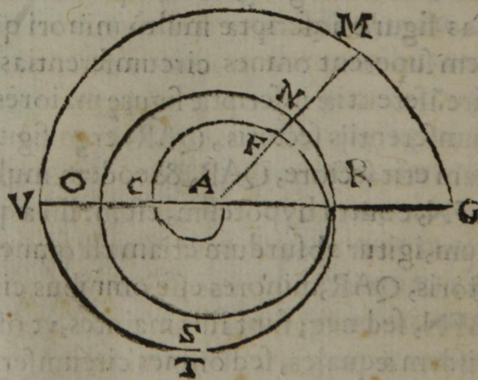


THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI in ſpiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ lineæ à puncto, quod eſt initium ſpiralis, & producātur vſq; ad circumferentiam primi circuli, eandem rationem inter ſe habebunt iſtæ in ſpiralem incidentes, quam arcus circuli, medij inter terminum ſpiralis, & limites linearum productarum in circumferentia factos, ſumptis in conſequentia arcubus à fine ſpiralis.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI in ſpirales in alijs reuolutionibus genitas, quam in prima incidant duæ lineæ ab initio ſpiralis, habebunt illæ inter ſe eandem rationem, quam arcus circuli primi, intercepti, veluti dicitur in antecedēte, cum integra circumferētia toties aſſumpta, quotus eſt vnitate minor reuolutionū numerus.



Hæ duæ Propoſitiones oſtenduntur ab Archimede lib de Spir. Prop. 14. & 15.

SCHOLIVM.

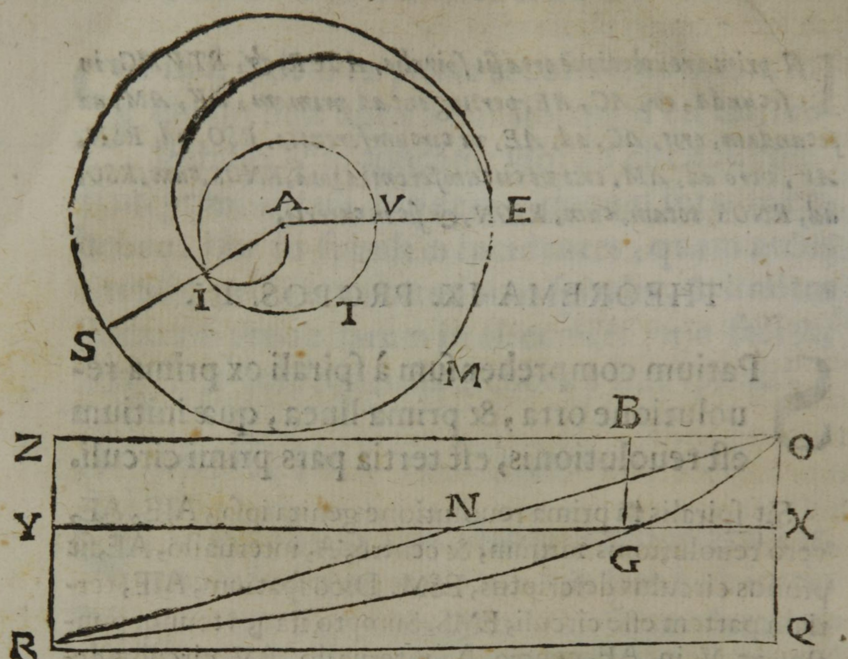
IN prima reuolutione orta sit spiralis, ACER, &, RTVMG, in secunda, &, AC, AE, pertingant ad primam, AV, AM, ad secundam, erit, AC, ad, AE, vt circumferentia, RSO, ad, RSN, AV, verò ad, AM, erit vt circumferentia tota, RNOS, cum, RSO, ad, RNOS, totam, cum, RSON, & sic in cæteris.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SPatium comprehensum à spirali ex prima reuolutione orta, & prima linea, quæ initium est reuolutionis, est tertia pars primi circuli.

Sit spiralis in prima reuolutione genita ipsa, AIE, AE, verò reuolutionis initium, & centro, A, interuallo, AE, sit primus circulus descriptus, ESM. Dico spatium, AIE, tertiam partem esse circuli, EMS. Sumpto itaq; vtcunq; puncto, vt, V, in, AE, centro, A, interuallo, AV, circulus describatur, VIT, & iuncta, AI, producatur ad, S, deinde exponatur triangulum rectangulum, OQR, cuius latus, OQ, circa rectum, OQR, sit æquale ipsi, AE, &, QR, circumferentiæ, SME, & compleatur rectangulum, QZ, abscindatũr autem, OX, æqualis, AV, & per, X, ducatur, XY, parallela, RQ, secans, ZR, in, Y, &, OR, in, N, & vertice, O, 20 l. 4. per punctum, R, describatur semiparabola, RGO, circa axem, OZ, quam secet, YX, in, G, & per, G, agatur, GB, parallela, OQ, incidens ipsi, ZO, in, B. Quoniam ergo qua- 38. & Sch. dratum, ZR, ad quadratum, BG, est vt, ZO, ad, OB, ideò, 40. l. 1. RQ, ad, GX, erit vt quadratum, QO, ad quadratum, OX, idest vt quadratum, EA, ad quadratum, AV, sed sic etiam est circumferentia, ESM, ad circumferẽtiam, ITV, etenim ad eam habet rationem compositam ex ratione circumferentiæ, ESM, ad circumferentiam, IVT, idest ex ea, quam

habet,



C. Cor. 2. 3. huius. habet, EA, ad, AV, & ex ratione circumferentiæ, IVT, ad circumferentiam, ITV, ideſt circumferentiæ, MSE, ad circumferentiam, SME, ideſt ex ratione, EA, ad, AI, vel ad,

7. huius.

E. 23. Sex. Elem. AV, duæ verò rationes, EA, ad, AV, componunt rationem quadrati, EA, ad quadratum, AV, ergo circumferentiæ, MSE, ad circumferentiam, ITV, eſt vt quadratum, EA, ad quadratũ, AV, ideſt vt, RQ, ad, XG, eſt autem, RQ, æqualis circumferentiæ, MSE, ergo &, GX, circũferentiæ, ITV, æqualis erit, & ſic oſtendemus quamlibet circumferentiam ipſi, A, concentricam, & interceptam inter ſpiralem, AIE, & rectam, AE, tamen extra ſpatium helicũ, AIE, adæquari ductæ in trilineo, OGRQ, ipſi, RQ, ductæ parallelæ, quæ nempè abſcindunt verſus puncta, O, A, ipſarum, OQ, AE, partes æquales, & quia, OQ, AE, ſupponuntur æquales,

ideò

ideò omnes lineæ trilinei, OGRQ, regula, RQ, omnibus circumferentijs trilinei recta, AE, spirali, AIE, & circumferentia, MSE, comprehensi æquales erunt. Similiter, quia est, RQ, ad, NX, vt, QO, ad, OX, vel, EA, ad, AV, vel circumferentia, MSE, ad, TIV, æquatur autem, RQ, ipsi, MSE, ergo, NX, æquatur circumferentiæ, TIV, & sic ostendemus omnes lineas trianguli, ORQ, adæquari omnibus circumferentijs circuli, MSE, ergo vt trianguli, ORQ, omnes lineæ ad omnes lineas trilinei, OGRQ, vel vt triangulum, 3.l.2. ORQ, ad trilineum, OGRQ, ita omnes circumferentiæ circuli, MSE, erunt ad omnes circumferentias figuræ spirali, AIE, recta, AE, & circumferentia, MSE, conclusæ, & per conuersionem rationis triangulum, ORQ, vel, OZR, ad figuram, OGR, erit vt omnes circumferentiæ circuli, MSE, ad omnes circumferentias spatij helici, AIE, idest vt circulus ad spatium, AIE, (quia curua, AIE, est talis cōditionis, qualem postulat Prop. 6. vt elicitur ex Prop. 7. huius) cum verò semiparabola, OGRZ, sit sexquitertia trianguli, OZR, 1.l.4. vnde diuidendo figura, OGR, sit tertia pars trianguli, OZR, ideò & spatium helicum, AIE, tertia pars erit circuli, MSE, quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

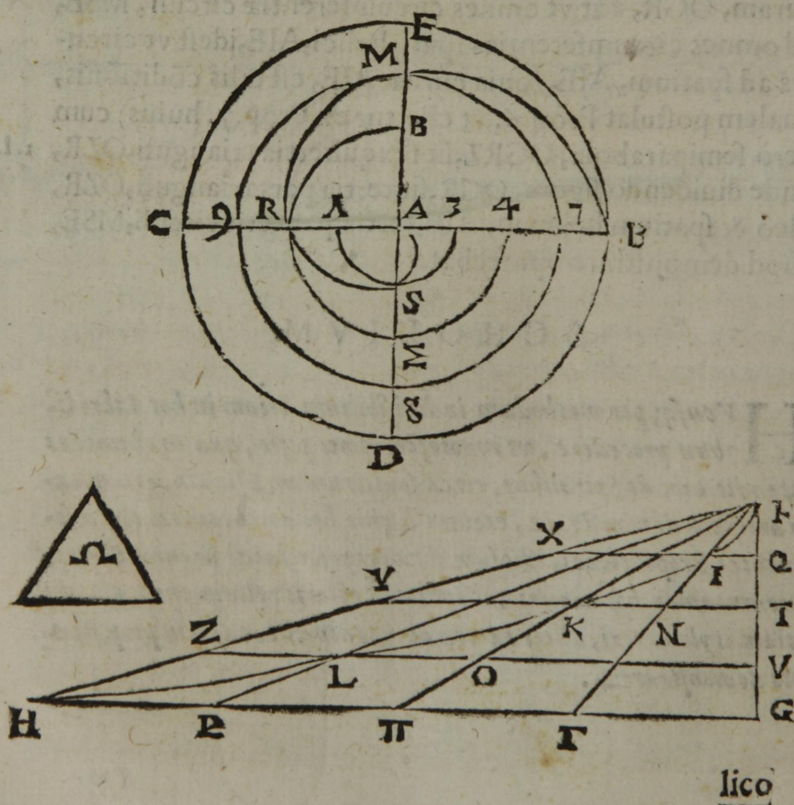
HVcusq; per methodum indiuisibilium etiam in hoc Libro libuit procedere, vt innotesceret nos posse, quæ Archimedes ostendit Lib. de Spiralibus, circa spatiorum mensuram, etiam tali artificio demonstrare, etenim si quis hoc attentauerit circa sequentes Propositiones, idipsum obtineri posse facilè animaduertet, verumtamen hoc arbitrio, ac iudicio Lectoris relinquendo, placuit etiam stylo veteri, aliter tamen ab Archimede, easdem propositiones demonstrare.

Pro-

Præfatæ Propoſ. alia demonſtratio.

SIt alia ſpiralis ex prima reuolutione orta, ASRMB, AB, verò initiũ reuolutionis, & centro, A, interuallo, AB, ſit primus circulus deſcriptus, ECDB, deinde exponatur triangulus, FHG, rectum habens angulum ad, G, cuius latus, FG, ſit æquale ipſi, AB, &, HG, circũferentiæ, ECDB, erit ergo triangulus, FHG, æqualis circulo, ECDB, intelligatur deinde in eiuſdem trianguli plano tranſire parabolam, HLF, cuius vertex ſit, F, &, HG, parallela eiuſdem axi, ad quem ipſa, GF, ſit ordinatim applicata, quæ tanget ſectionem in puncto, F. Dico igitur, FLHG, trilineum æquari ſpatio reſiduo, dempto à circulo, ECDB, ſpatio he-

2. huius. 20. l. 4. 17. Primi Conic.



lico

co ſub ſpirali, ASRMB, &, AB, ſi enim non eſt illi æquale, erit eodem vel maius, vel minus, ſit primò maius quantitate ſpatij, quod vocetur, Ω, rurſus diuidatur, HG, bifariam in, Π, & iungantur, FΠ, & ſic ipſæ, ΛΠ, ΠG, diuidantur bifariam in, P, Γ, & iungantur, PF, ΓF, ſicque ſemper fiat donec deuentum ſit, vt ad triangulum, FΓG, quod ſit minus ſpatio, Ω, deueniemus autem, nam à magnitudine propoſita, & his, quæ relinquuntur, ſemper auferatur dimidium, ſecent autem iungentes, F, cum diuiſionum punctis curuam parabolæ in punctis, I, K, L, per quæ ipſi, HG, parallelæ ducantur, XQ, YKT, ZLV, ſecantes, FG, in punctis, Q, T, V, dico, FG, per hæc ſecari in partes æquales, nam, HG, ad, GΓ, habet rationem compoſitam ex ea, quam habet, HG, ad, IQ, &, IQ, ad FG, ſed, AG, ad, IQ, eſt vt quadratum, GF, ad quadratum, FQ, &, IQ, ad, ΓG, vt, QF, ad, FG, ideſt vt quadratum, QF, ad rectangulum, QFG, ergo, HG, ad, GΓ, habebit rationem compoſitam ex ea, quam habet quadratum, GF, ad quadratum, FQ, & quadratum, FQ, ad rectangulum, QFG, quæ erit eadem ei, quam habet quadratũ, GF, ad rectangulum, GFQ, ideſt ei, quam habet, GF, ad, FQ, igitur, HG, ad, GΓ, erit vt, GF, ad, FQ, eodem modo oſtendemus, HG, ad, GΠ, eſſe vt, GF, ad, FT, &, HG, ad GP, vt, GF, ad FV, vnde, FG, diuiſa erit in partes æquales; habemus ergo ſpatio, FLHG, circumſcriptam figuram ex triangulo, FIQ, & ex trapezijs, KQ, LT, HV, compoſitam, & aliam inſcriptam ex trapezijs, PV, OT, NQ, compoſitam, & exceſſus circumſcriptæ ſuper inſcriptam ſunt trapezia, HL, LK, KI, cum triangulo, IFQ, quæ, quia æquantur trapezijs, ΓV, VN, NQ, & triangulo, IFQ, (nam dicta trapezia ſunt reſidua triãgulorum in æqualibus baſibus, & altitudinibus conſtitutorum) ideſt triangulo, FΓG, ſubinde ſunt minora ſpatio, Ω, & ideò circumſcripta ſuperat inſcriptam minori ſpatio, quam ſit, Ω, ergo trilineum, FLHG, excedit inſcriptam multò minori

Defin. 3. huius.

I. Decimi Elem.

Defin. 12. l. 1.

Coroll. 1. l. 4.

4. Sexti Elem.

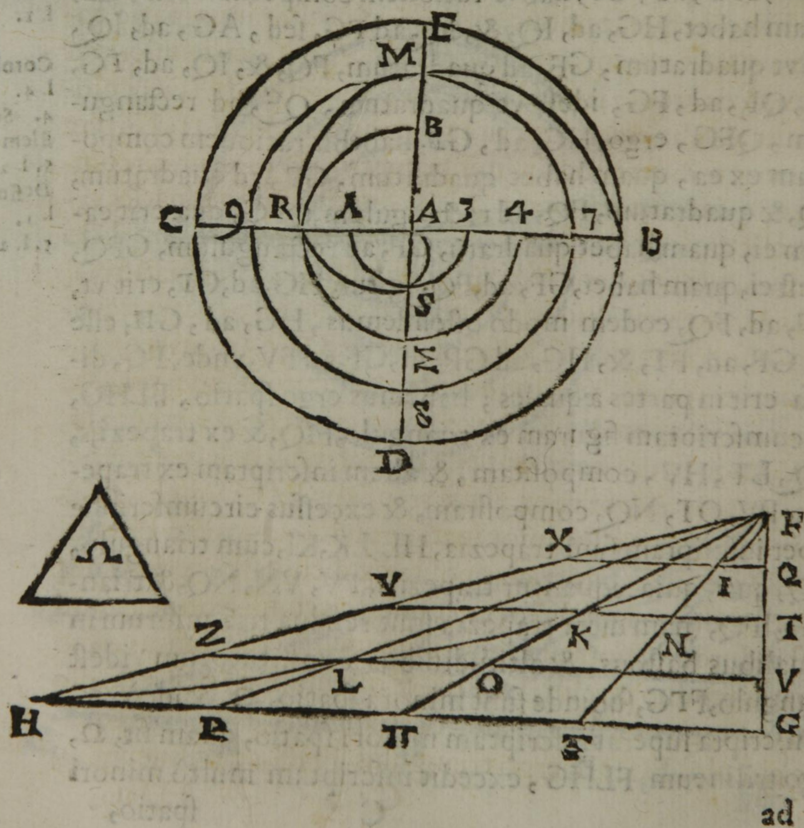
5. l. 2.

Defin. 12. l. 1.

5. l. 2.

ſpatio, excedit autem ſpatium reſiduum circuli, ECDB, iam dictum ſpatio, Ω, ergo figura inſcripta erit maior dicto ſpatio reſiduo; quod ſerua.

Diuidatur nunc, AB, ſimiliter, ac diuiditur, FG, in punctis, 3, 4, 7, centro autem communi, A, ad diſtantiam punctorum, 3, 4, 7, deſcribantur circumferentiæ, 3 5 λ, 4 Σ R β, 7 8 9 M, ſecantes ſpiralem in punctis, S, R, M, per quæ tranſeant eductæ à centro, A, productæque vſque ad circumferentiam, ECDB, rectæ, AD, AC, AE, vt igitur in præhabita demõſtratione oſtẽdemus circumfer. 5 3, & rectã, IQ, inter ſe æquales eſſe, & ſimiliter circumferentiam, R Σ 4, æquari rectæ, KT, & M 9 8 7, ipſi, LV, & quia, 5 3, circumferentia



ad circumfer. Σ4, eſt vt 3A, ad A4, .i. vt, QF, ad, FT, .i. vt, IQ, ad, NT, eſt aũt æqualis, 53, ipſi, IQ, ergo, Σ4, erit æqualis ipſi, NT, & eſt, 34, æqualis ipſi, QT, ergo faſcia, 534Σ, erit æqualis trapezio, IQTN; eodem modo oſtendemus faſciam, R9874, æquari trapezio, KV, & faſciam, MECDB7, æquari trapezio, PLVG, & ideo figura compoſita ex dictis faſcijs ęqualis erit figuræ compoſitæ ex his trapezijs inſcriptæ trilineo, FLHG, eſt autem hæc figura inſcripta maior ſpatio reſiduo circuli, ECDB, ab eo dempto ſpatio ſub ſpirali, & voluta, AB, ergo figura compoſita ex dictis ſpatijs erit maior ſpatio dicto reſiduo, cui tamen eſt inſcripta, quod eſt abſurdum, non ergo trilineum, FLHG, maius eſt dicto reſiduo. Coroll. 1. 3. huius.

Dico neq; eſſe minus. Sit, ſi fieri poteſt, minus ſpatio eodem, Ω, ſit autem vt ſupra trilineo, FLHG, circumſcripta figura, ex trapezijs, KQ, LT, HV, & triangulo, IFK, compoſita, & alia eidem inſcripta ex trapezijs, PO, OT, NQ, ita vt earum differentia ſit minor ſpatio, Ω, igitur circumſcripta excedet trilineum, FLHG, multò minori ſpatio, ergo circumſcripta figura minor erit ſpatio reſiduo iam dicto circuli, ECDB, quod excedit trilineum, FLHG, ſpatio, Ω; quod tamen eſt abſurdũ, nam ſectorem, AS3, patet æqualem eſſe triangulo, FIQ, faſciãque, ARΣ43, æquari oſtendemus trapezio, KQ, modo ſupra adhibito, & faſciam, βM 874, ipſi trapezio, LT, & totam faſciam, 679C, trapezio, HV, vnde figura compoſita ex dictis faſcijs, & ſectore, A53, erit ęqualis cõpoſitę ex dictis trapezijs, & triangulo, FIQ, quæ oſtenſa eſt eſſe minor ſpatio reſiduo iam dicto circuli, ECDB, & ideò figura compoſita ex dictis faſcijs erit minor ſpatio reſiduo iam dicto, cui tamen circumſcribitur, quod eſt abſurdum, uon eſt ergo trilineum, FLHG, minus dicto ſpatio reſiduo circuli, ECDB, & oſtenſum eſt neq; eſſe illo maius, ergo erit illi æquale, & triangulus, FHG, eſt æqualis circulo, ECDB, ergo triangulus, FHG, ad trilineum,

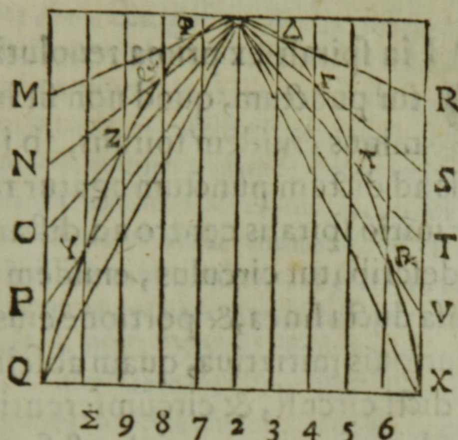
FLHG, erit vt circulus, ECDB, ad residuum spatium ab eo dempto spatio sub spirali, A53MB, & voluta, AB, sed triangulus, FHG, est sexquialter trilinei, FLHG, ergo circulus, ECDB, erit sexquialter spatij residui iā dicti, & consequenter erit triplus spatij, quod comprehenditur sub spirali, A5 3MB, & voluta, AB, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

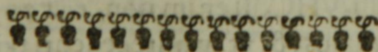
Hinc patet eductas à vertice parabolæ ad secantem quamcunq; diametro eiusdem parallelam, parabola, ac tangente ibidem interceptam, similiter secare eādem, ac transiens per punctum curuæ parabolæ, in quo prædicta eam diuidit, eidemq; parallela, secat ipsam tangentem, ostensum .n. est, ex. g. HG, ad, GΓ, esse vt, GF, ad, FQ, ex quo nouus, ni fallor, ac pulcherrimus describendi parabolam elicitur modus.

SCHOLIVM.

Sit describendæ parabolæ diameter, A2, basis, QX, cui per, A, sit ducta parallela, LF, sintque, AF, AL, æquales ipsis, 2X, 2Q, æqualibus, secta autem, AF, in quotcunq; partes æquales, vt in quinque, veluti etiam, LA, in punctis, K, I, H, G, B, C, D, E, per ipsa ducantur diametro, A2, æquidistantes KΣ, 19, H8, G7, 63, C4, D5, E6, secantes similiter basim, QX, in æquas partes in punctis, Σ, 9, 8, 7, 3, 4, 5, 6, tandem iunctis, LQ, FX, ipsæ similiter secentur ac, AF, vel, AL, scilicet in quinq; partes æquales in punctis, R, S, T, V, M, N, O, P, & ad hæc puncta ducantur ab, A, rectæ lineæ, AR, AS, AT, AV, AM, AN, AO, AP, necnon, AQ, AX, notentur autem puncta, in quibus eductæ ab, A, secant parallelas diametro, A2, ea tamen, in quibus eductæ diuidunt eas parallelas, quæ vicißim abscindūt de ipsis, AL, AF, versus, A, eandem partem, quam ab ipsis, QL, XF, abscindunt eductæ, versus tamen puncta, L, F, vt ex. g. notabimus punctum, Y,



in quo educta, AP, abscindit $\frac{4}{5}$. ipsius, ΩL, versus, L, sicut etiam parallela, KΣ, abscindit ab, LA, versus, A, $\frac{4}{5}$. ipsius, LA, sic ergo puncta notata erunt Ω, Υ, Z, &, Φ, Δ, Γ, Π, ℞, X, per quæ si extendatur curua linea, dico propinquissimè sic Parabolam delineari, prædicta nempè puncta esse in Parabola, cuius diameter, A2, & basis, ΩX, etenim habet hæc proprietatem in prahabito Corollario declaratam, vel, vt clarius loquar, XF, ad, E℞, exempli gratia, habet rationem compositam ex ratione, XF, ad, FV, idest, propter constructionem, ex ratione, FA, ad, AE, & ex ratione, VF, ad, E℞, hoc est adhuc ex ratione, FA, ad, AE, duæ autem rationes, FA, ad, AE, componunt ratione quadrati, FA, ad quadratum, AE, ergo, XF, ad, E℞, est vt quadratum, FA, ad quadratum, AE, sed sic etiam est, FX, ad parallelam ipsi, A2, interiectam inter, AF, & Parabolam circa diametrum, A2, in basi, ΩX, ergo punctum, ℞, est in tali parabola: Hoc idem ostendemus eodem modo de cæteris punctis, Π, Γ, Δ, Φ, &, Z, Υ, ergo dicta puncta sunt omnia in dicta parabola. Hic quidem modus debuisset poni Lib. 4. siue in meo Tractatu de Speculo Vstorio iam in lucem edito, sed quia oritur hic ex proprietate proximè demonstrata, nec illud prius menti subuenit, propterea idipsum hic subiungere libuit. Coroll. 1. l. 4.



THEO-

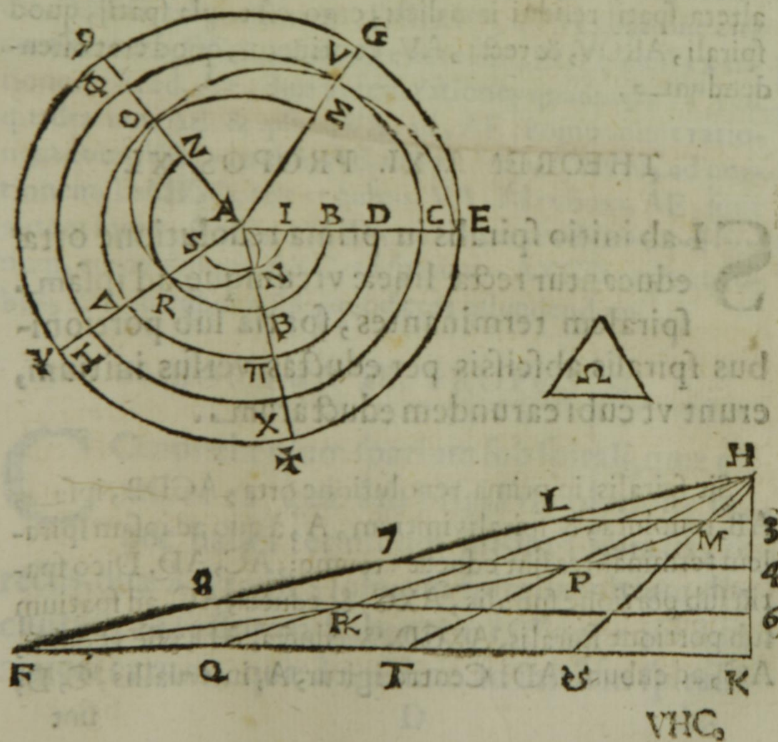
THEOREMA X. PROPOS. X.

SI in ſpirali ex prima reuolutione orta ſumatur punctum, quod non ſit initium, nec terminus eiuſdem ſpiralis, ab initio autem ſpiralis ad dictum punctum agatur recta linea, & ſuper initio ſpiralis centro ad diſtantiam dicti puncti deſcribatur circulus, eiuſdem portio comprehenſa ducta linea, & portione eius, quę dicitur reuolutionis initiatiua, quam abſcindit circũferentia dicti circuli, & circumferentia eiuſdem, quæ eſt ad conſequentia, tripla eſt figuræ comprehenſę ducta linea, & portione ſpiralis, quæ eſt ad conſequentia vſque ad initium ſpiralis.

Sit ſpiralis ex prima reuolutione orta, AOVE, primus circulus, EYG, ſumptum in ſpirali vtcumq; punctum, V, & centro, A, interuallo autem, AV, circulus deſcriptus, VHX. Dico portionem, AOVA, comprehenſam ſpiralis portione, AOV, & recta, AV, eſſe $\frac{1}{3}$. portionis eiuſdem circuli comprehenſæ rectis, AV, AC, & circumferentia, VHXC. Exponatur triangulus rectangulus, HKF, rectum habens angulum, FKH, cuius latus, HK, æquale ſit ipſi, AC,
3. huius. &, KF, circumferentiæ, CXHV, erit ergo triangulus, HFK, æqualis portioni circuli, cuius baſis eſt circumferentia,
20. l. 4. CXHV; deſcripta deinde intelligatur parabola, F℞H, cuius vertex, H, quàm tangat, KH, in, H, & FK, ſit axi eiuſdem æquidiſtans. Dico trilineum, H℞FK, eſſe æqualem ſpatio circumferentia, VHXC, ſpirali, VOA, & recta, AC, contento (quod ſpatium breuitatis cauſa dicatur reſiduum portionis circuli, VHC,) ſi enim non, erit eo maius, vel minus, ſit primò maius, & vt in antecedenti trilineo, H℞FK,

figu-

figura circumscripta intelligatur ex triangulo, HM3, & ex trapezijs, P3, ℞4, F6, composita, & alia inscripta ex trapezijs, M4, P6, ℞K, pariter composita, ita vt circũscripta superet inscriptam minori spatio, quam sit differentia dictarum figurarum (quæ differentia sit spatium, Ω,) igitur trilineum, H℞FK, minori quantitate superabit figuram inscriptam, quam spatium residuum portionis circuli, VHC, ergo figura inscripta erit maior dicto residuo, quod est absurdum, nam si, AC, diuidamus similiter, vt, KH, in punctis, IBD, & descripserimus per eadem puncta super cẽtro, A, circumferentias, INS, BRZ, DΠΟΣ, ostendemus, vt in antecedenti figuram compositam ex fascijs, IBβ, BDΔ, DC XΦ, esse æqualem figuræ inscriptæ trilineo, H℞FK, & consequenter esse maiorem spatio residuo portionis circuli,



VHC,

VHC, cui tamen inſcribitur, quod eſt abſurdum.

Sit nunc trilineum, HRFK, minus eodem, Ω, dicto reſiduo, & cætera, vt prius constructa, quia ergo circumſcripta figura ſuperat inſcriptam minori quantitate, quam ſit, Ω, ſuperabit ipſum trilineum, HRFK, multò minori quantitate, ergo figura circumſcripta minor erit ſpatio reſiduo portionis circuli, VHC, oſtendemus autem, vt ſupra figuram compoſitam ex ſectore, ANI, & ex faſcijs, IBR, BDO, DCV, eſſe æqualem figuræ circumſcriptæ trilineo, HRFK, ergo erit minor ſpatio reſiduo iam dicto, cui tamen circũſcribitur, quod eſt abſurdum, trilineum ergo, HRFK, neq; maius, neq; minus eſt ſpatio reſiduo iam dicto, ergo illi æquale, ſicut triangulus, HFK, eſt æqualis portioni circuli, cuius baſis eſt circumferentia, CHV, ſed triangulus, HFK, eſt ſexquialter trilinei, HRFK, ergo talis portio eſt ſexquialtera ſpatij reſidui iam dicti, ergo eſt tripla ſpatij, quod ſpirali, AROV, & recta, AV, continetur, quod erat oſtendendum.

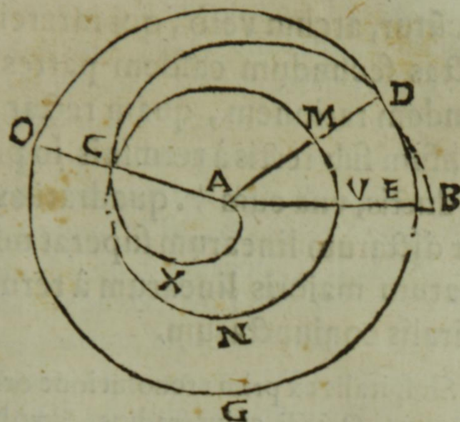
Elicitur ex prima l. 4.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI ab initio ſpiralis in prima reuolutione ortæ educantur rectæ lineæ vtcumque ad ipſam ſpiralem terminantes, ſpatia ſub portionibus ſpiralis abſciſsis per eductas verſus initium, erunt vt cubi earundem eductarum.

Sit ſpiralis in prima reuolutione orta, ACDB, ipſa, AB, reuoluta, & ſpiralis initium, A, à quo ad ipſam ſpiralem terminantes ſint eductæ vtcumq;, AC, AD. Dico ſpatiũ ſub portione ſpiralis, AXC, & educta, AC, ad ſpatium ſub portione ſpiralis, AXCD, & educta, AD, eſſe vt cubũ, AC, ad cubum, AD. Centro igitur, A, interuallis, C, D,

ſint



ſint deſcripti circuli, CMVN, DGE, & ſit producta, AC, vſq; ad circũferentiam circuli, DG, cui incidat in, O, portio igitur circuli, CAVN, ad portionem circuli, DAEGO, habet rationem compoſitam ex ea, quam habet portio, CAVN, ad portionem, OAEG, ideſt ex ratione quadrati, VA, ad quadratum, AE, & ex ratione portionis, OAEG, ad portionem, DAEGO, ideſt ex ratione circumferentiæ, EGO, ad circumferẽtiam, EGD, ideſt ex ratione, VA, ad, AE, duæ autem rationes quadrati, VA, ad quadratum, AE, & ipſius, VA, ad, AE, componunt rationem cubi, VA, ad cubũ, AE, ergo portio, CAVN, ad portionem, DAEGO, erit vt cubus, VA, ad cubum, AE, ſunt autem ſpatia, AXC, AXCD, tertiæ partes dictarũ portionum, ergo ſpatium, AXC, ad ſpatium, AXCD, erit vt cubus, VA, ad cubum, AE, quod erat oſtendendum.

Defin. 12. l. 1. Corol. 2. 3. huius.

33. Sexti Elem. 7. huius.

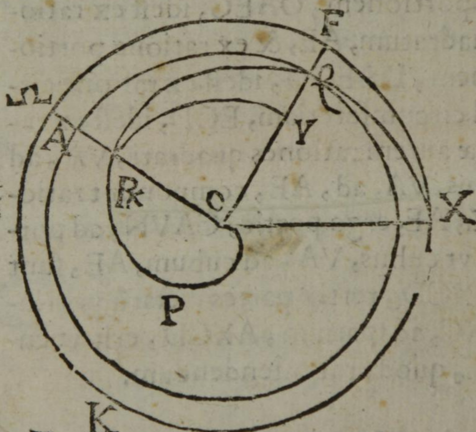
Ex ant.

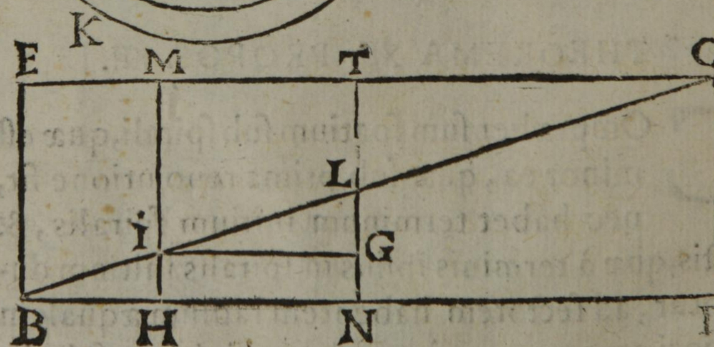
THEOREMA XII. PROPOS. XII.

COmpræhenſum ſpatium ſub ſpirali, quæ eſt minor ea, quæ ſub prima reuolutione fit, nec habet terminum initium ſpiralis, & rectis, quæ à terminis ipſius in ſpiralis initium ducuntur, ad ſectorem habentem radium æqualem maiori earum, quæ à termino ad initium ſpiralis

ducũtur, arcum verò, qui intercipitur inter duas rectas secundum easdem partes spiralis, habet eandem rationem, quam rectangulum compræhensum sub rectis à terminis in principium spiralis ductis, vna cum ⅓. quadrati excessus, quo maior dictarum linearum superat minorem, ad quadratum maioris linearum à terminis ad initium spiralis coniunctarum.

Sit spiralis ex prima reuolutione orta, OP℞QX, primus circulus, ΩKXF, cuius, radius, & voluta sit, OX, spiralis, ℞Q, minor ea, quæ sub prima reuolutione fit, nec habet





ter-

terminum initium ſpiralis, iunctis autem, OA, OQ, & ijs vſque ad circumferentiam, FΩKX, productis, cui incidant in, Ω, F. Dico trilineum, ℞OQ, ad ſectorem, AOQ, eſſe vt rectangulum, AO℞, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, A℞, ad quadratum, AO. Exponatur parallelogrammum rectangulum, ED, cuius latus, CD, ſit æquale ipſi, OX, &, BD, circumferentiæ, FΩKX, & ſit iuncta, BC, &, CT, ſit æqualis circumferentiæ, XKΩ, TM, circumferentiæ, ΩF, &, ME, circumferentiæ, FX, & per puncta, M, T, ducantur ipſi, CD, parallelæ, MH, TN, quarum, MH, ſecet, BC, in, I, & per, I, ipſi, EC, parallela ducatur, IG, erit ergo, MC, æqualis circumferentiæ, XKΩF, & quia circumferentia, XFΩK, ad circumferentiam, FΩKX, eſt vt, XO, ad, OQ, ideſt, EC, ad, CM, eſt vt, XO, ad, OQ, eſt autem, EC, ad, CM, vt, EB, ad, MI, ergo, EB, ad, MI, erit vt, XO, ad, OQ, ſunt autem ipſæ, XO, EB, æquales, ergo etiam æquales erunt ipſæ, MI, QO, ſic oſtendemus eſſe æquales ipſas, O℞, TL, quia ergo ſector, AOQ, ad ſectorem, ΩOF, eſt vt quadratum, QO, ad quadratum, OF, ideſt vt quadratum, IM, ad quadratum, MI, ideſt vt omnia quadrata, MG, regula, EB, ad omnia quadrata, MN, & ſector, ΩOF, ad circulum, FK, eſt vt circumferentia, ΩF, ad circumferentiam, FΩKX, ideſt vt, MT, ad, EC, ideſt vt omnia quadrata, MN, regula, EB, ad omnia quadrata, ED, & circulus, ΩKXF, ſpatij, OXQ℞PO, triplus eſt, ideſt, ſe habet ad illud, vt omnia quadrata, ED, ad omnia quadrata trianguli, EBC, regula, EB, item ſpatium, OXQ℞P, ad ſpatiū, OQ℞PO, eſt vt cubus, OX, ad cubum, OQ, ideſt vt cubus, EB, ad cubum, MI, ideſt vt omnia quadrata trianguli, EBC, ad omnia quadrata trianguli, MIC, ergo ex æquali ſector, AOQ, ad ſpatium, OQ℞PO, erit vt omnia quadrata, MG, ad omnia quadrata trianguli, MIC, & quia ſpatium, OQ℞PO, ad ſpatium, ℞PO, eſt vt cubus, OQ, ad cubum, OR, ideſt vt cubus, MI, ad cubum, TL, ideſt vt omnia quadrata trianguli, MIC, ad omnia quadrata trian-

Marginal notes: 7. huius. — 4. Sexti Elem. — Coroll. 2. 3. huius. — 10. l. 2. — 9 huius. — 24. l. 2. — Ex ant. — Corol. 22. l. 2. — F. Cor. 22. l. 2.

trianguli, TLC, ergo ſector, AOQ, ad ſpatium, OP℞, erit vt omnia quadrata, MG, regula, MI, ad omnia quadrata trianguli, TLC, eſt autem idem ſector, AOQ, ad ſpatium, OP℞Q, vt omnia quadrata, MG, ad omnia quadrata trianguli, MIC, regula eadem, ergo ſector, AOQ, ad reliquum ſpatium, dempto ſpatio, OP℞, à ſpatio, OP℞Q, erit vt omnia quadrata, MG, regula, MI, ad omnia quadrata trapezij, MILT, ſed hæc ſunt, vt quadratum, GT, ad rectangulum, GTL, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, LG, ergo, conuertendo, ſpatium, ℞OQ, ad ſectorem, AOQ, erit vt rectangulũ, AO℞, cum tertia parte quadrati, A℞, ad quadratum, AO, quod erat oſtendendum.

28. l. 2.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

IN eadem antecedentis figura centro, O, diſtantia, O℞, deſcripta circumferentia, ℞Y, oſtendemus trilineum, A℞Q, ad trilineum, ℞QY, eſſe vt, ℞O, cum $\frac{2}{3}$. ℞A, ad, ℞O, cum tertia parte ipſius, ℞A.

Quia enim ex antecedente ſector, AOQ, ad ſpatium, Q℞O, eſt vt quadratum, AO, ad rectangulum, AO℞, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, A℞, per conuerſionem rationis, idem ſector ad trilineum, A℞Q, erit vt quadratum, AO, ad rectangulum, O℞A, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ℞A, nam dempto rectangulo, AO℞, à quadrato, AO, remanet rectangulum, OA℞, .i. rectangulum, O℞A, cum quadrato, ℞A, à quo ablato $\frac{1}{3}$. remanet rectangulum, O℞A, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ℞A, ideſt cum rectangulo ſub $\frac{2}{3}$. ℞A, & ſub, ℞A, quod cum rectangulo, O℞A, conficit rectangulum ſub compoſita ex, O℞, & $\frac{2}{3}$. ℞A, & ſub, ℞A, conuertendo igitur trilineũ, A℞Q, ad ſectorem, AOQ, erit vt rectangulum ſub compoſita ex,

1. Secundi Elem.

O℞,

OR, & $\frac{2}{3}$. RA, & ſub, RA, ad quadratum, OA, inſuper ſector, AOQ, ad ſectorem, ROY, eſt vt quadratum, AO, ad quadratum, OR, & quia idem ſector, AOQ, ad ſpatium, QRO, eſt vt quadratum, AO, ad rectangulum, AOR, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, RA, ideò ſector, AOQ, ad reliquum dempto à ſpatio, ROQ, ſectore, ROY, .i. ad trilineum, QRY, erit vt quadratum, AO, ad reliquum rectanguli, AOR, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, RA, ab eo dempto quadrato, RO, .i. ad rectangulum, ORA, cū $\frac{1}{3}$. quadrati, RA, erat autem trilineum, ARQ, ad ſectorem, AOQ, vt rectangulum ſub compoſita ex, OR, & $\frac{2}{3}$. RA, ad quadratum, AO, ergo ex æquali trilineum, ARQ, ad trilineum, RQY, erit vt rectangulū ſub compoſita ex, OR, & $\frac{2}{3}$. RA, & ſub, RA, ad rectangulum, ORA, cum 3. parte quadrati, RA, .i. ad rectang. ſub compoſita ex, OR, & $\frac{1}{3}$. RA, & ſub, RA, & quia horū rectangulorum altitudines ſunt æquales, ideò trilineum, ARQ, ad trilineum, RQY, erit vt, OR, cum $\frac{2}{3}$. RA, ad, OR, cum tertia parte, RA, quod oſtendere opus erat.

Coroll. 2. 3. huius.

3. Secundi Elem.

5. l. 2.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duæ rectæ lineæ ducantur, quarum altera parabolam tangat, altera verò ducta axi, vel diametro eiuſdē æquidiſtans, eandem ſecet, iuncto verò puncto contactus cum hoc ſectionis puncto, rurſus ab hoc puncto ad latus illi oppoſitum in facto triangulo recta producatur, quæ curuam ſecabit parabolæ, à quo ſectionis puncto ducatur axi, vel diametro parallela quouſq; incidat in tangentem: Triangulum ſub eductis ad ſecantem à puncto contactus, ad portionem parabolæ eiſdem interceptam erit, vt quadratū totius

tangentis ad rectangulum sub eadem, & sub illius abscissa per eam versus punctum contactus per secundò ductam axi, vel diametro parallelam, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ dictarũ tangentium.

Sit parabola curua, BIA, quam tangat, DA, in puncto, A, DB, verò axi, vel diametro eiusdem parallela eandem secet in puncto, B, iunctis verò, BA, à puncto, A, ducatur intra triangulum, ABD, ad latus oppositum, BD, vtcũque, AC, secans curuam, AIB, in, I, à quo versus tangentem, AD, ducatur, IE, axi, vel diametro iam dicto æquidistans. Dico igitur triangulum, ABC, ad trilineum, ABI, esse vt quadratum, DA, ad rectangulum, DAE, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, DE. Exponatur parallelogrammum, FP, cuius angulus, OPH, sit æqualis angulo, ADB, &, OP, æqualis ipsi, AD, &, HP, ipsi, BD, abscindatur deinde ab, OP, versus, O, ipsa, ON, æqualis ipsi, AE, & per, N, ducatur, GN, parallela ipsi, HP, secans iungentem, HO, in, M, (sint.n.iuncta, H, O, puncta recta, HO,) sit verò regula, HP. Quia ergo, BD, ad, DC, est vt, DA, ad, AE, per conuersionem rationis, & conuertendo, CB, ad, BD, erit vt, ED, ad, DA, .i. vt, NP, ad, PO, .i. vt omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata, FP, regula, HP, sed vt, CB, ad, BD, sic triangulus, ABC, ad triangulum, ABD, ergo vt omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata, FP, sic erit triangulus, ABC, ad triangulum, ABD, quod seruа.

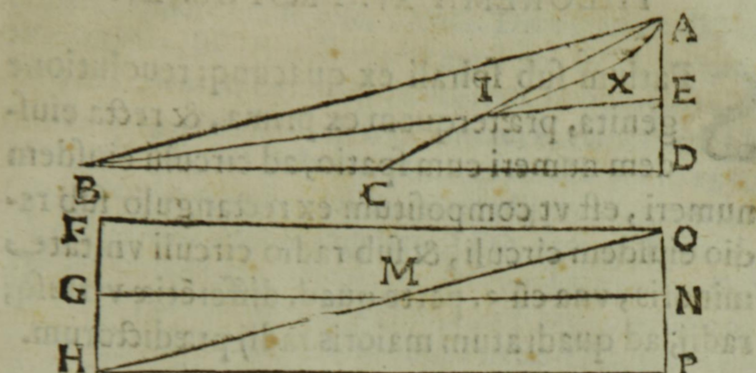
Corol l. 9. huius, ad posteriorẽ demonst 10. l. 2.

Insuper omnia quadrata, FP, sunt tripla omnium quadratorum trianguli, OHP, & ideò sunt ad illa, vt triangulus, ABD, ad sectionem, AIB, cuius est triplus, quod etiam serua. Vlterius omnia quadrata trianguli, OHP, ad omnia quadrata trianguli, OMN, sunt vt cubus, PO, ad cubũ, ON, .i. vt cubus, DA, ad cubum, AE, .i. vt sectio, AIB, ad sectionem, AXI, (sunt .n. tertiæ partes triangulorum, ABD, AIE,

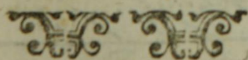
24. l. 2.

Elicitur ex prima l. 4.

F. Cor. 22. l. 2.



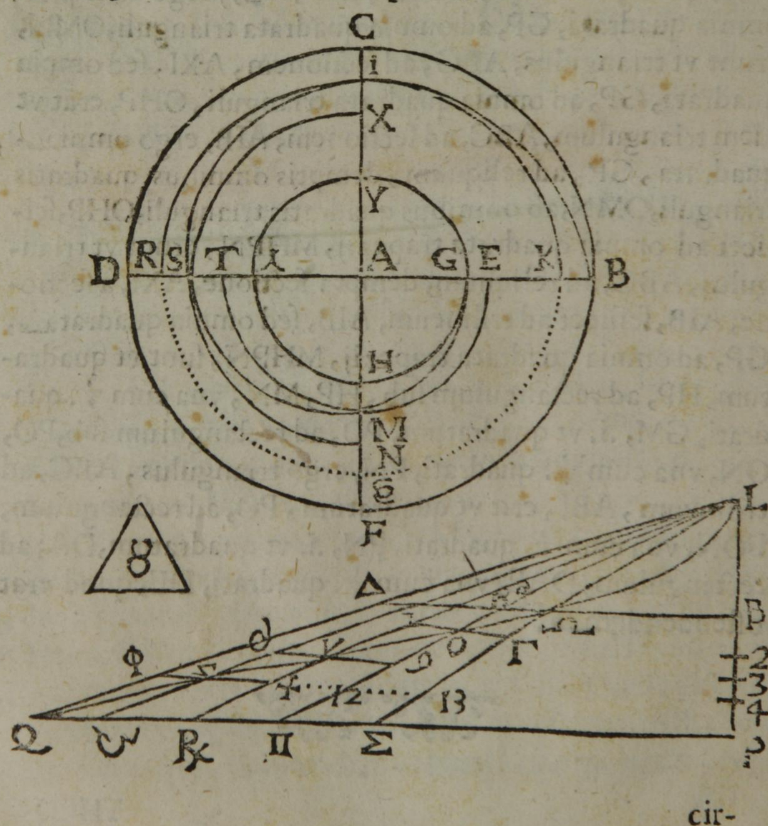
AIE, qui inter se sunt, vt cubi, DA, AE,) ergo ex æquali omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata trianguli, OMN, erunt vt triangulus, ABC, ad sectionem, AXI, sed omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata trianguli, OHP, erãt vt idem triangulum, ABC, ad sectionem, AIB, ergo omnia 28. l. 2.
quadrata, GP, ad reliquum, demptis omnibus quadratis trianguli, OMN, ab omnibus quadratis trianguli, OHP, scilicet ad omnia quadrata trapezij, MHPN, erunt vt triangulus, ABC, ad reliquum, dempta sectione, AXI, à sectione, AIB, scilicet ad trilineum, AIB, sed omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata trapezij, MHPN, sunt vt quadratum, HP, ad rectangulum sub, HP, MN, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, GM, .i. vt quadratum, PO, ad rectangulum sub, PO, ON, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, PN, ergo triangulus, ABC, ad trilineum, ABI, erit vt quadratum, PO, ad rectangulum, PON, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, PN, .i. vt quadratum, DA, ad rectangulum, DAE, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, DE, quod erat ostendendum.



THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SPatium ſub ſpirali ex quacunq; reuolutione genita, præterquam ex prima, & recta eiuſdem numeri cum ſpatio, ad circulũ eiuſdem numeri, eſt vt compoſitum ex rectangulo ſub radio eiuſdem circuli, & ſub radio circuli vnitate minoris, vna cũ 3. parte quad. differẽtiæ vtriuſq; radij, ad quadratum maioris radij prædictorum.

Sit quicunq; circulus, CDFB, ſpatium eiuſdem numeri cũ eo, quod continetur ſub ſpirali, GMSIB, & voluta, GB;



cir-

circulus vnitate minor ipſe, YAHG. Dico ſpatium dictum ad circulum, BCDF, eſſe vt rectangulum, BAG, cum tertia parte quadrati, GB, ad quadratū, AB. Exponatur triangulus, LPQ, rectum habēs angulum ad, P, cuius latus, LP, ſit æquale ipſi, AB, & latus, PQ, æquale compoſito ex tot circūferentijs circuli, CDFB, quot radij primi circuli ſunt in, AB, deinde intra triangulum, LPQ, vertice, L, deſcripta ſit parabola, cuius curua tranſeat per, Q, quæ ſit, LΩQ, ita vt, LP, ſit eandem tangens in, L, & ſecans parallela axi ipſa, QP, abſcindatur deinde ab, LP, recta, Lβ, æqualis ipſi, AG, & per, β, ducatur, βΔ, parallela ipſi, QP, ſecans curuam parabolæ in, Ω, & iunctis, LΩ, producatur, LΩ, vſq; ad, QP, cui incidat in, Σ. Quia igitur eſt, QP, ad, PΣ, vt, PL, ad, Lβ, per conuerſionem rationis, PQ, ad, QΣ, erit vt, LP, ad, Pβ, quotuplex ergo eſt, LP, ipſius, Pβ, radio primi circuli æqualis, totuplex erit, QP, ipſius, QΣ, eſt autē etiam totuplex, QP, circūferentiæ, CDFB, ergo, QΣ, erit æqualis circumferentiæ, CDFB, eſt autem, LP, æqualis ipſi, AB, ergo triangulus, LQΣ, circulo, CDFB, æqualis erit. Dico vlterius trilineū, LQΩ, æquari ſpatio circuli, CDFB, nempè contento ſub ſpirali, GSIB, & voluta, GB, ſi .n. non, erit eo maior, vel minor, ſit primò maior quantitate ſpatij ſeorſim expoſiti, 8, diuiſa autem bifariam, QΣ, in, ℞, iungatur, L℞, rurſus bifariam diuidantur, Q℞, ℞Σ, in punctis, &, Π, & iūgantur, &L, ΠL, & ſic ſemper fiat donec deuentum ſit ad triangulum minorem ſpatio, 8, ſit is triangulus, LΠΣ, per puncta autem, in quibus, LΠ, L℞, L&, ſecāt curuam, QΩ, ſcilicet per, O, V, Z, ducantur, QP, parallelæ, 7Γ, 69, Φ4, quæ ſi producantur ſecent, βP, in punctis, 2, 3, 4, quia ergo, Q&, &℞, ℞Π, ΠΣ, ſunt æquales facilè oſtendemus per Coroll. Prop. 9. huius, etiam, P4, 43, 32, 2β, eſſe æquales, ſimiliter facilè oſtendemus, trapezia, QZ, ZV, VO, & triangulum, LOΓ, ſimul collecta æquari triangulo, LΠΣ, .i. eſſe minora ſpatio, 8, habemus ergo ſpatio, LQΩ, cir-

20. l. 4.

Coroll. 9 huius, ad poſter demonſt.

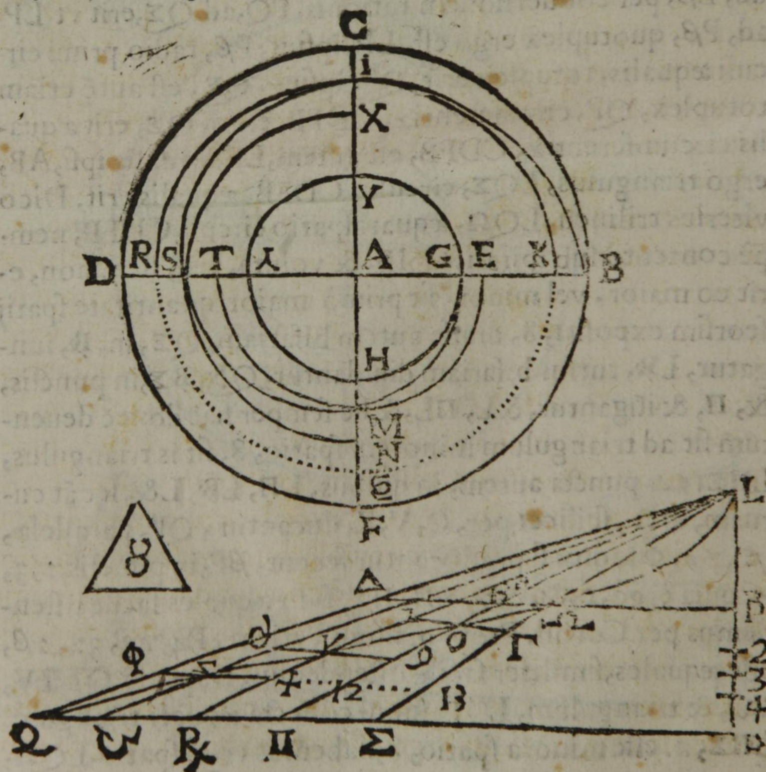
Iuxta 2. huius.

Iuxta pri. 10. Elem.

Iux. Cor. 1. tertiæ huius.

circumſcriptam figuram ex triangulis, LQ&, L+Z, L9V, LΓO, & aliam eidem inſcriptam ex triangulis, LZ+, LV6, LO7, LΩΣ, compoſitam, quam circumſcripta excedit minori ſpatio, quam ſit, 8, ergo trilineum, LQΩ, excedet inſcriptã multò minori ſpatio, ergo inſcripta erit maior ſpatio, GMSIB, quod eſt abſurdum, nam ſi centro, A, ſemidiametris æqualibus ipſis, L4, L3, L2, deſcribantur ſectores, vel ſectorum reſidua, AKIR, XSN, TME, habebimus ſpatio, BISMG, inſcriptam figuram ex ſectoribus, vel ſectorum reſiduis iam dictis compoſitam, & aliam circumſcriptam ex ſectoribus, vel ſectorum reſiduis, BAC, IAR, SAN, MAE, compoſitam, & quia, ΣQ, ad, QP, eſt vt, βP, ad, PL, & PQ, ad, Q&, eſt vt, LP, ad, P4, ex æquali, ΣQ, ad, Q&,

Coroll. 9. huius, ad poſteriorẽ demonſt.



erit

erit vt, βP, ad, P4, ideſt vt, GB, ad, BK, ideſt vt circumferentia, CDFB, ad circumferentiam, CB, (nam dum pũctus, B, deſcribit totam circumferentiam, CDFB, punctus deſcribens ſpiralem percurrit ipſam, GB, & dum, B, deſcripſit circumferentiam, CB, idem punctus percurrit ipſam, BK,) eſt autem, QΣ, æqualis circumferentiæ, CDFB, ergo, Q&, æqualis erit circumfer. CB, eſt verò, Q&, ad, ΦZ, vt, PL, ad, L4, ideſt vt, BA, ad, AK, ideſt vt circumferentia, CB, ad circumferentiam, IK, ergo, ΦZ, erit æqualis circumferentiæ, IK, & eſt altitudo trianguli, LΦZ, .i. L4, æqualis ipſi, KA, ergo triangulus, LΦZ, ſectori, KAI, æqualis erit. Eodem modo oſtendemus triangulum, LVB, æquari ſectori, AXS, & triangulum, LO7, ſectori, ATM, & tandem triangulum, Ab'Ω, ſectori, AHG, ergo figura inſcripta trilineo, LQΩ, æqualis erit inſcriptæ ſpatio, GMSIB, eſt autem illa maior ſpatio, GMSIB, ergo figura inſcripta ſpatio, GMSIB, erit eodem ſpatio, GMSIB, maior, quod eſt abſurdum, non ergo trilineus, LQΩ, maior eſt ſpatio, GMSIB. Elicitur ex 4 Sexti Elem. Coroll. 2. 3 huius. Elicietur ex Cor. 1. 3. huius.

Sed dico neq; eſſe minorem eodem ſpatio, GMSIB, ſi enim eſt ſit adhuc defectus ſpatium, 8, modo autem ſupra adhibito circumſcribatur trilineo, LΩQ, figura, & alia inſcribatur ex triangulis compoſita, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori ſpatio, quam ſit, 8, deſeruiant autem nobis iam in prima parte deſcriptæ figuræ, tum intra, & extra trilineum, LΩQ, tum intra, vel extra ſpatium, GMSIB. Igitur figura circumſcripta trilineo, LΩQ, ſuperabit eundem trilineum multò minori ſpatio, quam ſit, 8, nempè quam ſpatium, GMSIB, excedat trilineum, LΩQ, ergo figura huic trilineo circumſcripta erit minor ſpatio, GMSIB, oſtendemus autem eandem æquari figuræ circumſcriptæ eidem ſpatio, GMSIB, modo ſupra poſito, ergo figura circũſcripta ſpatio, GMSIB, erit eodem minor, quod eſt abſurdum, igitur trilineus, LΩQ, neq; eſt maior, neq; minor ſpatio, GMSIB, ergo eſt eidem æqualis, & eſt trian-

gulus, LQΣ, æqualis circulo, CDFB, ergo circulus, CDFB, ad ſpatium, GMSIB, erit vt triangulus, LQΣ, ad trilineum, LQΩ, eſt aũt triangulus, LQΣ, ad trilineũ, LQΩ, vt quadratum, PL, ad rectangulum, PLβ, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, Pβ, ergo circulus, CDFB, ad ſpatium, GMSIB, erit vt quadratum, PL, ad rectangulum, PLβ, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, Pβ, .i. vt quadratum, BA, ad rectangulum, BAG, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, GB, quod erat nobis oſtendendum.

Ex ant.

SCHOLIVM.

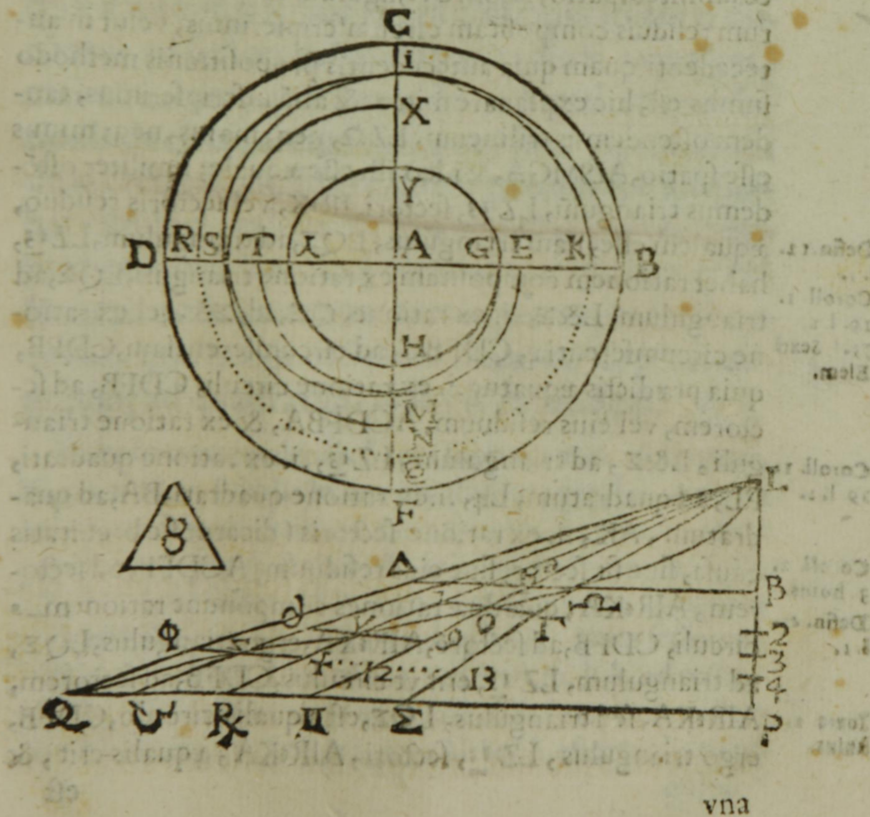
POterant autem, vt in Prop. 5. & 6. huius, componi figuræ, quæ circumſcribuntur, & inſcribuntur, ex trapezijs, in quo caſu circumſcriptio, & inſcriptio intelligi debuiſſet circa trilineum, QΩΣ, vel in ſupra demonſtratis propoſitionibus poterant dictæ figuræ ex triangulis componi, veluti in hac effectum eſt, & tunc circumſcriptio, & inſcriptio ſectionibus, FLH, in Schemate poſterioris demonſtrationis Prop. 9. &, HRF, in Propoſ. 10. fieri debuiſſet intelligi, hanc tamen varietatem proſequutus ſum, vt pateat vtroq; modo nos, quod inquirimus, obtinere poſſe.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI in ſpirali ex quacunq; reuolutione genita ſumatur punctum, quod non ſit initium, nec terminus eiuſdem ſpiralis, & iungatur cum puncto, quod eſt initium reuolutionis, quo tamquam centro ad diſtãtiam ſumpti puncti circulus ſit deſcriptus, huius ſector, vel ſectoris reſiduum, cuius baſis ſit circũferentia inter hoc punctum, & principium circulationis ad partes conſequentes incluſa, ad ſpatium helicum ab eodem ſe-

sectore, vel sectoris residuo, apprehensum, erit vt quadratum semidiametri descripti circuli, ad rectãgulum sub eodem, & sub radio circuli eiusdem numeri cum spirali vnitate prædicta minoris, vna cum tertia parte quadrati excessus vtriusq; radij.

Conspiciatur antecedentis figura, in qua sumpto vtcũq; pũcto in spirali, GMSIB, quod sit, I, intelligatur descriptus circulus, IR&K. Dico igitur sectorem, vel eius residuum, cuius basis est circumferentia, IR&K, ad rectas, IA, AK, terminata, ad spatium sub spiralis portiones, ISMG, & rectis, IA, AG, esse vt quadratum, IA, ad rectangulũ sub, IA, AG,



vna

vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, GK; in ipsa enim, QΣ, iam habemus, &Σ, æqualem circumferentiæ, CDFB, terminanti ad, C, B, producatur, Φ 3, quousque secet ambas, LΠ, LΣ, vt in, 12, 13, & quia, &Σ, ad, Z 13, est vt, ΣL, ad, L 13, vel vt, PL, ad, L4, siue, BA, ad, AK, siue circumferentia, CDFB, ad circumferentiam, IR6K, ideò circumferentia, IR6K, erit æqualis ipsi, Z 13, si ergo diuidamus, Z 13, bifariam, & factas portiones adhuc bifariam, & sic semper fiat, iungentes diuisionum puncta cum, L, & per puncta, in quibus istæ iungentes secant curuam parabolæ, ZΩ, ductis ipsi, Z 13, parallelis, vt in antecedenti circumscripserimus trilineo, LZΩ, figuram, & aliam inscripserimus, ex triangulis cõpositam, & similiter spatio, AISMGA, figuram ex sectoribus, vel eorum residuis compositam circumscripserimus, velut in antecedenti (quam quia antecedentis propositionis methodo similis est, hic explanare mitto) & aliã inscripserimus, tandem ostendemus trilineum, LZΩ, neq; maius, neq; minus esse spatio, AISMGA, & ideò illi esse æquale; similiter ostẽdemus triangulũ, LZ 13, sectori, IR6K, vel sectoris residuo, æqualem esse, nam triangulus, LQΣ, ad triangulum, LZ 13, habet rationem compositam ex ratione trianguli, LQΣ, ad triangulum, L&Σ, .i. ex ratione, QΣ, ad, Σ&, vel ex ratione circumferentiæ, CDFBC, ad circumferentiam, CDFB, quia prædictis æquatur .i. ex ratione circuli, CDFB, ad sectorem, vel eius residuum, ACDFBA, & ex ratione trianguli, L&Σ, ad triangulum, LZ 13, .i. ex ratione quadrati, PL, ad quadratum, L4, .i. ex ratione quadrati, BA, ad quadratum, AK, .i. ex ratione sectoris (dicatur sic breuitatis causa, siue sit sector, siue eius residuum) ACDFB, ad sectorem, AIR6KA, quæ duæ rationes componunt rationem circuli, CDFB, ad sectorẽ, AIR6KA, ergo triangulus, LQΣ, ad triangulum, LZ 13, erit vt circulus, CDFB, ad sectorem, AIR6KA, sed triangulus, LQΣ, est æqualis circulo, CDFB, ergo triangulus, LZ 13, sectori, AIR6KA; æqualis erit, & est

Iuxta 4. Sexti Elc.

Defin. 12. l. 1. Coroll. 1. 19. l. 2. 33. Sexti Elem.

Coroll. 1. 39. l. 2.

Coroll. 2. 3. huius. Defin. 12. l. 1.

Iuxta 2. huius.

est trilineus, LZΩ, æqualis ſpatio, AISMGA, ergo ſector, AIRςKA, ad ſpatium, AISMGA, erit vt triangulus, LZ 13, ad trilineum, LZΩ, .i. vt quadratum, 4L, ad rectangulum ſub, 4L, Lβ, cum ⅓. quadrati, 4β, .i. vt quadratum, IA, ad rectangulum ſub, IA, AG, cum ⅓. quadrati, GK, quod erat oſtendendum. 14. huius.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

Comprehenſum ſpatium ſub ſpirali, quæ eſt minor ea, quæ ſub vna reuolutione fit, nec habet terminum initium ſpiralis, & rectis, quæ à terminis ipſius in reuolutionis initium ducuntur ad ſectorem habentem radium æqualem maiori earum, quæ à termino ad initium reuolutionis ducitur, arcum verò, qui intercipitur inter duas rectas ſecundum eaſdem partem ſpiralis; habet eandem rationem, quam rectangulum comprahenſum ſub rectis à terminis ad initium reuolutionis ductis, vna cum tertia parte quadrati exceſſus, quo maior dictarum linearum ſuperat minorem, ad quadratum maioris earundem.

In eadem antecedentis figura ſupponamus aſſumptam, IS, portionem ſpiralis in vna reuolutione genitæ, quæ non habeat terminum initium talis ſpiralis, à cuius extremis punctis, I, S, ſint ductæ ad, A, initium reuolutionis ipſæ, SA, IA, & ſit ſector, IAR, cuius ſemidiameter ſit æqualis maiori ductarum, IA, AS, nempè ipſi, IA. Dico ſectorem, IAR, ad trilineum, IAS, eſſe vt quadratum, RA, ad rectangulum, RAS, vna cum ⅓. quadrati, RS, (vtamur conſtructis in eadē figura) Sector igitur, AIRςKA, eſt æqualis triangulo,

gulo, LZ 13, vt in antecedenti ostensum est, eodem modo probabimus triangulum, L+ 13, esse æqualem sectori, AR&KA, ergo reliquus triangulus, LZ+, erit æqualis reliquo sectori, IAR; similiter iuxta antecedentem ostendemus spatium, AISMGA, esse æqualem trilineo, LZΩ, & spatium, ASMGA, esse æqualem trilineo, LVΩ, ergo reliquum spatium, IAS, erit æquale trilineo, LZV, ergo sector, IAR, ad
14. huius. trilineum, LZV, erit vt triangulus, LZ+, ad trilineũ, LZV, .i. vt quadratum, L4, ad rectangulum sub, 4L3, cũ $\frac{1}{3}$. quadrati, 34, .i. vt quadratum, IA, vel, RA, ad rectangulum sub, RA, AS, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, RS, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

TRilineum, IRS, ad trilineum, ISX, erit vt, SA, cum $\frac{2}{3}$. SR, ad, SA, cum $\frac{1}{3}$. SR.

Huius demonstratio non erit alia à demonstratione 13. huius, propterea ibi recolatur.

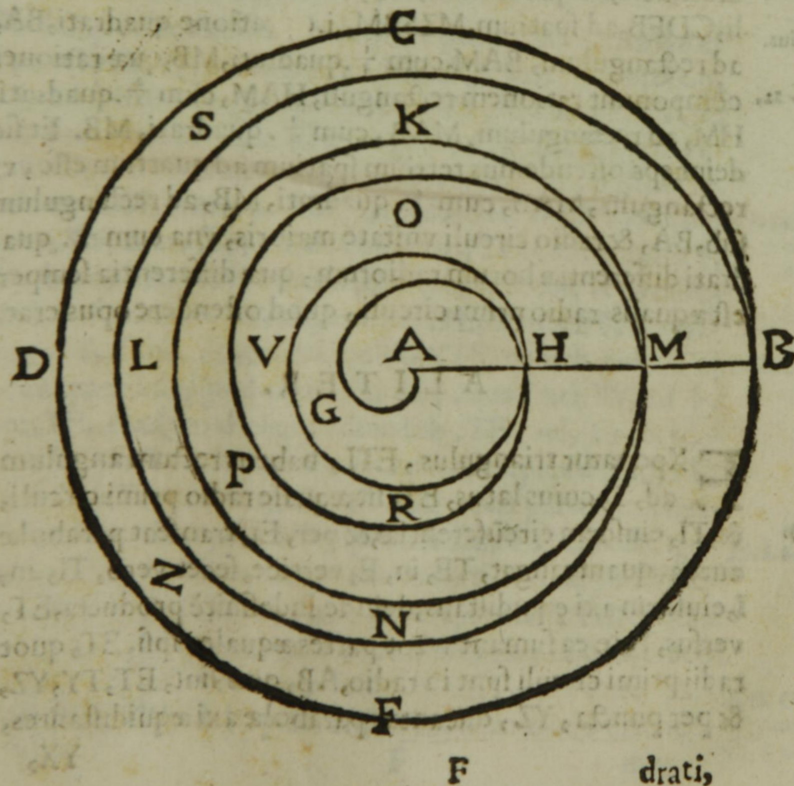
THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

PRimi circuli spatium helicum ad spatium helicum secundi circuli erit, vt tertia pars quadrati radij primi circuli ad rectangulum sub radio primi, & secundi circuli, vna cum tertia parte quadrati excessus radij secundi circuli super radium primi. Spatium verò secũdi circuli ad spatium tertij erit, vt rectangulum sub radio eiusdem, & sub radio circuli vnitate minoris, idest primi, vna cum tertia parte quadrati differen-

ren-

rentiæ horum radiorum, ad rectangulum ſub radio eiuſdem, & ſub radio circuli vnitate maioris, ideſt tertij, vna cum tertia parte quadrati differentiæ iſtorũ radiorũ, & ſic deinceps in reliquis.

Exponantur ſuper eodem centro, A, circuli, primus, HRVO, ſecundus, KLNM, tertius autem, CDFB, cum ſpatijs ſub ſpiralibus eiuſdem numeri cũ circulis, primo, AGHA, ſecundo, HPKMH, tertio autem, MZSBM. Dico ſpatium primum ad ſecundum eſſe vt $\frac{1}{3}$. quadrati, HA, ad rectangulum ſub, HA, AM, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM, ſecundum verò ad tertium eſſe vt rectangulum ſub, HA, AM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM, ad rectangulũ ſub, MA, AB, vna cũ $\frac{1}{3}$. qua-



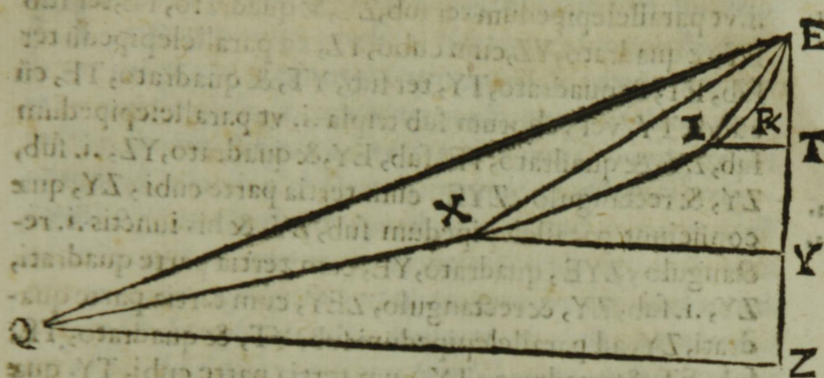
F drati,

drati, MB. Nam ſpatium, AGH, ad ſpatium, HPKM, habet rationem compoſitā ex ratione ſpatij, AGH, ad circulum,
9. huius. OVRH, .i. ex ratione $\frac{1}{2}$. quadrati, HA, ad quadratum, HA, & ex ratione circuli, OVRH, ad circulum, MKLN, .i. ex
Coroll. 2. 11. l. 3. ratione quadrati, HA, ad quadratum, AM, & ex ratione
15. huius. circuli, CDFB, ad ſpatium, HPMH, .i. ex ratione quadrati, MA, ad rectangulum, MAH, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, MH,
Defin. 12. l. 1. quę rationes componunt rationem $\frac{1}{2}$. quadrati, AH, ad rectang. MAH, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, HM. Item ſpatium, HPMH, ad ſpatium, MZSBM, habet rationem compoſitam ex ratione ſpatij, HPMH, ad circulum, KLNM, .i. ex ratione re-
15. huius. ctanguli, HAM, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, HM, ad quadratum, AM, & ex ratione circuli, KLNM, ad circulum, CDFB, .i. qua-
Coroll. 2. 11. l. 3. drati, MA, ad quadratum, AB, & tandem ex ratione circu-
15. huius. li, CDFB, ad ſpatium, MZSBM, .i. ex ratione quadrati, BA, ad rectangulum, BAM, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, MB, quæ rationes
Defin. 12. l. 1. componunt rationem rectanguli, HAM, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, HM, ad rectangulum, MAB, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, MB. Et ſic deinceps oſtendemus tertium ſpatium ad quartum eſſe, vt rectangulū, MAB, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, MB, ad rectangulum ſub, BA, & radio circuli vnitate maioris, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati differentiæ horum radiorum, quæ differentia ſemper eſt æqualis radio primi circuli, quod oſtendere opus erat.

ALITER.

EXponatur triangulus, ETI, habens rectum angulum ad, T, cuius latus, ET, ſit æquale radio primi circuli,
20. l. 4. &, TI, eiuſdem circūferentiæ, & per, EI, tranſeat parabolæ curua, quam tangat, TE, in, E, vertice, ſecet verò, TI, in, I, eiuſdem axi ęquidiſtans, deinde indefinitè producta, ET, verſus, T, in ea ſumantur tot partes æquales ipſi, ET, quot radij primi circuli ſunt in radio, AB, quæ ſint, ET, TY, YZ, & per puncta, YZ, ducantur parabolæ axi æquidiſtantes,

YX,



YX, ZQ, curuæ eiusdem indefinitè productæ occurrentes in punctis, X, Q, & iungantur, EX, EQ. Erit igitur sectio, EIX, ad sectionem, ERI, vt cubus, YE, ad cubum, ET, sic enim sunt eorum tripla .s. triangula, EIT, EXY, quod elicitur ex prima Lib.4. &, diuidendo, trilineum, EXI, ad sectionem, ERI, erit vt parallelepipedum ter sub, ET, ac qua- 38.l.2.
drato, TY, & ter sub, YT, & quadrato, TE, cum cubo, TY, ad cubum, TE, vel vt horum subtripla, scilicet, vt parallelepidum semel sub, YT, & quadrato, TE, & sub, ET, & quadrato, TY, .s. sub, YT, & rectangulo, YTE, cum $\frac{1}{3}$. cubi, TY, 36.l.2.
.i. cum parallelepipedo sub, TY, & $\frac{1}{3}$. quadrati, TY, ad $\frac{1}{3}$. cubi, TE, .i. ad parallelepipedum sub, TE, vel, TY, & tertia parte quadrati, TE, nempè vt parallelepipedũ sub, TY, & quadr. ET, & rectangulo, YTE, & tertia parte quadrati, YT, quod conficit parallelepipedum sub, YT, & rectangu- 35.l.2.
lo sub, YET, & sub tertia parte quadrati, YT, ad parallelepipedum sub, YT, & sub tertia parte quadrati, TE, & quia horum parallelepipedorum altitudines sunt eædem; ideò erunt, vt bases .s. vt rectangulum sub, YET, cum tertia par- B.G. Cor.
te quadrati, TY, ad $\frac{1}{3}$. quadrati, ET. Eodem modo ostende- 4. gener.
34.l.2.

mus trilineum,EQX,ad trilineũ,EXI,esse vt excessus cubi,
ZE, super cubũ,YE,ad excessum cubi,YE, super cubũ,TE,
38. l. 2. .i.vt parallelepipedum ter sub,ZY,& quadrato,YE,ter sub
EY,& quadrato,YZ,cum cubo,YZ, ad parallelepipedũ ter
sub,ET, & quadrato,TY, ter sub, YT, & quadrato, TE, cũ
cubo, TY, vel vt horum sub tripla .i. vt parallelepipedum
sub, ZY, & quadrato,YE, sub, EY,& quadrato,YZ, .i. sub,
36. l. 2. ZY, & rectangulo , ZYE , cum tertia parte cubi , ZY, quæ
35. l. 2. conficiunt parallelepipedum sub, ZY, & his iunctis .i. re-
ctangulo , ZYE , quadrato, YE, cum tertia parte quadrati,
ZY, .i. sub, ZY, & rectangulo, ZEY, cum tertia parte qua-
drati, ZY, ad parallelepipedum sub, YT, & quadrato, TE,
sub, ET, & quadrato , TY, cum tertia parte cubi, TY, quæ
esse æqualia ostendemus parallelepipedo sub , YT , & re-
ctangulo , YET, cum tertia parte quadrati , YT, igitur tri-
lineum, EQX, ad trilineum,EXI, erit vt parallelepipedum
sub , ZY , & rectangulo , ZEY , cum tertia parte quadrati,
ZY, ad parallelepipedum sub, YT, .i. sub,ZY,& sub rectan-
gulo, YET, cum tertia parte quadrati,TY, & quia hæc pa-
B.G. Cor. rallelepipeda sunt in eadem altitudine, ideò sunt vt bases,
4. gener. igitur trilineum, EQX, ad trilineum, EXI , erit vt rectãgu-
34. l. 2. lum, ZEY, cum tertia parte quadrati, YZ, ad rectangulum,
Elicitur ex YET, cum tertia parte quadrati, YT, est autem sectio, ERI,
9. huius. æqualis spatio, AGH, & trilineum, EXI, spatio, HPMH,&
Elicitur ex 35. huius. trilineum, EQX, spatio, MZSBM, ergo spatium, AGH, ad
spatium, HPMH, erit vt tertia pars quadrati, TE, ad rectan-
gulum, TEY, cum tertia parte quadrati, TY, .i. vt tertia
pars quadrati, HA, ad rectangulum, HAM,cũ tertia parte
quadrati, HM. Similiter concludemus spatium, HPMH, ad
spatium, MZSBM, esse vt rectangulum , HAM , cum tertia
parte quadrati, HM, ad rectangulum, MAB , cum tertia
parte quadrati, MB, quod ostendere opus erat.

CO-

COROLLARIVM.

HInc patet si ducatur quædam tangens parabolam, quæ in partes quotcunq; æquales diuidatur, & per puncta diuisionum ducantur rectæ lineæ diametro parallelæ, quousq; incidant in curuam parabolæ, his incidentiæ punctis cum contactus puncto iunctis, spatium sub prima iungente, & subtensa curua parabolæ ad trilineũ sub prima, & secunda iungente, & ab illis apprahensa curua, esse vt tertia pars quadrati primæ partis tangentis est ad rectangulũ sub prima parte, & composito ex prima, & secunda cum tertia parte quadrati secũdæ. Similiter hoc trilineum ad trilineum sub secunda, & tertia iungente, & ab illis apprahensa curua parabola, esse vt rectangulum sub prima, & sub composita ex prima, & secunda parte tangẽtis (enumeratione semper à puncto contactus incœpta) vna cum tertia parte quadrati secundæ ad rectangulum sub composita ex prima, & secunda, & sub composita ex prima, secunda, & tertia parte, vna cum tertia parte quadrati tertiæ partis, & sic trilinea deinceps sequentia eße, vt hæc rectangula deinceps sequentia cum tertia parte dictorum quadratorum, eodem enim modo supra adhibito hoc ostendetur. Quotiescunq; autem tangens sit æqualis radio circuli spiralium alicuius numeri, veluti fuit, EZ, æqualis ipsi, AB, & diuidatur in tot partes æquales, in quot radius talis circuli diuiditur à circumferẽtijs inferiorum circulorum, tunc nedum in parabola dicta spatia se habent, vt dictum est, sed etiam sunt æqualia spatijs dictorum circulorum, primum nempè primo, secundum secundo, & sic deinceps à puncto contactus parabolæ dictorum spatiorum ennumeratione facta, quod est admirabile, hæc autem ex supradictis manifesta sunt.



THEO-

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

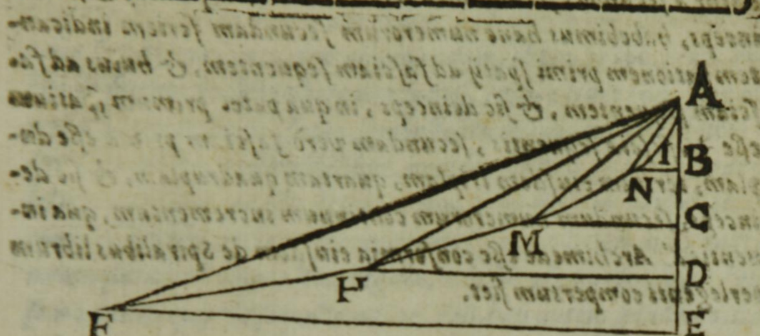
SI parabolam tetigerit recta linea, quæ diuidatur in quotcunq; partes ęquales, per puncta autem diuisionum, & extremum ducantur rectæ lineæ diametro parabolæ æquidistãtes, quousq; in eiusdem curuam incidant, iungantur autem puncta incidentiæ cum puncto contactus. Spatiũ sub prima iungente, & subtensa ab eadem curua erit septima pars spatij sub prima, & secunda iungente, & ab ijs appræhensa curua compręhensi. Hoc verò ad spatium sub secunda, & tertia iungente, & appræhensa curua, erit vt 7. ad 19. Hoc autem ad spatium sub tertia, & quarta iungente, & ab ijs inclusa curua, vt 19. ad 37. & sic deinceps, put indicat apposita numerorũ series.

Sit tangens parabolam, AHF, ipsa, AE, diuisa in quotcumq; partes æquales, AB, BC, CD, DE, ductis autem à punctis, B, C, D, E, diametro parallelis, quousq; incidant curuæ, AHF, ipsæ, BN, CM, DH, EF, iungantur puncta incidentiæ, quæ sunt, F, H, M, N, cum puncto, A, &, AN, dicatur prima iungens, AM, secunda, AH, tertia, & sic deinceps. Dico spatium sub, AN, & ab ea subtensa curua, esse ad spatiũ sub, NA, AM, & curua, MN, .i. ad trilineum, AMN, vt 1. ad 7. hoc verò ad trilineum, AHM, vt 7. ad 19. & sic deinceps, prout indicat apposita numerorum series se habere trilinea deinceps subsequẽtia. Est enim spatium, AIN, ad trilineum, AMN, vt $\frac{1}{3}$. quadrati, AB, ad rectangulum, CAB, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, CB, si ergo, AB, statuatur 3. erit, AC, 6. rectangulum, CAB, 18. tertia pars

Ex Corol. antec.

 qua-

Series spatiorum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Series numerorũ	1.	7.	19.	37.	61.	91.	127.



quadrati, BC, erit 3. quæ iuncta ipsi 18. efficit 21. erit ergo qualium partium quadratum, AB, est 9. rectangulum, CAB, cũ tertia parte quadrati, BC, 21. & tertia pars quadrati, AB, est 3. est igitur spatium, AIN, ad trilineũ, AMN, vt 3. ad 21. idest vt 1. ad 7. Eodem modo reperiemus trilineum, ANM, ad, AMH, esse vt 7. ad 19. & hoc ad trilineum, AHF, vt 19. ad 37. & sic deinceps, prout indicat series numerorum supra posita; quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

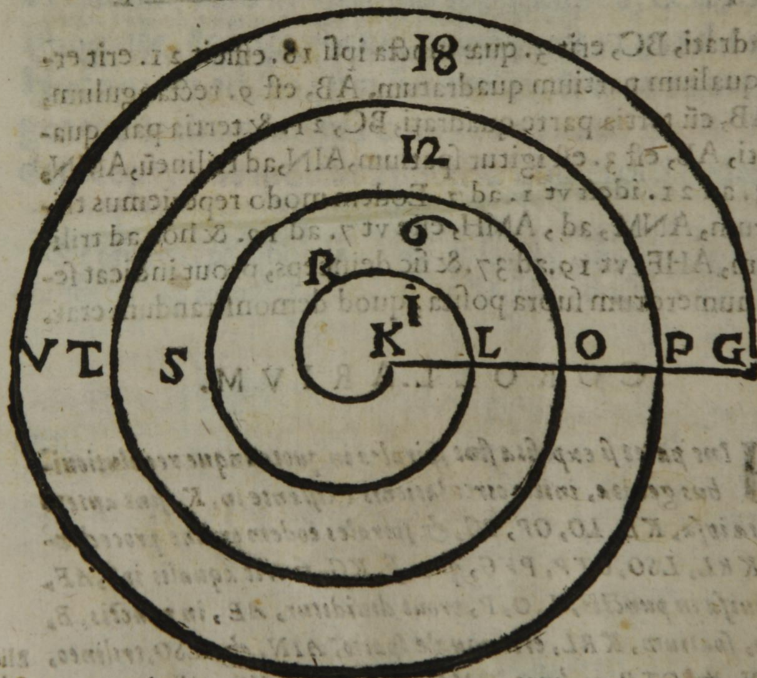
Hinc patet si exposita sint spirales in quotcunque reuolutionibus genita, initio circulationis existente in, K, sint autem voluta ipsa, KL, LO, OP, PG, & spirales eodem ordine procedentes, KRL, LSO, OTP, PVG, quod si, KG, fuerit æqualis ipsi, AE, & diuisa in punctis, L, O, P, prout diuiditur, AE, in punctis, B, C, D, spatium, KRL, erit æquale spatio, AIN, &, LSO, trilineo, AMN, &, OTP, trilineo, AMH, & tandem, PVG, trilineo, AHF, & sic deinceps, vnde etiam hæc spatia se habebunt, prout indicat supra posita series numerorum. Si autem primum spatium subtra-

Elicitur ex 9. huius.
Elicitur ex 15. huius.

hatur

Secunda series num.	1.	6.	12.	18.	24.	30.	36.

batur à secundo, secundum à tertio, tertium à quarto, & sic deinceps, habebimus hanc numerorum secundam seriem indicantem rationem primi spatij ad fasciam sequentem, & huius ad fasciam sequentem, & sic deinceps, in qua patet primum spatium esse $\frac{1}{6}$. fasciæ sequentis, secundam verò fasciam primæ esse duplam, tertiam eiusdem triplam, quartam quadruplam, & sic deinceps, secundum numerorum continuum incrementum, quæ inuentis ab Archimede esse conformia eiusdem de Spiralibus librum perlegenti compertum fiet.



SCHO-

SCHOLIVM.

HAec libuit apponere, tum quia adhibita methodus ab Archimedea diuersa est, tum etiam, vt admirabilem connexionem, &, vt ita dicam parabolici, ac helici spatij, affinitatem, talia speculanti, puto, non aspernendam, ob oculos ponerem; quibus & sequentia subnectere non inutile mihi visum fuit. Hoc autem tantum circa præfatas demonstrationes dicam, quod licet in Prop. 12. & 14. indiuisibilibus, nempè omnibus quadratis parallelogrammorum, quæ ibi describuntur, vsus fuerim, tamen etiam modo cõsueto potuissent demonstrari, si ex. g. vice omniũ quadratorum parallelogrãmi, ED, regula, EB, ibi assumpta, vsus fuissem parallelepipedo sub altitudine, DB, basi autem quadrato, EB, vel pro omnibus quadratis trianguli, CBE, regula eadem, EB, vsus essem pyramide sub altitudine, CE, basi eodem quadrato, EB, etenim similiter demonstratio absolui potuisset, hac omnium quadratorum parallelogrammorum ibidem cõsideratorum dimissa congerie, & substitutis parallelepipedis, vel pyramidibus, aut earum frustis, vbi opus erat. Hæc inuenire volui, vt prædicta omnia stylo veteri demonstrabilia esse, etiam aliter ab Archimede patefiat.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

SI exponatur series spiralium, & circulorum deinceps à primis, in spatijs verò sub spiralibus, & volutis, cylindrici, & conici in eadem altitudine stantes intelligantur constituti tamquam in basibus, similiter & in circulis constituti esse cylindri, & coni intelligantur: Cylindri inter se, & cylindrici pariter inter se, siue ad cylindros comparati, siue coni inter se, & conici inter se,

ſiue ad conos comparati eandem rationem, quam baſes habebunt.

Patet hæc propoſitio, nam cylindrici, & conici in eadem altitudine conſtituti ſunt inter ſe, vt baſes; ſunt autem prædicta ſolida per conſtructionem in eadem altitudine poſita, ergo erunt inter ſe, vt ipſæ baſes; Vocentur autem Cylindri, & Cylindrici, necnon Conici eiuſdem numeri cum ſpatijs, quibus inſiſtunt .i. primus cylindrus, vel conus, qui eſt in primo circulo, ſecundus cylindrus, vel conus, qui eſt in ſecundo circulo tamquam in baſi; primus cylindricus, vel conicus, qui eſt in ſpatio helico primi circuli tamquam in baſi, ſecundus cylindricus, vel conicus, qui eſt in ſpatio ſecundi circuli, & ſic deinceps.

B. G. H. Coroll. 4. gener. 34. l. 2.

COROLLARIVM.

ET quia in ſuprapoſitis Propoſitionibus baſium prædictorum ſolidorum ratio fuit adinuenta, ideò eandem pro dictis ſolidis rationem inde colligemus.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

PRimus cylindrus nonuplus eſt primi conici.

Hęc Propoſitio pariter manifeſta eſt, nam primus cylindrus ad primum cylindricũ eſt, vt primus circulus ad ſuum ſpatium .i. in ratione tripla, primus verò cylindricus ad primum conicum eſt in ratione tripla, quia ſunt in eadem baſi, quod eſt ſpatium primi circuli, & in eadem altitudine, & ideò primus cylindrus ad primum conicum eſt in ratione nonupla, quæ ex duabus triplis conflatur.

7. Coro. 4. gener. 34. l. 2.

THEO-

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SEcundus cylindrus ad ſecundum conicum eſt, vt triplum quadrati radij ſecundi circuli, ad rectangulum ſub radio eiuſdem ſecundi, & radio primi circuli, vna cum tertia parte quadrati differentiæ eorundem radiorum.

Secundus enim cylindrus ad ſecũdum cylindricum eſt, vt ſecundus circulus ad ſuum ſpatium .i. vt quadratum radij ſecundi circuli ad rectangulum ſub radio eiuſdem, & ſub radio primi vna cum tertia parte quadrati differentiæ eorundem radiorum, ſecũdus verò cylindricus triplus eſt conici ſecundi, quoniam in eadem baſi, & altitudine cum eo conſtituitur, ergo eſt ad illum, vt dictum rectangulum ſub radijs primi, & ſecundi circuli, vna cum tertia parte quadrati differentiæ eorundem ad horum coniunctorum tertiam partẽ, & ex ęquali ſecundus cylindrus ad ſecũdum conicum erit, vt quadratum radij primi circuli ad tertiam partem rectanguli ſub radijs primi, & ſecundi circuli, cum nona parte quadrati differentiæ eorundem radiorũ, ideſt, vt triplum quadrati radij ſecundi circuli ad rectangulum ſub radijs primi, & ſecundi circuli, vna cum tertia parte quadrati differentiæ eorundem radiorum.

15. huius.

1. Coro. 4. gener. 34. l. 2.

COROLLARIVM I.

HInc patet reliquorum cylindrorum ad conicos eiuſdem numeri rationem eandem eſse illi, quam habet triplum quadrati radij circuli, qui eſt baſis talis cylindri, ad rectangulum ſub eodem radio, & radio circuli vnitate minoris, vna cum tertia parte quadrati differẽtia vtriuſq; radij, quod eod. modo oſtẽdetur.

COROLLARIVM II.

Patet insuper, quod eadem methodo facilè inueniemus rationem cuiuscunq; cylindri, vel frusti cylindri, & conici, vel frusti conici, in basibus aliquibus ex iam consideratis spatijs constituti, quæ ob facilitatem dimitto; vt ad aliqua ex antecedentium librorum, & huius propositionibus constructa Problemata, siue Theoremata, speculationem nostram conuertentes, vtilitatis eximiæ, quam superius tradita doctrina, etiam ad praxim deducta, afferre potest, illustriora quædam præbeamus argumenta.

PROBLEMA I. PROPOS. XXIV.

Cylindrum, vel conum constituere æqualem datæ sphæræ, vel sphæroidi, vel eiusdem portioni.

Sit sphæra, vel sphæroides, ACEG, circa diametrũ, AE, oportet illi cylindrum, vel conum æqualem constituere. Exponatur cylindrus, RQ, & conus, SPQ, quorum altitudo, vt, SV, sit æqualis ipsi, AE, & basis æqualis circulo transeunti per centrum, N, qui sit, CG, rectè axem secans, seu pro sphæroide, si, AE, non sit axis, RQ, altitudinem habeat æqualem altitudini sphæroidis iuxta planum, CG, assumptæ, & sit in basi æquali ellipsi, CG. Erit ergo cylindrus, RQ, sexquialter sphæræ, vel sphæroidis, ACEG, & conus subduplus eiusdem, si igitur in eadem basi fiat cylindrus, cuius altitudo sit $\frac{2}{3}$. ipsius, SV, hic erit æqualis datæ sphæræ, vel sphæroidi, ACEG, si verò fiat conus altitudinis duplæ ipsius, VS, in eadem pariter basi, ille eidem sphæræ, vel sphæroidi æqualis erit, coni enim, & cylindri in eadem basi constituti sunt, vt altitudines.

Coroll. 1. 34. l. 3.

C. G. H. Coroll. 4. gener. 34. l. 2.

Sit rursus constituendus cylindrus, vel conus, æqualis eiusdem sphæræ, vel sphæroidis, portioni, BAH, vel, DAF, sup-

ſupponatur nũc ergo cylindrus, RQ, cuius baſis ſit æqualis circulo, vel ellipſi, DF, altitudo verò, SV, æqualis ipſi, AO, ſeu altitudini portionis, ADF, iuxta planum, DF, aſſumptæ, erit igitur hic cylindrus ad portionem, DAF, vt, OE, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. OE, & $\frac{1}{6}$.OA, hãc autem rationem habeat, SV, ad aliam altitudinem, erit ergo cylindrus, RQ, ad cylindrũ altitudinis inuentæ, & in eadem baſi, PQ, cõſtitutũ, vt, OE, ad cõpoſitam ex $\frac{1}{2}$. OE, & $\frac{1}{6}$. OA, .i. vt cylindrus, RQ, ad portionem, DAF, igitur inuentus cylindrus erit æqualis portioni, DAF. Triplicetur nunc altitudo inuenti cylindri, & fiat conus talis altitudinis, in eadem cum eo baſi, hic igitur conus erit æqualis inuento cylindro, & ſubinde portioni, DAF. Eodem modo inueniemus cylindrum, vel conũ æqualem portioni, BAH.

Coroll. ꝶ 34. l. 3.

PROBLEMA II. PROPOS. XXV.

SOlido quocunq; in eadem baſi, & altitudine cum cylindro conſtituto, ad quod cylindrus notam rationem habeat, cylindrum, & conum, inuenire, æqualem dato ſolido.

Sit

Sit ſolidum quodcunque, DAF, ad quod cylindrus, BF, in eadem baſi, DF, & eadem altitudine cum eodem conſtitutus, habeat notam rationem. Oportet cylindrum inuenire, & conum, æqualem dato ſolido. Fiat ergo, vt cylindrus, BF, ad ſolidum, DAF, ſic altitudo, quæ ſit, AE, ad altitudinem, EI, & per, I, ducatur planum producens in cylindro, BF, circulum, GK, conſtituenſque cylindrum, GF, igitur, vt, AE, ad, EI, ſic erit cylindrus, BF, ad cylindrum, GF, & ſic cylindrus, BF, ad ſolidum, DAF, vnde cylindrus, GF, erit æqualis ſolido, DAF. Rurſus triplicetur altitudo, EI, & fiat conus eiuſdem altitudinis in baſi, DF, hic igitur conus erit æqualis cylindro, GF, & ſubinde ſolido, DAF, quod inuenire opus erat.



Coroll. 1. 34. l. 2.

COROLLARIVM I.

Hinc patet nos etiam poſſe inuenire cylindrum, & conum, nedum æqualem dicto ſolido, ſed qui ad ipſum habeat datam rationem, ſi enim altitudo inuenti cylindri, vel coni æqualis dicto ſolido, fiat ad aliam altitudinem in data ratione, tamen conuerſa, & harum altitudinum vltimò inuentarum in eiſdem baſibus cum prædictis fiant cylindrus, & conus, habebunt iſti ad dictum ſolidum datam rationem, vt facilè apparet.

A COROLL. II. SECTIO I.

Hinc etiam patet cylindrum in baſi apicis ſphæralis, vel ſphæroidalis, conſtitutum cuius altitudo ad

alti-

altitudinem eiusdem apicis sit, vt 2. ad 21. esse æqualem eidem apici. Corol. 11. 34 l. 3.

SECTIO II. B

VLterius habetur quoq; cylindrũ, ad cuius altitudinem altitudo tympani sphæralis, vel sphæroidalis sit, vt semidiameter basis tympani ad reliquũ, dempta ab eadem recta linea, ad quam dimidia secundæ diametri circuli, vel ellipsis sit, vt circulus ad quadratum, cui circumscribitur simul cum excessu, quo dicta linea excedit $\frac{2}{3}$. tertiæ proportionalis semidiametri basis tympani, & dimidiæ secundæ diametri dicti circuli, vel ellipsis, esse æqualem dato tympano sphærali, vel sphæroidali, si sit in basi eiusdem tympani. Corol. 12. 34. l. 3.

SECTIO III. C

ET cylindrum, ad cuius altitudinem, altitudo anuli stricti circularis, vel elliptici, sit vt quadratum ad circulum, cui circumscribitur, in basi existentem circulo, cuius radius sit æqualis secundæ diametro circuli, vel ellipsis quæ reuoluitur, esse æqualem dicto anulo stricto. Consimiliter autem inueniemus cylindrum æqualem anulo lato circulari, vel elliptico; & eius portionibus, abscissis planis ad axem reuolutionis rectis: siue cuicũq; ex figuris Corollariorum 26. 27. 28. 29. Lib 3. Similiter inueniemus cylindrum æqualem Malo Roseo, vel Cotoneo, vel Citrio, vel Oliuæ; Conoidi Parabolico, vel hyperbolico, eiusdem frusto, Apici parabolico, Semianulo Corol. 13. 34. l. 3.

stri-

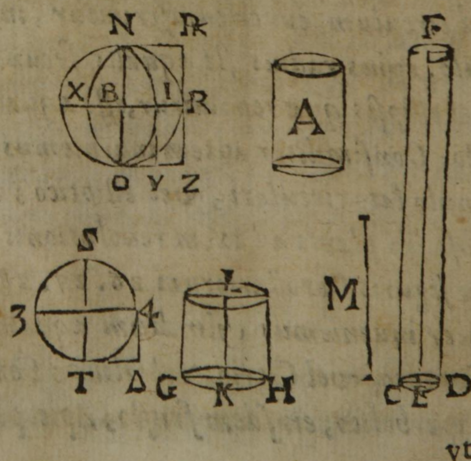
ſtricto, vel lato, & ſemibaſibus ſtrictis, medijs, vel latis, Aceruis minori, vel maiori parabolicis. Tympano hyperbolico, & portionibus eorundem ſupra cōſideratis, & cylindricis, vel conicis, qui in baſibus ſpatijs ſub ſpiralibus, & volutis conſtituuntur. Triplicatis autem altitudinibus inuentorum cylindrorum, in quibus, & eiſdem baſibus cum cylindris, conſtituantur coni, iſti prædictis ſolidis æquales erunt, & iuxta Coroll. 1. antecedentis inueniemus pariter cylindrum, vel conum, qui ad quoduis ex prædictis ſolidis datam rationem habeat.

PROBLEMA III. PROPOS. XXVI.

SPhæram inuenire æqualem dato cylindro. Similiter & ſphæroidem circa datum axim æqualem dato cylindro.

Sit cylindrus datus, A, oportet illi æqualem ſphæram inuenire. Fiat cylindrus rectus, CFD, ſexquialter cylindri, A, deinde inter altitudinem, FE, & baſis diametrum, CD, duæ mediæ cōtinuè proportionales, iuxta methodum ab alijs traditam, inueniantur, quæ ſint, M, GH, deſcripto autem circulo circa alteram dictarum mediarum tanquam diametrū,

Vide Dauidem Riualtum in Commēt. in Arch. ad prop. 1. ſecundi de Sphæra, & Cylindro.



vt circa, GH, fiat is basis cuiusdam cylindri altitudinis æqualis ipsi, GH, & sit tandem sphæra, B, circa diametrum æqualem ipsi, GH, constituta. Dico sphæram, B, esse æqualem cylindro, A. Est enim, CD, ad, GH, vt, M, ad, FE, permutando, CD, ad, M, est vt, GH, vel, LK. altitudo, ad, FE, vt verò, CD, ad, M, ita quadratũ, CD, ad quadratum, GH, vel circulus, CD, ad circulum, GH, ergo vt, LK, ad, FE, sic circulus, CD, ad circulũ, GH, ergo cylindri, CFD, GLH, sunt æquales, est autem cylindrus, CFD, sesquialter cylindri, A, ergo cylindrus, GLH, erit sesquialter cylindri, A, est autem cylindrus, GLH, etiam sesquialter sphæræ circa diametrum, GH, vel illi æqualem, NO, descriptæ .i. sphæræ, B, ergo sphæra, B, erit æqualis dato cylindro, A. E. G. Coroll 14. gener. 34. l. 2. Coroll. 1. 34 l. 3.

Sit nunc datus axis, NO, circa quem sit constituenda sphærois æqualis dato cylindro, A, si igitur sphæra circa diametrum, NO, esset æqualis dato cylindro, non posset circa hanc diametrum fieri alia sphærois æqualis dato cylindro, sed talis sphærois esset eadem sphæra. Non sit autem æqualis sphæra, B, cylindro, A, tunc fiat sphæra æqualis cylindro, A, quæ sit circa diametrum, ST, deinde fiat, vt, NO, ad, ST, sic quadratum, ST, ad, XI, bifariam diuisam in, B, centro, & fiat sphærois circa diametros, NO, XI, igitur primi axes, NO, ST, reciprocè respondent secundorum axium, ST, vel, 34, XI, quadratis ergo sphæra, ST, erit æqualis sphæroidi, NXOI, ergo sphærois, NXOI, circa datum axim, erit æqualis dato cylindro, A, quod erat inueniendum. Corol. 10. Prop. 34. l. 3. sect. 4.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur cuicunq; ex solidis in antecedenti, & Corollarijs eiusdem nominatis sphæram æqualem nos scire constituere, necnon sphæroidem æqualem circa datum axem, sphæ-

ramque, ac sphæroidem, quæ ad quodcunq; ex ipsis datam ratio-
25. huius *nem habeat. Proposito enim ex illis quocunque solido, inuenietur primò cylindrus, qui ad ipsum datam rationem habeat, deinde fiet sphæra, vel sphæroïs circa datum axim, æqualis inuento cylindro, quæ subinde ad datum solidum datam rationem habebit: Et vniuersaliter patet si discamus, dato cylindro æquale solidum ex iam consideratorum genere construere, consequenter eiusmodi solidum nos scire construere, quod ad aliquod ex nominatis in antecedēti Propositione, & eiusdem Corollarijs, datam ratione͞m habeat.*

PROBLEMA IV. PROPOS. XXVII.

DAto cylindro apicem sphæralem æqualem constituere, vel sphæroidalem, & hunc circa datum axem.

Vtamur antecedentis figura, in qua supponamus dato cylindro, A, constituendum esse æqualem apicem sphæralem, vel sphæroidalem, & hunc circa datum axem. Exponatur autem cylindrus, FCD, qui ad cylindrum, A, sit, vt 21. ad 1. deinde inter, CD, FE, sumantur duæ mediæ continuè proportionales, GH, M, & fiat cylindrus altitudinis, GH, qui sit, GLH, ac supponatur ipsi, LK, assumptam esse æqualem ipsam, NO, igitur ductis tangentibus circulum circa, NO, in punctis, O, R, N, quæ sint, OZ, Z℞, ℞N, concurrentibus in, Z, ℞, patet, OZ, esse æqualem ipsi, GK, &, ℞Z, æquatur ipsi, LK, ergo cylindrus, qui nasceretur ex reuolutione parallelogrammi, NZ, circa manentem axem, ℞Z, esset æqualis cylindro, GLH, ostendemus autem, vt in antecedenti cylindrū, GLH, esse æqualem cylindro, CFD, vnde patebit cylindrum genitum ex, NZ, ad cylindrum, A, esse vt 21. ad 1. sed idem ad apicem, qui nasceretur ex
Corol. 12. reuolutione trilinei, OZR, circa, RZ, est vt 21. ad 1. nam
34. l. 3. cylindrus ex, NZ, duplus est cylindri ex, BZ, ergo apex
geni-

genitus ex trilineo, OZR, æqualis erit cylindro, A.

Sit nunc inueniẽdus apex ſphęroidalis circa datũ axem, RZ, vel illi æqualem, qui ſit æqualis cylindro, A, ſi ergo talis eſſet apex ſphæralis, qui fit ex, OZR, non eſſet alius apex ſphæroidalis circa, RZ, vel illi æqualẽ, qui eſſet æqualis cylindro, A; ſi verò nõ ſit, inueniatur apex ſphęralis, vt, TΔ4, æqualis cylindro, A, deinde vt, RZ, ad huius facti apicis axim, 4Δ, ita fiat dimidij diametri baſis eiuſdẽ, ideſt, TΔ, quadratum ad quadratum, OY, ſiue, BI, & per, I, tranſeat ellipſis, NIO, & ducatur eandem tangens in, I, quæ ſit, IY, igitur quia, RZ, ad, 4Δ, axim facti apicis ſphæralis eſt, vt quadratum, TΔ, dimidij diametri baſis, ad quadratum, OY, ideſt, vt circulus, qui eſt baſis facti apicis ſphæralis, TΔ4, ad circulum, qui eſt baſis alterius, ideò iſti apices erunt æquales: nam ſe habebunt, vt cylindri in eiſdem cum illis baſibus, & circa eoſdem axes exiſtentes, qui cylindrici erũt æquales, nam axes baſibus reciprocè reſpondent; ergo apex ſphæroidalis, qui fiet ex, OYI, & eſt circa axim, IY, æqualem ipſi, RZ, datæ, erit æqualis cylindro, A, quæ inuenienda erant.

COROLLARIVM.

Patet autem, quod iuxta Corollarium antecedentis poterimus etiam inuenire apices ſphærales, vel ſphæroidales circa datum axim, ad datum quodcunq; ſolidum ex enumeratis in dicto Corollario datam rationem habentes.

PROBLEMA V. PROPOS. XXVIII.

DAto cylindro tympanum ſphęrale eidem æquale conſtituere, cuius axis ſemidiametro baſis ſit æqualis.

Sit datus cylindrus, ABC, cuius axis, AD, basis, BC, oportet illi æquale tympanũ sphærale constituere, cuius axis semidiametro basis sit æqualis. Vt hoc fiat exponatur recta linea terminata quæcunque, EI, quæ sit bifariam secta in, G, & vt quad. circulo cuicunq; circũscriptum ad eũdem circulũ, ita fiat, GE, ad, EF, sumatur deinde, FH, quæ sit excessus, quo, FE, superat $\frac{2}{3}$. tertiæ proportionalis duarum, IE, EG, deinde vt, HI, ad, IE, ita fiat, AD, ad, LO, altitudinem alterius cylindri in basi, NP, æquali ipsi, BC, existentis, & tandem inter, LO, &, ON, basis semidiametrũ, sumantur duæ mediæ continuò proportionales, QO, OR, & in altitudine æquali, OR, nempè, T8, basi, ℞8, æquali eidem, OR, fiat parallelogrammum rectangulũ, 58, in cuius plano describatur semicirculus, SY℞, & ipsum cum parallelogrammo reuoluatur circa manentem axim, T8, donec redeat vnde discessit, patet autem, quod ex parallelogrammo fiet cylindrus, vt, SΦ, & ex figura, SY℞8T, tympanum sphærale, 5YΦ. Dico igitur hoc tympanum esse æquale dato cylyndro, ABC, &, T8, æqualem ipsi, 8℞, semidiametro basis, ℞Φ. Sint parallelogrammum, SΦ, & figura, SYΦ, per axem transeuntia, &, X&, per centra, X, &, circulorum ducta, secans, T8, in, Z, manifestum est igitur, quod, XZ,

bifariam secabitur à circumferentia, SY℞, vt in, Y, cum, 8℞, sit æqualis, ℞S, & ipsi, XZ, S℞, autem sit dupla, XY, vnde si secetur, ℞8, bifariam in, 4, erit, ℞4, æqualis ipsi, XY, sit autem ab ea dempta, ℞3, ad quam, 4℞, sit vt quadratum ad inscriptum circulum, & in, ℞8, sumpta, 37, æqualis excessui, quo, 3℞, superat $\frac{2}{1}$. tertiæ proportionalis duarum, 8℞, ℞4, patet ergo, quod cylindrus, SΦ, ad tympanum, SYΦ, est vt, ℞8, ad, 87. Quoniam verò, vt, LO, ad, OQ, sic est, QO, ad, OR, ideò vt, LO, ad, OR, vel, T8, ipsi æqualem, ita quadratum, LO, ad quadratum, OQ, vel ita quadratum, RO, seu quadratum, ℞8, ad quadratum, NO, vel ita circulus, ℞Φ, ad circulum, NP, ergo duo cylindri, SΦ, KP, quorum axes reciprocè basibus respondent, erunt æquales, quod serua. Vlterius, quia vt, IE, ad, EG, sic est, 8℞, ad, ℞4, & vt, EG, ad, EF, sic quadratũ ad inscriptum circulum, & ita etiam, ℞4, ad, ℞3, ergo ex æquali, IE, ad, EF, erit vt, 8℞, ad, ℞3. Similiter quia, IE, ad, EG, est vt, 8℞, ad, ℞4, &, EG, ad $\frac{2}{1}$. tertiæ proportionalis duarum, IE, EG, est vt, 4℞, ad $\frac{2}{1}$. tertiæ proportionalis duarum, 8℞, ℞4, ideò ex æquali, vt, IE, ad $\frac{2}{1}$. tertiæ proportionalis duarum, IE, EG, ita, 8℞, erit ad $\frac{2}{1}$. tertiæ proportionalis duarum, 8℞, ℞4, eædem autem, IE, 8℞, ad, FE, 3℞, erant in eadem ratione, ergo ad excessus duarum, EF, ℞3, super $\frac{2}{1}$. tertiarum proportionalium, IE, EG, ex vna parte, &, 8℞, ℞4, ex alia, erunt in eadem ratione .i. vt, IE, ad, FH, ita erit, 8℞, ad, 37, sed etiam, vt, IE, ad, EF, sic esse ostensum est, 8℞, ad, ℞3, ergo, colligendo, vt, IE, ad, EH, ita, 8℞, ad, ℞7, & per conuersionem rationis, & conuertendo, vt, HI, ad, IE, idest vt, AD, ad, LO, idest vt cylindrus, BAC, ad cylindrum, NLP, vel illi æqualem, SΦ, (vt ostensum est) ita, 78, ad, 8℞, sed vt, 78, ad, 8℞, ita tympanum, SYΦ, ad cylindrum, Sφ, ergo, vt cylindrus, BAC, ad cylindrum, Sφ, ita tympanum, SYφ, ad cylindrum, Sφ, ergo cylindrus, BAC, æquatur tympano, SYφ, cuius axis, T8, semidiametro basis, ℞3, est æqualis, quod, &c.

Corol. 11. 34 l. 3.

E. Cor. 4. gener. 34. l. 2.

Corol. 12. 3. l. 2.

CO-

COROLLARIVM.

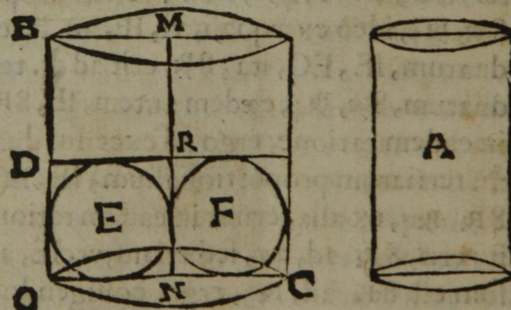
Colligitur autem iuxta Corollarium Proposit. 26. huius, nos posse inuenire tympana sphæralia, quorum axes semidiametris basium sint æquales, quæ ad datum quodcunq; ex solidis in Sectione 3. Coroll. 2. Propos. 25. huius enumeratis, datam rationem habeant.

PROBLEMA VI. PROPOS. XIX.

Dato cylindro anulum strictum circularem æqualem inuenire.

Sit datus cylindrus, A, oportet illi anulum strictum circularem æqualem inuenire. Reperiamus ergo cylindrum, qui ad cylindrum, A, sit, vt duplum cuiusuis quadrati ad circulum dicto quadrato inscriptum, & deinde huic inuẽto cylindro alius inueniatur æqualis, BC, cuius axis sit æqualis diametro basis. s. MN, ipsi, OC, qui diuidatur bifariã in, R, & per, R, ducto plano, oppositis basibus ęquidistãte, sit cõstitutus cylindr⁹ DC, in quo planum per axem ductum produxerit parallelogrammum, DC, quod in duo separabitur quadrata per ipsam, RN, sint illis inscripti æquales circuli, E, F, ex quorum reuolutione circa, RN, intelligatur effectus anulus strictus circularis, EF. Dico hunc esse æqualem cylindro, A, nam,

Vt in Propos. 26. huius.



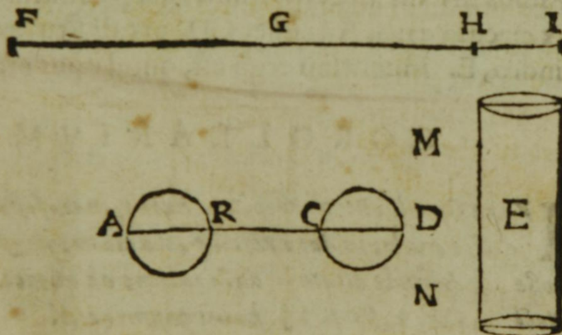
A. Nam, BC, ad, A, est vt parallelogrammũ, BN, .i. vt duplum quadrati, DN, ad circulum, E, sic autem est, BC, ad anulum strictum genitum ex, E, igitur hic anulus cylindro, A, æqualis erit, quod inuenire opus erat.

Elicitur ex Coroll 13. 34. l. 3.

PROBLEMA VII. PROPOS. XXX.

Dato cyiindro anulum latum circularem æqualem inuenire, dato circulo, qui per reuolutionem ipsum generat; oportet autem datum cylindrum maiorem esse anulo stricto ab eodem circulo per reuolutionem genito.

Sit datus cylindrus, E, datus circulus, CD, sit autem datus cylindrus, E, maior anulo stricto per reuolutionem dati circuli circa ipsum rectã tangentem genito. Oportet anulum latum circularem inuenire ab eodem circulo per



reuolutionem genitum, æqualem dato cylindro, E. Sit tangens circulum, CD, in puncto, D, ipsa, MN, circa quam fieri intelligatur reuolutio, vt describatur anulus strictus circularis ex, CD, fiat deinde, vt anulus strictus ab eo genitus ad cylindrũ, E, ita, DC, diameter eiusdem ad aliam, FH, (quæ erit eadem maior, quia etiam cylindrus, E, est maior dicto anulo stricto) cui adijciatur in directum, HI, ipsi,

ipſi, DC, æqualis, deinde tota, FI, bifariam diuidatur in, G, & producta, DC, verſus, C, indefinitè in ea ſumatur, AD, æqualis ipſi, GI, & abſciſſa ab eadem ad punctum, A, ipſa, AR, eidem, CD, æquali, intelligatur circa, AR, diametrum deſcriptus circulus, AR, æqualis, CD. Dico anulum latum circularem deſcriptum per, AR, reuolutum circa, MN, in tali ſitu, cylindro, E, æqualem eſſe. Nam ſtrictus anulus deſcriptus à, CD, ad cylindrum, E, eſt vt, DC, ad, FH, & quia, GI, eſt æqualis ipſi, AD, &, CD, ipſi, HI, erit, GH, æqualis ipſi, AC, ergo vt, DC, ad, FH, ita eſt eadem, DC, ad, IGH, vel ad, DAC, ſiue, AR, ad, ADR, (nam compoſita ex, AD, DR, eſt æqualis compoſitæ ex, DA, AC,) eſt autem vt, AR, ad compoſitam ex, AD, DR, ita anulus ſtrictus genitus ex circulo, CD, ad anulum latum genitum ex circulo, AR, ergo anulus ſtrictus genitus ex circulo, CD, ad anulum latum genitum ex circulo, AR, erit, vt idem anulus ſtrictus ad cylindrum, E, ergo anulus latus genitus ex circulo dato, AR, ſiue, CD, in tali ſitu, æqualis erit cylindro, E. Inuentum ergo eſt, quod opus erat.

Elicitur ex dictis in Corol. 29. 34. lib. 3. Sect. 2. ſi ea circulis applicetur

COROLLARIVM I.

IVxta Coroll. autem Prop. 26. huius, manifeſtum eſt nos etiam dictos anulos in data ratione ad datum cylindrum inuenire poſſe, & ſubinde etiam in data ratione ad quodcunq; ex ſolidis in Sect. 3. Cor. 2. Prop. 25. huius enumeratis.

COROLLARIVM II.

HAbetur inſuper ſi in recta, DA, indefinitè producta, continuentur à puncto, D, æquales circulorũ diametri; ab eiſdem circulis per reuolutionem circa, MN, deinceps genitos anulos ſeſe habere, vt numeros impares ab vnitate continuò progredientes. Quod ſi in eadem recta linea perpendiculari ipſi, MN, vt in

eadem, DA, indefinitè producta, continuentur à puncto, D, parallelogrammorum rectãgulorum, in eademq; altitudine existentium, æquales bases, ijsq; bifariam sectis, ab effectis punctis educantur parallelogrammorum dictorum diametri, circa quas existant aliæ plana figuræ eius conditionis, vt ducta quacunq; parallela, AD, illius portiones in his figuris conceptæ sint æquales, tum anuli descripti à dictis parallelogrammis se habebunt vt numeri impares ab vnitate deinceps expositi, tũ etiam anuli geniti à prædictis figuris: Etenim isti anuli deinceps se habebunt, vt quadratum primæ æqualium rectarum linearum, in ipsa, DA, assumptarum, & excessus quadratorum deinceps subsequentium æqualium linearum, vt facilè innotescet, si in memoriam reuocẽtur, quæ dicta sunt in Coroll. 29. 34. Lib. 3. pro ibi consideratis figuris, quibus hæc quoq; adaptantur.

COROLLARIVM III.

M*Anifestum etiam est nos posse iuxta supradictam methodum cætera solida attentare, vt eadem dato cylindro tum æqualia, tum etiam in data ratione inueniamus, veluti ex. g. basim columnarem strictam, latam, ac mediam, Malum Roseum, Citrium, & reliqua, quæ in Sect. 3. Cor. 2. Prop. 25. huius enumerantur, vt subinde cuilibet ex consideratis in hoc volumine solidis inueniamus ex genere cuiuslibet nedũ æquale, sed etiam in data ratione, quæ omnia singillatim prosequi minimè volui, tũ ad vitãdam prolixitatem, tũ etiam, vt alijs iucundi exercitij occasionem non eripiam, veluti & centri grauitatis nouorum solidorũ inuentionem, nemini, quod sciam adhuc tentatam, alijs pro nunc relinquam, sufficiat. n. in præsenti prædicta solida inueniendi rationem aliqualiter declarasse, centriq; grauitatis dictorum solidorum inuestigandi materiam præbuisse.*

SCHOLIVM.

A*Duertendum est autem circa supradicta solida, quorũ mensuram præcisè non inuenimus, vt ex. g. patet de apicibus sphæralibus, tympanis, anulis, & alijs plurimis, neq; inuentionem prædictam esse, vel fore præcisam, non tamen aspernendam, cum proximè ad veritatem accedat.*

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXXI.

SI in ſpatio helico primi circuli ſpiralium conicus in eadem altitudine cum apice parabolico, in baſi dicto circulo exiſtente, ſit conſtitutus; apex parabolicus erit ſexquialter dicti conici.

Patet hæc Propoſitio, nam ſi in dicto circulo, vt in baſi, & circa eundem axim cum dictis ſolidis ſit cylindrus conſtitutus, hic erit ſexcuplus apicis parabolici, & nonuplus dicti primi conici, ergo apex parabolicus ad cylindrū erit, vt 3. ad 18. & conicus ad ipſum, vt 2. ad 18. vnde apex ad conicum erit, vt 3. ad 2. ideſt in ratione ſexquialtera, quod erat oſtendendum.

Coroll 8. Prop. 51. l.4. ſect. 1.
22. huius.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXXII.

SI circa diametrum baſis ſemianuli ſtricti parabolici tãquam circa propriam diametrum ſphæra, vel ſphærois, fuerit conſtituta, cuius ſecunda diameter ſit æqualis altitudini, ſiue axi, eiuſdem ſemianuli; dicta ſphæra, vel ſphærois ipſi ſemianulo æqualis erit.

Hæc etiam patet, nam cylindrus in eadem baſi cum ſemianulo dicto, & eadem altitudine, eſt eiuſdem ſexquialter, eſt autem etiam ſexquialter dictæ ſphæræ, vel ſphæroidis, & ideò dicta ſphæra, vel ſphærois, erit æqualis dicto ſemianulo, quod oſtendendum erat.

Corol. 10. 91. lib. 4. ſect. poſterior.
Coroll. 1. 34. l. 3.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXXIII.

SI cylindrus, & conus, hæmiſphærium, vel hę-miſphæroides, conoides parabolicum, apex parabolicus, & ſphæralis, fuerint in baſi eodem circulo, & circa eundem axim, infraſcriptam rationem inter ſe habebunt.

Sit cylindrus, BE, in baſi circulo, CE, circa axem, FD, in quibus ſint etiam hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides, CFE, conoides parabolicũ, CRFKE, conus, CFE, apex parabolicus, CVFZE, & apex ſphæralis, vel ſphæroidalis, CXFYE, qualium igitur partium cylindrus, BE, eſt 126. talium hæmiſphærium eſt 84. conoides 63. conus 42. apex parabolicus 21. apex ſphæralis 12. vnde patet hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides ſexquitertium eſſe conoidis parabolici, quadruplum apicis parabolici, & ſeptuplum apicis ſphæralis. Conoides verò parabolicum triplum eſſe apicis parabolici, & quintuplum ſexquiquartum apicis ſphæralis, quæ ex ipſis numeris colliguntur, ſimiliter conum, FCE, duplum eſſe apicis parabolici, triplum ſexquialterum proximè apicis ſphæralis, quoad apicem ſphæralem enim ſemper proximam dictam rationem intellige, & tandem apex parabolicus ad ſphæralem erit ſexquiſupertripartiens quartas.



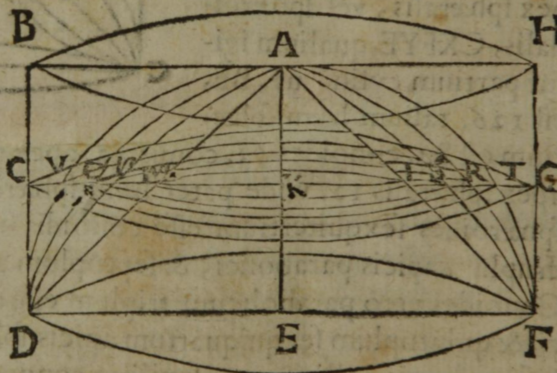
Corol. 10. 51. l 4. ſec. poſterior. Coroll. 1. 51. l. 4. l. Corol 4. gener. 34. l. 2. Coroll. 18. 51. l. 4. ſectio 1. Coroll 11. 34. l. 3.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXXIV.

SI in baſi cylindri, & circa eundem axim, fuerint hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides, co-

noides parabolicum, hyperbolicum, & conus, secto verò axi vtcumque, ducatur planum per punctum sectionis basi æquidistans. Abscissæ per ductum planum à dictis solidis portiones erũt ad solida, à quibus abscinduntur in ratione infrascripta. Similiter demptis dictis solidis singillatim à cylindro, abscissæ per ductum planum portiones ad residuum cylindri, demptis solidis iam dictis, erunt in ratione infrascripta.

Sit cylindrus, BF, in basi circulo, DF, & circa axim, AE, circa quem in eadem basi sit hæmisphærium, vel hæmisphæroides, DVATF, conoides parabolicum DOARF, hyperbolicum, DNASF, & conus, DMAIF, sũpto autem vtcunq; pũcto in, AE, quod sit, K, per, K, ducatur planum, CG, basi, DF, æquidistans. Igitur hæmisphærium, vel hæmisphæroides, DVATF, ad portionem, VAT, erit vt parallelepipedum sub dupla, AE, & quadrato, AE, ad parallelepipedum sub cõposita ex dupla, AE, & ex, EK, & sub quadrato, KA. Conoides parabolicum, DOARF, ad conoides, OAR, erit vt quadratum, EA, ad quadratũ, AK. Conoides hyperbolicum, DNASF, ad conoides, NAS, vt parallelepipedum sub composita ex sexquialtera trãsuersi



Coroll. 7. 34. l. 3.

Coroll. 3. 51. l. 4.

Coroll. 2. 30. l. 5.

eius-

eiuſdem lateris, &, EA, & ſub quadrato, EA, ad parallele-
pipedum ſub compoſita ex ſexquialtera eiuſdem tranſuerſi
lateris, &, KA, & quadrato, KA. Conus verò, DAF, ad co-
num, MAI, vt cubus, EA, ad cubum, AK. F. H.

Nunc intelligatur demptum à cylindro, BF, hæmiſphæ- Cor. gen.
rium, vel hæmiſphæroides, DVATF. Igitur per demõſtra- 34.l.2.
ta patet reliquum cylindri ad abſciſſam ab eo portionem
per ductum planum eſſe, vt cubus, AE, eſt ad cubum, EK. Coroll. 5.
Dempto autem conoide parabolico ab eodem cylindro, 34.l.3.
reliquum cylindri ad abſciſſam portionem erit, vt quadra-
tum, AE, ad quadratum, EK. Dempto verò conoide hy- Coroll. 9.
perbolico ab eodem cylindro, reliquum cylindri ad abſciſ- 51.l.4.
ſam portionem erit, vt parallelepipedum ſub compoſita
ex ſexquialtera tranſuerſi lateris, & dupla axis eiuſdem, &
ſub quadrato eiuſdem axis, ad parallelepipedum ſub com- Coroll. 5.
poſita ex ſexquialtera eiuſdem tranſuerſi lateris, & axibus 30.l.5.
vtriuſq; portionis, & ſub quadrato exceſſus maioris axis
ſuper minorem. Tandem dempto cono, DAF, à cylindro,
BF, reſiduum cylindri ad abſciſſam portionem erit, vt cu-
bus, AE, ad parallelepipedum ſub ſexquialtera, KE, & ſub
rectangulo, AKE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, KE. Nam cylindrus,
BF, ad reliquum cylindri, CF, dempto fruſto coni, DMIF,
habet rationem compoſitam ex ea, quam habet cylindrus, Defin. 12.
BF, ad cylindrum, CF, ideſt ex ea, quam habet, AE, ad, EK, l.1.
& ex ratione cylindri, CF, ad reliquũ, dempto à cylindro, C. Cor. 4.
CF, fruſto, DMIF, quæ eſt ea, quam habet quadratum, DE, gener. 34.
ad rectangulum, CMK, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, CM, vel quadra- l.2.
tum, EA, ad rectangulum, EKA, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, EK, eſt Collig. ex L. Coroll.
autem reliquum cylindri, BF, dempto cono, DAF, $\frac{2}{3}$. eiuſ- 4. gener. 34.l.2.
dem cylindri, ergo reliquum cylindri, BF, dempto cono,
DAF, ad reliquum cylindri, CF, dempto fruſto, DMIF, erit
in ratione compoſita ex ea, quam habent $\frac{2}{3}$. AE, ad, EK,
ideſt, AE, ad ſexquialteram, EK, & quadratum, AE, ad re-
ctangulum, AKE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, KE, quæ duæ rationes
com-

D. G. Cor. gen. 3.l.2.

cõponunt rationem cubi, AE, ad parallelepipedum sub sexquialtera, EK, & sub rectangulo, AKE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, KE, sic igitur erit residuum cylindri, BF,

dempto cono, DAF, ad residuum cylindri, CF, dempto frusto, DMIF; cætera autem ex suis Propositionibus patent, quæ explicanda proponebantur.

COROLL. GENERALE.

Licet autem in superioribus huius Libri Propositionibus tantummodo cylindros, conos, sphæras, sphæroides, conoides parabolicas, & hyperbolicas, apices sphærales, atque anulos, apices parabolicos, & semianulos, ac cætera consimilia solida fuerimus contemplati, quorum omnia plana sunt omnes figuræ similes figurarum, quæ eorundem genitrices appellantur, scilicet in his solidis, assumptis tantum similibus figuris, quæ sint circuli, vel ellipses; tamen manifestum est, si vice circulorum, vel ellipsium aliæ fuissent assumptæ similes figuræ, quod eadem circa talia solida Theoremata, vel Problemata similia præpositis construere potuissemus. Vnde ex. g. veluti in Propos. 26. huius inuenimus sphæram æqualem dato cylindro, ita si vice cylindri habuissemus cylindricum, cuius basis fuisset triangulum æquilaterum, poteramus vice sphæræ inuenire solidum, cylindrico dato similare, genitum ex circulo, cuius nempè omnia plana fuissent omnes figuræ similes, idest omnia triangula æquilatera, circuli, qui erat sphæræ, & est

huius

*huius solidi genitrix figura, & eodem modo in cæteris en...
mutationem prosequi, assumptis quibuscumque similiu figuris
genitricium figurarum, ex quibus dicta solida ad inuice simila-
ria genita dicuntur, quam varietatem, vt & alia quaplurima
tum Problemata, tum Theoremata, quæ ex hactenus o]nsis de-
duci possent, quæq; Lectoris industria relinquuntur; uiq;
licebit iuxta propositam methodum facilè medi
tari, & propterea circa hæc non amplius
immorandum mihi esse
censui.*

Finis Sexti Libri.


a56444 20